Université Med Seddik Benyahia-Jijel
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département d'Enseignement Fondamental en Sciences et Technologie

Exercices : Dynamique du point matériel

Dynamique, travail et énergie du point matériel

Exercice 01

Un corps ponctuel de masse m est libéré sans vitesse initiale et sans frottement sur la trajectoire $(ABCD)$($figure$ 01), tel qu'il rencontre un ressort de constante k en C. Le mobile se déplace de B à C par une vitesse constante.

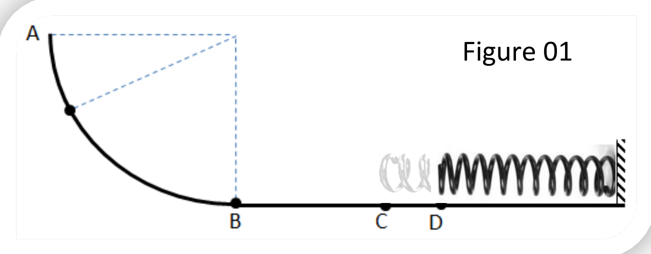


Figure 01

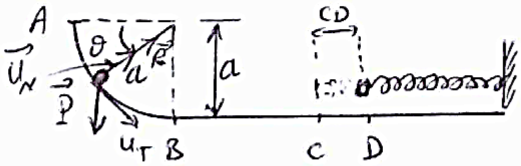
1. Déterminer la vitesse à un instant t ;
2. Déduire la vitesse en B ;
3. Déduire la réaction en B en fonction de a, g et m ;
4. Déterminer la compression maximale du ressort (CD).

Solution ex. 01

Exo 1 :

1) En appliquant le P.F.D. : $\sum \vec{F} = m\vec{a}$.

$\Rightarrow \vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}$.



Par projection sur la base de Frenet ; on aura :

$$\begin{cases} /\vec{u}_T : mg\cos\theta = m a_T = m\dfrac{dv}{dt} & \text{— (1)} \\ /\vec{u}_N : R - mg\sin\theta = m\dfrac{v^2}{R} = m a_N & \text{— (2)} \end{cases}$$

de (1) $\dfrac{dv}{dt} = g\cos\theta \Rightarrow \dfrac{dv}{d\theta}\cdot\dfrac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}\dfrac{dv}{d\theta} = g\cos\theta$

mais : $v = a\,\dot{\theta} \Rightarrow \dot{\theta} = \dfrac{v}{a} \Rightarrow v\,dv = ag\cos\theta\,d\theta$

$$\Rightarrow \int_0^v v\,dv = \int_0^\theta ag\cos\theta\,d\theta \Rightarrow \frac{1}{2}v^2\Big|_0^v = ag\sin\theta\Big|_0^\theta$$

$$\Rightarrow \boxed{v = \sqrt{2ga\sin\theta}} \quad \text{— } (*)$$

2) $(*)$ en B ; $(\theta = \frac{\pi}{2})$ $\boxed{v_B = \sqrt{2ga}}$

3.) La réaction à l'instant (t) :

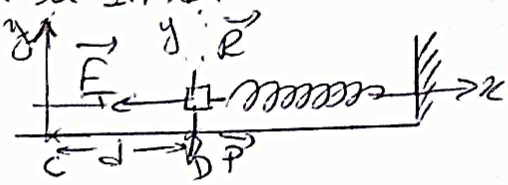
- de (2) $R = m\dfrac{v^2}{a} + mg\sin\theta$.

- en B : $\theta = \dfrac{\pi}{2}$, $v = v_B \Rightarrow R_B = m\dfrac{(\sqrt{2ga})^2}{a} + mg\sin\dfrac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow R_B = 2mg + mg = \boxed{3mg}$$

4) Détermination de la Compression maximale $d = \overline{CD}$:

On a : $\vec{R} + \vec{P} + \vec{F_T} = m\vec{a}$ selon le P.F.D.



En projetant sur (Oy) :

$R - P = 0$

En projetant sur (Ox) On aura

$-kx = m\ddot{x}$, mais $\ddot{x} = \dfrac{d\dot{x}}{dt} = \dfrac{dx}{dt}\cdot\dfrac{d\dot{x}}{dx} = \dot{x}\dfrac{d\dot{x}}{dx}$

alors, $\dot{x}\,d\dot{x} = -\dfrac{k}{m}x\,dx$, $\dot{x} = v$

$$\int_{v_C}^{v_D} v\,dv = -\frac{k}{m}\int_C^D x\,dx \quad \text{avec : } v_D = 0,\ v_C = v_B,\ \overline{CD} = d$$

$$\Rightarrow \int_{v_B}^{0} v\,dv = -\frac{k}{m}\int_0^d x\,dx \Rightarrow \frac{1}{2}v_B^2 = -\frac{1}{2}\frac{k}{m}d^2$$

$$\Rightarrow d^2 = \frac{m}{k}(2ag) \Rightarrow \boxed{d = \sqrt{\frac{2mag}{k}}}$$

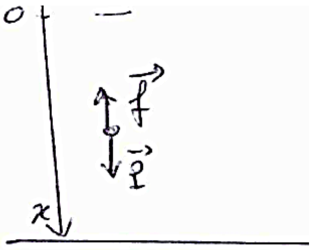
Exercice 02

Une petite goutte d'eau tombant dans l'atmosphère est soumise à son poids $\vec{P}$ et à l'action de l'air $\vec{f} = -K.\vec{v}$. On abondant la goutte d'eau sans vitesse initiale et au bout de quelques temps elle atteindra une vitesse limite $\vec{v}_1$ à son arrivée au sol.

