المحور الثالث: نظرية التقدير:

المقصود بالتقدير هو تقدير معالم المجتمع الإحصائي (أو التوزيع الاحتمالي) والتي غالباً ما تكون مجهولة ويكون المطلوب هو الحصول على تقديرات لها –عادة– من بيانات العينة فقد يكون المطلوب تقدير متوسط دخل الدولة، أو تقدير متوسط عمر الناخب... وغيرها.

وهناك نوعان (أو أسلوبان) للتقدير يسمى الأول تقدير النقطة (أو القيمة الواحدة)، ويسمى الثاني التقدير بمجال (أو فترة التقدير).

ففي حالة تقدير النقطة نحصل على قيمة واحدة فقط، يأخذها الثابت الإحصائي المقدر بدلالة التابع الإحصائي المقابل والمحسوب من تلك العينة المسحوبة من المجتمع الإحصائي، والمراد تقدير أحد ثوابته الإحصائي أي تقدير الثابت بقيمة واحدة مثلا : يكون أفضل تقدير للوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي هو الوسط الحسابي المحسوب من عينة عشوائية سحبت من ذلك المجتمع على اعتبار أن هناك احتمالا كبيرا ليكون الوسط الحسابي للعينة قريبا جدا من الوسط الحسابي للمجتمع غير المعلوم، وما ينطبق على الوسط الحسابي ينطبق على الثوابت الإحصائي الأخرى

أما في التقدير بمجال أو فترة التقدير فنحصل على مدى Range أو فترة تتحدد بحدين (حد أدنى وحد أعلى) – نحصل عليهما من العينة. ونلاحظ هنا أن التقدير بمجال (أو تقدير الفترة) تحتوي على أكثر من قيمة بل قد يكون عدد القيم غير محدود أو لا نهائياً في كثير من الحالات. فمثلاً : إذا قدرنا أن الوسط الحسابي لأعمار الناخبين يتراوح بين: 20 سنة كحد أدنى و 60 سنة كحد أعلى نكون قد حصلنا على تقدير مجال للوسط الحسابي لأعمار الناخبين في المجتمع – ونلاحظ أن هذا المجال (20،60) يحتوي على عدد لا نهائي من الأعمار، بمعنى أن العدد لا يقتصر فقط على الأعداد الصحيحة والتي تشمل السنوات، ولكنها تشمل أيضا كسور السنوات، والأيام والشهور، والساعات... الخ وسوف نرى كيف نحدد التقدير بمجال في بعض الحالات.

وتتميز التقديرات بمجال بالإضافة إلى أنها تحتوي على عدد كبير جداً من القيم، بأنه يمكن حساب احتمال أن يكون التقدير صحيحاً، وبالتالي فإنه يمكن معرفة مدى دقة التقديرات. لذا فإن التقدير بمجال

يسمى أيضاً " مجال الثقة " لأن هذه الفترات تعتمد في تكوينها الإحصائي على درجات أو مستويات ثقة معينة مثل 95% أو 99 % وغيرها، بمعنى أن احتمال أن تكون فترة التقدير صحيحة هو 0.95 أو 0.99 وهكذا...

فإذا كان متوسط أعمار الناخبين يتراوح ما بين 20 و 60 سنة، ودرجة الثقة هي 95 % فإن هذا معناه أنه لو تكررت التجربة مائة مرة، فإن التقدير سيكون محصوراً بين هذين الرقمين في 95 من الحالات (أي احتمال أن يكون صحيحاً هو 95%).

3-1- مفاهيم أساسية

3-1-1- بعض خصائص المقدر

لتقدير معلمة من معالم مجتمع محل دراسة، نحتاج إلى اختيار الإحصائية المناسبة في العينة لتقدير هذه المعلمة. غالبا ما تكون المعلمة المناظرة في العينة هي أحسن مقدر، كأن نقدر متوسط المجتمع μ من خلال متوسط العينة $\mu_{\bar{x}}$. تسمى الإحصائية المستخدمة في التقدير المقدر.

- المقدر غير المتحيز

نقول عن إحصائية ما بأنها مقدر غير متحيز biais sans لمعلمة المجتمع إذا كان متوسطها أو توقعها الرياضي مساويا لمعلمة المجتمع.

مثال1: نقول عن متوسط العينة $\bar{x}$ أنه مقدر غير متحيز لمتوسط المجتمع μ لأن $E(\bar{X}) = \mu$. في المقابل نسمي الإحصائية S^2 في معاينة بالإرجاع أنها مقدر متحيز لـ σ^2 لأن $E(S^2) = \delta^2 \dfrac{(n-1)}{n} \neq \delta^2$.

- الكفاءة:

تتعلق كفاءة (efficacité) مقدر ما بمقدار التباين لتوزيع المعاينة للإحصائية، فإذا كان لمقدرين (إحصائيتين) نفس المتوسط نقول عن المقدر ذو توزيع المعاينة الأقل تباينا أنه الأكثر كفاءة.

من البديهي أن استخدام مقدرات فعالة وغير متحيزة هو الأفضل، إلا أنه قد يلجأ لمقدرات أخرى لسهولة الحصول عليها.

- التقارب convergeance

نقول عن مقدر أنه متقارب إذا كان يؤول إلى قيمة المعلمة المقدرة عندما يؤول حجم العينة إلى ما لا نهاية.

مثال2: يعتبر متوسط العينة مقدرا متقاربا لمتوسط المجتمع لأن:

$$V(\bar{x}) = \delta_{\bar{x}}^2 = \frac{\delta^2}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \text{ ، } E(\bar{X}) = \mu$$

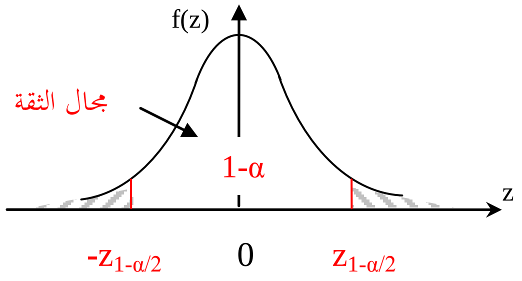
3-1-2 درجة التأكد

لكي يكون التقدير علميا ينبغي تقييم احتمال أن تكون المعلمة تنتمي فعلا إلى المجال المحدد، لذلك نلحق بالمجال ما يسمى بدرجة أو مستوى الثقة، ويرمز له ب$(1-\alpha)$. الاحتمال المعاكس يسمى احتمال الخطأ ويرمز له ب α، ويسمى أيضا ""مستوى المعنوية".

مثال3: دخل الأسرة في المنطقة(A) ينتمي إلى المجال [16000، 20000] بمستوى معنوية 5 % أي بمستوى ثقة 95 % . وتسمى الحدود 16000 و20000 بحدود الثقة.

3-1-3- تعيين حدود مجال الثقة

تحدد حدود الثقة من خلال معاملات الثقة التي بدورها تحدد من خلال مستوى المعنوية (مستوى الثقة). ففي حالة استخدام التوزيع الطبيعي للتقدير تكون القيمتين ± 1.96 معاملات الثقة من أجل مستوى ثقة 95% بينما القيمتين ±2.58 تمثلان معاملات الثقة من أجل مستوى ثقة 99 % .



<u>مجال الثقة للتوزيع الطبيعي</u>

مثال4: ليكن μ_s و σ_s متوسط وانحراف معياري توزيع المعاينة لإحصائية ما s حيث $\mu_s = \mu$. إذا كان توزيع المعاينة ل s توزيعا طبيعيا (كما هو الحال بالنسبة لأغلب الإحصائيات عندما $(n \geq 30)$) فإننا نقدر مثلا وبالنظر إلى توزيع s أن:

القيمتين $\mu_s \pm 1.96\sigma_s$ تمثلان **حدود الثقة** ب *95 %*، و $\mu_s \pm 2.58\sigma_s$ حدود الثقة ب *99 %*.

في حالة التوزيع الطبيعي يرمز لحدود الثقة ب Z_c أو $Z_{1-\alpha/2}$ (أنظر الرسم).

3-2- التقدير بمجال

3-2-1- مجال الثقة للمتوسط

يقدر متوسط المجتمع μ من خلال الإحصائية $\bar{x}$.

3-2-1-1- تقدير μ باستخدام التوزيع الطبيعي

إذا كان المجتمع المسحوب منه العينة ذا توزيعاً طبيعياً وتباينه معروفاً أو كانت العينة كبيرة (أي حجمها ثلاثون مفردة أو أكثر) فإن توزيع المعاينة للوسط الحسابي يكون توزيعاً طبيعياً، وطالما نحن نتكلم عن تقدير متوسط المجتمع فإن أول ما نفكر فيه هو الوسط الحسابي للعينة. ومجال الثقة للوسط الحسابي للمجتمع يأخذ الشكل التالي :

تقدير متوسط المجتمع = الوسط الحسابي للعينة ± الخطأ المعياري للوسط وبالرموز فإن:

$$IC_\mu = \left[\bar{x} \pm 1\delta_{\bar{x}}\right]$$

حيث $\bar{x}$ هو الوسط الحسابي للعينة، $\delta_{\bar{x}}$ هو الخطأ المعياري للوسط، + تشير للجمع فنحصل على الحد الأعلى لفترة التقدير، − تشير للطرح فنحصل على الحد الأدنى، ولكن احتمال أن يكون هذا الكلام صحيحا هو 68.26 % فقط، أي أن درجة الثقة هنا لا تتعدى 68.26 % فإذا أضفنا وطرحنا ضعف الخطأ المعياري يرتفع الاحتمال إلى 95.44% أي ترتفع درجة الثقة إلى 95.44 % وفي هذه الحالة يأخذ مجال الثقة الشكل التالي :

$$IC_\mu = \left[\bar{x} \pm 2\delta_{\bar{x}}\right]$$

وإذا أضفنا وطرحنا ثلاثة أمثال الخطأ المعياري يصبح الاحتمال 99.72 % أي ترتفع درجة الثقة إلى 99.72% وتأخذ فترة الثقة الشكل التالي : $IC_\mu = \left[\bar{x} \pm 3\delta_{\bar{x}}\right]$

أي أنه بزيادة درجة الثقة يزيد طول الفترة. ومما سبق نلاحظ ما يلي:

– أن هناك علاقة وثيقة بين درجة الثقة والرقم أو " المعامل المضروب في الخطأ المعياري فهو إما 1 أو 2 أو 3 على حسب درجة الثقة 68.26% أو 95.44% أو 99.72 % ولذلك فإن هذا المعامل هو الذي يسمى " معامل الثقة ". فبناء على درجة الثقة المطلوبة يتحدد معامل الثقة.