1. Écrire l'équation du mouvement de la goute en fonction de $\dot{v}, v, k, m\ et\ g$;
2. Exprimer sa vitesse $\vec{v}_1$ à son arrivée au sol par m, K et g ;
3. Trouver l'expression de la vitesse en fonction du temps;
4. Calculer la durée de la chute;

A.N. $m = 10^{-6}\ kg,\quad g = 9.81\frac{m}{s^2},\quad v_1 = 10^{-3}\ \frac{m}{s}$

Solution ex. 02



Exercice 2

1) Le P.F.D : $\vec{P} + \vec{f} = m\vec{a}$

$\Rightarrow mg - kv = m\frac{dv}{dt}$

$\Rightarrow \boxed{\dot{v} + \frac{k}{m}v = g}$ c'est l'éq. du mouvement. (Δ)

2) à son arrivée au sol, la goutte atteindra une vitesse limite $\vec{v}_1$, alors à cet instant $\frac{dv}{dt} = 0$

de $(\Delta) \Rightarrow \frac{K}{m}v_1 = g \Rightarrow \boxed{v_1 = \frac{mg}{K}}$

3) On a : $\dot{v} + \frac{k}{m}v = g \Rightarrow \frac{dv}{dt} + \left(\frac{K}{m}v - g\right) = 0$

On pose : $v' = \frac{K}{m}v - g \Rightarrow \frac{dv'}{dt} = \frac{K}{m}\frac{dv}{dt}$

$\Rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{m}{K}\frac{dv'}{dt}$, on substitut dans (Δ) :

$$\frac{m}{K}\frac{dv'}{dt}+v'=0 \Rightarrow \frac{dv'}{dt}=-v'.\frac{K}{m}.$$

$$\Rightarrow \int_{-g}^{v'}\frac{dv'}{v'}=\int_0^t -\frac{K}{m}\,dt \Rightarrow \ln v'\Big|_{-g}^{v'}=\frac{-K}{m}t.$$

$$\ln v'=-\frac{K.t}{m}+c \Rightarrow e^{\ln v'}=e^{-\frac{Kt}{m}+c}=c'e^{-\frac{Kt}{m}}$$

$$c'=e^{c}. \Rightarrow v'=c'e^{-\frac{K}{m}t}=\frac{K}{m}v-g$$

$$\text{à: } t=0\ ,\ v=0 \Rightarrow \frac{K}{m}(0)-g=c'e^{0}\Rightarrow c'=-g$$

$$\Rightarrow \frac{K}{m}v-g=-g\,e^{-\frac{K}{m}t} \Rightarrow \boxed{v=-\frac{mg}{K}e^{-\frac{Kt}{m}}+\frac{gm}{K}}$$

$$4)\quad v=\frac{mg}{K}\left(1-e^{-\frac{Kt}{m}}\right),\ \text{à l'arrivée : } v=v_1$$

$$\text{alors : } v_1=\frac{mg}{K}\left(1-e^{-\frac{Kt}{m}}\right)=\frac{mg}{K}\Rightarrow -e^{-\frac{K.t}{m}}=0$$

$$\Rightarrow \boxed{t=\infty}$$

Exercice 03 :

Un point matériel de masse m se déplace le long d'une ligne droite selon l'axe x. Une force $F = 5\ N$ constante agit sur le point matériel. Initialement, le point matériel se trouve en $x_i = 1\ m$ avec une vitesse initiale $v_i = 3\ m/s$.

1. Calculez le travail total effectué par la force F lorsque le point matériel se déplace de x_i à $x_f = 5$ m.
2. Quelle serait la variation d'énergie cinétique du point matériel pendant ce déplacement ?
3. Si la force F n'est pas constante mais dépend de la position selon $F(x) = kx$, où $k = 4\ N/m$ est une constante, comment cela affecterait-il le travail total accompli par la force lors du déplacement de x_i à x_f ?

Solution (ex. 03)

1. Le travail W effectué par une force constante lors d'un déplacement est donné par la formule :
   $dw = F.dl => W = \int_{x_i}^{f} F.dx$

   où F est la force constante et Δx est le déplacement.

La force F est constante, le travail est simplement :

$$W = F \cdot \Delta x = 5 * (5 - 1) = 20\, J$$

2. La variation d'énergie cinétique (ΔEc) est liée au travail par le théorème de l'énergie cinétique :
   $\Delta Ec = W = 20\, J$

3- Si la force dépend de la position, $F(x) = kx$, alors le travail devient une intégrale :

$$\int_{x_i}^{f} F.dx = \int_{x_i}^{f} k.x.dx = \frac{1}{2} k \left({x_f}^2 - {x_i}^2 \right) = 32\, J$$

Exercice 04 :

La masse d'un objet sur la Lune est $m = 2kg$. La hauteur d'un objet par rapport à la surface lunaire est $h = 10\ m$. La constante gravitationnelle sur la Lune est $g_{Lune} = 1.625\ m/s^2$.

1. Calculez l'énergie potentielle de pesanteur de l'objet à la surface de la Lune.
2. Calculez l'énergie potentielle de pesanteur de l'objet lorsqu'il est élevé à une hauteur de 10 m par rapport à la surface lunaire.

Solution (ex. 04)

Au début, il faut donner plus de détail comment arriver à énergie potentielle Ep (svp changer U par Ep).

1. **Énergie potentielle à la surface de la Lune :**
   $U_{\text{surface}} = mgh_{\text{surface}} = (2\,\text{kg}) \cdot (1.625\,\text{m/s}^2) \cdot 0\,\text{m} = 0\,\text{J}$
2. **Énergie potentielle à une hauteur de $10\,\text{m}$:**
   $U_{10\,m} = mgh_{10\,m} = (2\,\text{kg}) \cdot (1.625\,\text{m/s}^2) \cdot (10\,\text{m}) = 32.5\,\text{J}$

Proposée par Dr MAHAMDIOUA N.