– أن درجات ومعاملات الثقة التي ذكرناها تخص التوزيع الطبيعي، وأن المعاملات 1 أو 2 أو 3 ما هي إلا الدرجة المعيارية (Z) والتي نحصل عليها من جدول التوزيع الطبيعي المعياري وذلك بقسمة درجة الثقة (أو الاحتمال) على 2 (حيث أن المساحة موزعة بالتساوي على يمين ويسار الوسط) ثم بالكشف في المساحات تحت المنحنى الطبيعي المعياري عن خارج القسمة (أو أقرب رقم له) فنحصل على Z المقابلة وهذا يرجع إلى أن توزيع المعاينة للوسط هو التوزيع الطبيعي.

– يمكن الحصول على مجال الثقة بأي درجة ثقة أخرى كما يلي:

لدينا لما: $X \to N(\mu,\delta^2)$ فان $\bar{x} \to N\left(\mu,\frac{\delta^2}{n}\right)$ وكذلك $\frac{\bar{x}-\mu}{\frac{\delta}{\sqrt{n}}} \to N(0,1)$ ، ومنه نعرف مجال الثقة لـ$(1-\alpha)$ أو نقول مجال الثقة عند مستوى معنوية α بأنه المجال الذي يحقق ما يلي:

$$p\left(-Z_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{\bar{x}-\mu}{\frac{\delta}{\sqrt{n}}} < Z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

وبتبسيط العبارة نحصل على ما يلي:

$$\bar{x} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\delta}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\delta}{\sqrt{n}}$$

ملاحظة: نلاحظ أن المجال مركزه $\bar{x}$ وحيث $\bar{x}$ متغير عشوائي سيتغير مركز المجال بتغير العينة وبالتالي سيتغير مجال الثقة، ولكن كل المجالات تشترك في أن وسط العينة μ يقع داخل كل مجال بنسبة $(1-\alpha)$.

خلاصة: أن مجال الثقة للوسط الحسابي للمجتمع في حالة δ معلوم يأخذ الشكل التالي:

$$IC_\mu = \left[\bar{x} \pm z_c \delta_{\bar{x}}\right]$$

حيث: $\delta_{\bar{x}} = \frac{\delta}{\sqrt{n}}$

ومنه يصبح مجال الثقة كما يلي:

$$IC_\mu = \left[\bar{x} \pm z_c \frac{\delta}{\sqrt{n}}\right]$$

ويمكن تلخيص خطوات تقدير الوسط الحسابي للمجتمع فيما يلي:

– حساب الوسط الحسابي للعينة $\bar{x}$.

– حساب الخطأ المعياري للوسط $\delta_{\bar{x}}$ والذي يساوي $\frac{\delta}{\sqrt{n}}$

– ضرب الخطأ المعياري للوسط في معامل الثقة المناسب (أو الدرجة المعيارية) حسب درجة الثقة المطلوبة أي أحسب $z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

– طرح حاصل الضرب السابق من الوسط الحسابي للعينة فنحصل على الحد الأدنى لفترة التقدير، واجمع حاصل الضرب مرة أخرى على الوسط الحسابي للعينة فتحصل على الحد الأعلى لفترة التقدير.

– إذا كان الانحراف المعياري للمجتمع δ غير معروف (مجهول)– وهو غالبا ما يحدث في الواقع فيمكن استخدام الانحراف المعياري للعينة s أو الانحراف المعياري المعدل للعينة $\hat{s}$ بدلا منه طالما كان حجم العينة كبيرا بدرجة كافية $(n \geq 30)$ ويصبح مجال الثقة للوسط الحسابي للمجتمع كما يلي[1] :

$$IC_{\mu} = \left[\bar{x} \pm z_c \frac{\hat{S}}{\sqrt{n}}\right] \text{ أو } IC_{\mu} = \left[\bar{x} \pm z_c \frac{S}{\sqrt{n-1}}\right]$$

ملاحظة: جميع الصيغ السابقة تستعمل في حالة المعاينة بالإرجاع، أما في حالة المعاينة بدون إرجاع تصبح الصيغة كالآتي:

$$IC_{\mu} = \left[\bar{x} \pm z_c \frac{\delta}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}\right]$$

وفي حالة ما يكون الانحراف المعياري للمجتمع δ مجهولا، نعوض δ في الصيغة السابقة بالمقدر s أو $\hat{s}$.

– يمكن كتابة أشهر وأهم درجات ومعاملات الثقة z_c (للتوزيع الطبيعي) في الجدول التالي (مع ملاحظة أن 95%، 99% هي أشهرها على الإطلاق)

[1] $S^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}, \hat{S}^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$

مستوى الثقة $1-\alpha$	0.99	0.98	0.95	0.90	0.8	0.5
مستوى المعنوية α	0.01	0.02	0.05	0.10	0.2	0.5
$1-\alpha/2$	0.995	0.99	0.975	0.95	0.9	0.75
$Z_{1-\alpha/2}$	2.58	2.326	1.96	1.645	1.282	0.674

مثال5: نقدر أن μ يوجد داخل المجال $\left[\bar{x}\pm 1.96\delta_{\bar{x}}\right]$ بمستوى ثقة 95% (0.95) أي بمستوى معنوية 5 % (0.05)....

مثال6: لو أردنا معرفة متوسط الدخل اليومي لمجموعة من الناخبين في دولة ما، فإن ذلك يبدو أمرا صعباً من الناحية العملية نظراً لكبر حجم مجتمع الناخبين، إضافة إلى طول الوقت والتكاليف. لذا فإن الأسلوب العلمي المتبع في حالة كهذه هو اختيار عينة عشوائية نستطيع من خلال معرفة نتائجها تقدير متوسط دخول الناخبين في هذه الدولة.

فلو سحبت عينة عشوائية من مجموع مجتمع الناخبين في دولة ما حجمها 101 ناخب فإذا كان الوسط الحسابي والانحراف المعياري للدخل اليومي للناخبين بالعينة هما على الترتيب 90 دولار و 25 دولار، أوجد مجال الثقة للوسط الحسابي للدخل اليومي لمجموع الناخبين في هذه الدولة بمستوى ثقة 95% ؟

الحل :

لدينا مجال الثقة للوسط الحسابي للمجتمع هو:

$$IC_{\mu}=\left[\bar{x}\pm z_c\frac{\delta}{\sqrt{n}}\right]$$

بما أن δ الانحراف المعياري للمجتمع مجهولة، نستعمل في هذه الحالة الانحراف المعياري للعينة، ومنه يصبح مجال الثقة يكتب على الشكل التالي:

$$IC_{\mu}=\left[\bar{x}\pm z_c\frac{S}{\sqrt{n-1}}\right]$$

لدينا حجم العينة $n=101$ والوسط الحسابي للعينة $\bar{x}=90$، والانحراف المعياري للعينة $S=25$.

وبما أن مستوى الثقة هي 95 % فإن : $z_c=1.96$ حسب ما هو موضح في الجدول السابق. وبالتالي فإن فترة تقدير الوسط الحسابي للدخل اليومي لمجتمع الناخبين بمستوى ثقة 95 % هي :

$$IC_{\mu}=\left[\bar{x}\pm z_c\frac{S}{\sqrt{n-1}}\right]=\left[90\pm1.96\frac{25}{\sqrt{101-1}}\right]$$
$$=[90\pm1.96(2.5)]=[90\pm4.9]=[(85.1),(94.9)]$$

- أي أن الوسط الحسابي للدخل اليومي لمجتمع الناخبين يتراوح بين 85.1 دولاراً كحد أدنى، 94.9 كحد أعلى، وذلك بمستوى ثقة 95 %.

3-2-1-2- تقدير متوسط المجتمع μ باستخدام التوزيع t :

تناولنا فيما سبق التقدير الإحصائي للوسط الحسابي للمجتمع في الحالات التي يكون فيها الانحراف المعياري للمجتمع δ معلوماً، و (أو) أن العينة كبيرة بدرجة كافية $(n \geq 30)$. ولكن إذا كانت العينة صغيرة بمعنى أن حجمها أقل من (30) مفردة، والانحراف المعياري للمجتمع الطبيعي غير معلوم (مجهول)، فإن التوزيع الإحصائي المتبع في مثل هذه الحالات هو ما يطلق عليه توزيع ستيودنت أي " توزيع t " فعند تقدير متوسط عمر الناخب في مدينة ما عن طريق سحب عينة صغيرة (حجمها أقل من 30 ناخب) التوزيع الطبيعي يكون في مثل هذه الحالات غير مناسب لصغر حجم العينة أولاً، ثم عدم معرفة الانحراف المعياري لعمر الناخب ثانياً. لذا فإن الأسلوب الإحصائي المتبع في حالات كهذه هو استخدام " توزيع t " والذي يسميه البعض "توزيع العينات الصغيرة".

ولعل الاختلاف الأساسي بين توزيع t والتوزيع الطبيعي هو أن الانحراف المعياري للعينة هو المستخدم في الأول بدلا من الانحراف المعياري للمجتمع في الثاني، وفيما عدا ذلك فالتوزيعان متماثلان وكلما زادت قيمة n كلما اقترب توزيع t من توزيع z ويعتمد توزيع t على ما يعرف بدرجات الحرية.

3-2-1-3- درجات الحرية :

تعرف درجات الحرية بأنها عدد المشاهدات المستقلة في العينة والتي تساوي حجم العينة مطروحاً منه عدد القيود أو معالم المجتمع التي يتم تقديرها من بيانات العينة، وبصفة عامة إذا كان عدد القيود k فإن درجات الحرية تساوي n - k .

ويمكن تحديد الشروط الثلاثة لاستخدام توزيع t كما يلي:

- أن يكون المجتمع المسحوبة منه العينة له توزيع طبيعي.
- والانحراف المعياري للمجتمع δ غير معروف (أو مجهول).
- والعينة صغيرة (حجمها أقل من 30 مفردة).

خلاصة: إن مجال الثقة للوسط الحسابي للمجتمع في حالة δ مجهولة وحجم العينة أقل من 30 يأخذ الشكل التالي:

$$IC_{\mu} = \left[\bar{x} \pm t_{\frac{\alpha}{2},n-1} \frac{\hat{S}}{\sqrt{n}} \right] \text{ أو } IC_{\mu} = \left[\bar{x} \pm t_{\frac{\alpha}{2},n-1} \frac{S}{\sqrt{n-1}} \right]$$

ولعل من أهم الملاحظات على المعادلة الإحصائية السابقة احتواؤها على مفهومين مهمين هما :

- مستوى المعنوية أو الدلالة والذي رمزنا له بالرمز اللاتيني ألفا α والذي يعني أنه المكمل لدرجة الثقة أي نسبة الخطأ. وبالتالي فإذا كانت درجة الثقة % 99 أي احتمال أن يكون التقدير صحيحاً بنسبة 99 %، فإن مستوى المعنوية، والذي يعني هنا درجة احتمال الخطأ يساوي 1%. وعند الكشف في جدول(t)، ولأنه توزيع متماثل، فإنه يتم قسمة مستوى المعنوية على 2.

- درجات الحرية، وهو ما سبق شرحه ويساوي في هذه الحالة n - 1. حيث n هو حجم العينة وطرحنا منه 1 لأنه تم تقدير الانحراف المعياري للمجتمع المجهول باستخدام الانحراف المعياري للعينة S أو الانحراف المعياري المعدل للعينة $\hat{S}$.

مثال7: إذا كانت دخول مجموعة من الأفراد في دولة ما تتبع التوزيع الطبيعي، وسحبت منهم عينة عشوائية حجمها 10 أفراد بوسط حسابي 72 دولاراً وانحراف معياري بلغ 6.4 دولار، أوجد مجال الثقة للوسط الحسابي للدخل اليومي لجميع الأفراد بمستوى ثقة 95%؟.

الحل :

نلاحظ: أن العينة صغيرة (حجمها $n=10$ أفراد فقط) وأن المجتمع طبيعي وانحرافه المعياري غير معروف (مجهول) لذلك نستخدم مجال الثقة التالي:

$$IC_{\mu}=\left[\bar{x}\pm t_{\frac{\alpha}{2},n-1}\frac{S}{\sqrt{n-1}}\right]$$

وحيث أن n = 10 فإن درجات الحرية لها هي :

n -1 = 10 - 1 = 9

ولدينا مستوى الثقة المطلوبة هي $1-\alpha=0.95$ فإن مستوى المعنوية $\alpha=0.05$ وبالتالي فإن نصف مستوى المعنوية هو : $\frac{\alpha}{2}=\frac{0.05}{2}=0.025$

أي يتم الكشف في جدول ستيودنت عند درجات حرية تساوي 9 تحت احتمال (نصف مستوى المعنوية) 0.025 أي أن : $t_{0.025,9}=2.262$

وبالتعويض في مجال الثقة للوسط نحصل على ما يلي:

$$\begin{aligned}IC_{\mu}&=\left[\bar{x}\pm t_{\frac{\alpha}{2},n-1}\frac{S}{\sqrt{n-1}}\right]=\left[72\pm 2.262\frac{6.4}{\sqrt{10-1}}\right]\\&=\left[72\pm 2.262\frac{6.4}{3}\right]=[72\pm 4.82]\\&=[(67.18),(76.82)]\end{aligned}$$

أي أن الوسط الحسابي للدخول اليومية يتراوح بين 67.18 دولاراً كحد أدنى، و 76.82 دولاراً كحد أعلى وذلك بمستوى ثقة 95%.

3-2-1-4- تحديد حجم العينة لتقدير الوسط الحسابي للمجتمع :

يعتبر تحديد حجم العينة المناسب من المشاكل المهمة والشائعة التي تواجه الباحثين في مختلف المجالات، وبالذات عند دراسة الظواهر الاقتصادية، ويختلف تحديد حجم العينة باختلاف الهدف من التقدير.

فإذا كان المطلوب هو تقدير الوسط الحسابي للمجتمع، فإن فترة تقدير الوسط هي كما سبق وأن أوضحنا :

$$IC_{\mu} = \left[\bar{x} \pm z \frac{\delta}{\sqrt{n}} \right]$$

ومنه نجد أن حجم العينة يأخذ الشكل التالي:

$$n = \frac{z^2 \delta^2}{e^2}$$

حيث: e هو أقصى خطأ مسموح به في تقدير الوسط، وهو عادة ما يحدده الباحث، وتتوقف على أهمية الموضوع أو الظاهرة السياسية المراد دراستها، ومدى الدقة المطلوبة في التقدير، ويسمى اختصاراً "الخطأ في تقدير الوسط".

مثال8:

إذا كانت دخول الأفراد اليومية في إحدى دول العالم النامية تتبع التوزيع الطبيعي بانحراف معياري $\delta = 15$ دولاراً، فما هو حجم العينة المناسب لتقدير متوسط دخول الأفراد في هذه الدولة بحيث لا يتعدى الخطأ في تقدير متوسط الدخل اليومي 5 دولارات، وذلك بمستوى ثقة 99 % ؟

<u>الحل :</u>

في هذا المثال نجد أن :

درجة الثقة 99 % أي أن : $Z = 2.58$

أقصى خطأ مسموح به هو 5 دولارات، أي أن : $e = 5$

والانحراف المعياري للمجتمع : $\delta = 15$

وبالتعويض بهذه القيم في المعادلة التي تحدد حجم العينة وهي:

$$n = \frac{z^2\delta^2}{e^2} = \frac{(2.58)^2(15)^2}{5} = 59.9 \approx 60$$

فإن حجم العينة مقرباً لأقرب عدد صحيح هو: 60 فردا.

أي أنه يجب على الباحث أن يأخذ عينة لا يقل حجمها عن 60 فرداً حتى يكون لديه تقديراً دقيقاً عن متوسط دخول الأفراد في هذه الدولة بحيث لا يتعدى الخطأ في تقديره لمتوسط الدخل عن خمس دولارات، وذلك بدرجة ثقة 99 %.

3-2-2- مجال الثقة للنسبة وحجم العينة المناسب.

3-2-2-1- مجال الثقة للنسبة.

إن تقدير النسبة في المجتمع تعتبر من الحالات المهمة لقياس الظواهر الاقتصادية، وبالذات التحليلية منها كتحليل اتجاهات النمو الاقتصادي، وقياس نسبة مواليد العام، ونسبة الدول التي لم توفي بالتزاماتها في المنظمات الدولية أو الإقليمية... وغيرها ونظراً لأنه من الصعوبة بمكان في كثير من الأحيان حساب هذه النسبة مباشرة من المجتمع، فإننا غالبا ما نلجأ لتقدير هذه النسبة من عينة عشوائية مسحوبة من هذا المجتمع.

فلو افترضنا أن نسبة المؤيدين للسياسة الاقتصادية التي تنتهجها دولة ما هي p وأن العينة العشوائية كبيرة بدرجة كافية$(n \geq 30)$و المعاينة بالإرجاع وأن نسبة مؤيدي هذه السياسة في العينة هي p' فإن مجال الثقة للنسبة في المجتمع يكتب كما يلي:

$$IC_p = \left[p' \pm z_c \delta_{p'} \right]$$

ولدينا: $\delta_{p'} = \sqrt{\frac{pq}{n}}$، ومنه يصبح مجال الثقة كما يلي: $IC_p = \left[p' \pm z_c \sqrt{\frac{pq}{n}} \right]$

وبما أن p مجهولة ونريد إيجاد مجال الثقة لها ومنه لحساب $\delta_{p'}$ نستبدل p بدلالة p' النسبة في العينة وبذلك يصبح مجال الثقة يكتب كما يلي:

$$IC_p = \left[p' \pm z_c \sqrt{\frac{p'q'}{n}} \right]$$

أما في حالة كون المجتمع محدودا ذا حجم N والمعاينة بدون إرجاع، فإننا نضرب في معامل الإرجاع، ومنه يصبح يكتب مجال الثقة للنسبة في المجتمع من الشكل التالي:

$$IC_p = \left[p' \pm z_c \sqrt{\frac{p'q'}{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \right]$$

مثال9: عينة عشوائية حجمها 144 ناخباً سحبت من إحدى المدن فوجد أن عدد المؤيدين في العينة لمرشح معين هو 60 ناخباً، أوجد مجال الثقة لنسبة المؤيدين لهذا المرشح في المدينة كلها بمستوى ثقة 95 %؟.

الحل :

– نحسب أولاً نسبة المؤيدين للمرشح في العينة p' التي نحصل عليها بقسمة عدد المؤيدين له على العدد الكلي للعينة (حجم العينة) أي أن:

$$p' = \frac{60}{144} = 0.42$$

ولدينا مستوى الثقة المطلوبة يساوي 95 %، ومنه معامل الثقة المناسب هو: $z_c = 1.96$ ومجال الثقة لنسبة المؤيدين لهذا المرشح في المدينة تأخذ الشكل التالي :

$$IC_p = \left[p' \pm z_c \sqrt{\frac{p'q'}{n}} \right]$$

وبالتعويض بحجم العينة والانحراف المعياري للعينة والنسبة في العينة نجد مجال الثقة كما يلي:

$$IC_p = \left[p' \pm z_c \sqrt{\frac{p'q'}{n}} \right] = \left[0.42 \pm 1.96 \sqrt{\frac{(0.42)(0.58)}{144}} \right]$$
$$= [0.42 \pm 0.08] = [(0.34), (0.50)]$$

أي أن نسبة المؤيدين للمرشح في المدينة تتراوح بين 0.34 , 0.50 وذلك بدرجة ثقة% 95 بمعنى آخر أن نسبة مؤيدي هذا المرشح في هذه المدينة لا تتجاوز % 50 كحد أعلى، وبالتالي ففرصته في الفوز كمرشح قد لا تكون كبيرة وذلك بدرجة ثقة % 95 بمعنى أن هذا الحكم لا تتجاوز نسبة الخطأ فيه 5%.

3-2-2-2- تحديد حجم العينة لتقدير النسبة في المجتمع :

وبالطريقة نفسها يمكن تحديد حجم العينة اللازمة للحصول على درجة ثقة معينة عند تقدير النسبة في المجتمع بافتراض أن أقصى خطأ في التقدير مسموح به هو e تبعاً حيث يكتب حجم العينة كما يلي:

$$n = \frac{z^2 . p(1-p)}{e^2}$$

أي أن حجم العينة المناسب في هذه الحالة يساوي حاصل ضرب مربع z في النسبة، ثم في النسبة المكملة مقسوماً على مربع الخطأ المسموح به.

مثال10:

يدعي أحد مراكز استطلاعات الرأي العام أنه عند دراسته لاتجاهات آراء الناخبين لاثنين من المتنافسين على أحد مقاعد السلطة التشريعية بأن نتائج دراسته هي من الدقة بحيث لا يتعدى نسبة الخطأ في التقدير 2%، فما هو حجم العينة المناسب التي نستطيع من خلالها الحكم على مدى صحة إدعاء هذا المركز بافتراض أن نسبة المؤيدين للمرشح هي % 50 وذلك بدرجة ثقة % 95؟.

الحل :

بما أن درجة الثقة 95 % فإن: $z = 1.96$ بافتراض أن نسبة المؤيدين للمرشح هي: $p = 0.5$

وبالتالي فإن النسبة المكملة $q = 1 - p$ هي : $q = 1 - p = 1 - 0.5 = 0.5$

ولدينا أقصى خطأ مسموح به هو: $e = 0.02$

ومنه فان حجم العينة اللازم هو:

$$n = \frac{z^2 . p(1-p)}{e^2} = \frac{(1.96)^2 (0.5)(0.5)}{(0.02)^2}$$
$$= \frac{0.9604}{0.0004} = 2401$$

أي أن حجم العينة المناسب الذي يعطي درجة الدقة المطلوبة هو 2401 ناخب. بمعنى آخر فإن على هذا المركز أن يستطلع حجم عينة لا يقل عددها عن هذا العدد.

3-3- مجال الثقة للتباين ونسبة تباينين.

3-3-1- مجال الثقة للتباين.

لتقدير التباين والانحراف المعياري لمجتمع بمجال ثقة نستعمل الخاصية :

$$\cdot \frac{nS^2}{\sigma^2} = \frac{(n-1)\hat{S}^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

$$\frac{nS^2}{\chi_{\left(\frac{\alpha}{2}, n-1\right)}} = \frac{(n-1)\widehat{S}^2}{\chi_{\left(\frac{\alpha}{2}, n-1\right)}} < \delta^2 < \frac{nS^2}{\chi_{\left(1-\frac{\alpha}{2}, n-1\right)}} = \frac{(n-1)\widehat{S}^2}{\chi_{\left(1-\frac{\alpha}{2}, n-1\right)}}$$

مثال11: مجال الثقة ب95 % يحدد كما يلي:

$$\chi^2_{0.025} \leq \frac{nS^2}{\sigma^2} = \frac{(n-1)\hat{S}^2}{\sigma^2} \leq \chi^2_{0.975}$$

ومنه نستنتج مجال الثقة ل σ كما يلي:

$$\frac{\sqrt{n}S}{\chi_{0.975}} \leq \sigma \leq \frac{\sqrt{n}S}{\chi_{0.025}} \quad ou \quad \frac{\sqrt{n-1}\hat{S}}{\chi_{0.975}} \leq \sigma \leq \frac{\sqrt{n-1}\hat{S}}{\chi_{0.025}}$$

مثال12: أوجد مجال الثقة لتباين مجتمع سحبت منه عينة حجمها 6 وتباينها المعدل $\hat{S}^2 = 11.8$ بمستوى معنوية $\alpha = 0.05$ ؟.

الحل:

لدينا من جدول توزيع كاي تربيع χ^2 أن:

$$\chi^2_{(0.025,5)} = 12.833;;; \chi^2_{(0.975,5)} = 0.831$$

فيكون مجال الثقة كما يلي:

$$\frac{(n-1)\hat{S}^2}{\chi_{\left(\frac{\alpha}{2},n-1\right)}} < \delta^2 < \frac{(n-1)\hat{S}^2}{\chi_{\left(1-\frac{\alpha}{2},n-1\right)}}$$

$$\frac{(5)(11.8)}{12.833} < \delta^2 < \frac{(5)(11.8)}{0.831}$$

$$4.6 < \delta^2 < 71$$

$$IC_{\delta^2} = [(4.6);(71)]$$

3-3-2- مجالات الثقة لنسبة تباينين

رأينا سابقا أنه إذا كان لدينا مجتمعان طبيعيان تبايناهما σ^2_1 , σ^2_2 وسحبنا منهما عينتين عشوائيتين حجمهما على التوالي n_1 , n_2 فإن :

$$F=\frac{\left[\frac{S_1^2 n_1}{n_1-1}\right]\frac{1}{\sigma_1^2}}{\left[\frac{S_2^2 n_2}{n_2-1}\right]\frac{1}{\sigma_2^2}}=\frac{\hat{S}_1^2/\sigma_1^2}{\hat{S}_2^2/\sigma_2^2}\rightarrow F_{n_1-1;\ n_2-1}$$

ومنه مجال الثقة يكتب كما يلي:

$$\frac{\widehat{S}_1^2}{\widehat{S}_2^2}\frac{1}{F_{\left(\frac{\alpha}{2},n_1-1,n_2-1\right)}}\leq\frac{\delta_1^2}{\delta_2^2}\leq\frac{\widehat{S}_1^2}{\widehat{S}_2^2}\frac{1}{F_{\left(1-\frac{\alpha}{2},n_1-1,n_2-1\right)}}$$

إذا يمكن تكوين تقدير بمجال ل F عند مستوى ثقة 0.98 كما يلي:

$$F_{0.01}\leq\frac{\hat{S}_1^2/\sigma_1^2}{\hat{S}_2^2/\sigma_2^2}\leq F_{0.99}$$

و من ثم يمكن تقدير النسبة بين تبايني المجتمعين كما يلي:

$$\frac{1}{F_{0.99}}\frac{\hat{S}_1^2}{\hat{S}_2^2}\leq\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\leq\frac{1}{F_{0.01}}\frac{\hat{S}_1^2}{\hat{S}_2^2}$$

– وتكمن أهمية إيجاد مجال الثقة في بحث وجود تجانس بين المجتمعين، فكلما كانت النسبة قريبة من 1 كان المجتمعان أكثر تجانسا أي لهما نفس التباين تقريبا.

3-4- مجالات الثقة للفروق والمجاميع

إذا كانت S_1 وS_2 إحصائيتا معاينة لها توزيع يقترب من التوزيع الطبيعي، والعينتان مستقلتان، تكتب حدود الثقة للفروق بين المعالم التي تمثلها الإحصائيتين كما يلي:

$$S_1-S_2\ \pm\ z_c\cdot\sigma_{S_1-S_2}=S_1-S_2\ \pm\ z_c\cdot\sqrt{\sigma^2{}_{S_1}+\sigma^2{}_{S_2}}$$

في حالة المجموع :

$$S_1+S_2\ \pm\ z_c\cdot\sigma_{S_1-S_2}=S_1+S_2\ \pm\ z_c\cdot\sqrt{\sigma^2{}_{S_1}+\sigma^2{}_{S_2}}$$

مثال13: إذا كانت الإحصائيتان هما متوسطا عينتين مستقلتين، مسحوبتين من مجتمعين غير محدودين وتباينهما δ_1^2 و δ_2^2 معلومتين، نحدد مجال الثقة للفرق (و للمجموع) بين متوسطي المجتمعين $\mu_1-\mu_2$ كما يلي :

$$\bar{x}_1-\bar{x}_2 \pm z_c\delta_{\bar{x}_1-\bar{x}_2} = \bar{x}_1-\bar{x}_2 \pm z_c\sqrt{\frac{\delta_1^2}{n_1}+\frac{\delta_2^2}{n_2}}$$

– أما في حالة تباينا المجتمعين متساويين ومجهولين $(\delta_1^2=\delta_2^2)$، فنحسب التباين المشترك S_p^2 أولا حيث يساوي:

$$S_p^2=\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$$

ومنه يصبح مجال الثقة للفرق (و للمجموع) بين متوسطي المجتمعين $\mu_1-\mu_2$ كما يلي:

$$\bar{x}_1-\bar{x}_2 \pm t_{n_1+n_2-2;\frac{\alpha}{2}}(S_p)\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}$$

مثال14: إذا كانت الإحصائيتان هما نسبتان في عينتين مستقلتين، مسحوبتان من مجتمعين غير محدودين :

$$p'_1-p'_2 \ \pm\ z_c\cdot\sigma_{p'_1-p'_2} = p'_1-p'_2 \ \pm\ z_c\cdot\sqrt{\frac{pq_1}{n_1}+\frac{pq_2}{n_2}}$$

3-5- طريقة المعقولية العظمى في التقدير(طريقة الاحتمال الأكبر):

نريد تقدير معلمة α للمجتمع، ولدينا عينة غير نفادية (المتغيرات التي تمثل قيم المحصل عليها في العينة مستقلة) لها نفس التوزيع للمجتمع، إن احتمال تحقق عينة بذاتها مرتبط بقيمة المعلمة المجهولة، هناك قيمة لـ α تعظم احتمال الحصول على العينة المحصل عليها، ونفترض أن تلك القيمة هي الصحيحة بما أن العينة حصلت بالفعل، تتمثل طريقة المعقولية العظمى في البحث عن هذه القيمة، أي البحث عن α التي تعظم $L(\underline{x},\alpha)$.

حيث $L(\underline{x},\alpha)$ ترمز لمعقولية العينة لتوزيع الاحتمال للشعاع العشوائي $(x_1,x_2,x_3,\dots\dots\dots x_n)$.

ملاحظة:

- نستطيع كتابة العبارة $L(\underline{x},\alpha)$ على الشكل التالي: $L(x_1,x_2,x_3,\dots\dots\dots x_n,\alpha)$.
- مقدر المعقولية العظمى ليس بالضرورة غير متحيز وكذلك ليس بالضرورة وحيد.

إن طريقة المعقولية العظمى تهدف إلى اختيار مقدر لـ α وهو $\bar{\alpha}$ وهي القيمة الأكثر معقولية، إن التقدير المتحصل عليه هو القيمة الأكبر احتمالا من أجل القيم الملاحظة للعينة. والتقدير بطريقة المعقولية العظمى يعطى بتعظيم دالة المعقولية حيث:

$$L(x_1,x_2,x_3,\dots\dots\dots x_n,\alpha)=L(\underline{x},\alpha)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i,\alpha)$$

حيث: $f(x,\alpha)$ تمثل توزيع المجتمع.

- ولكي يكون $\bar{\alpha}$ مقدر بطريقة المعقولية العظمى يجب أن يكون حل للمعادلة الآتية:

$$\begin{cases}\dfrac{dL(x_1,x_2,x_3,\dots\dots\dots x_n,\alpha)}{d\alpha}=0\\[2ex] \dfrac{d^2L(x_1,x_2,x_3,\dots\dots\dots x_n,\alpha)}{d\alpha^2}<0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{d\ln L(x_1,x_2,x_3,\dots\dots\dots x_n,\alpha)}{d\alpha}=0\\[2ex] \dfrac{d^2\ln L(x_1,x_2,x_3,\dots\dots\dots x_n,\alpha)}{d\alpha^2}<0\end{cases}$$

مثال15: ليكن x متغير عشوائي يتبع التوزيع ذات دالة الكثافة التالية:

$$f(x,\alpha)=\alpha e^{-\alpha x}$$

- أعطي مقدر $\bar{\alpha}$ لـ α باستعمال طريقة المعقولية العظمى؟

الحل:

لدينا لكي يكون $\bar{\alpha}$ مقدر بطريقة المعقولية العظمى يجب أن يكون حل للمعادلة الآتية:

$$\begin{cases} \dfrac{d \ln L(x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots\ldots\ldots x_n, \alpha)}{d\alpha} = 0 \\ \dfrac{d^2 \ln L(x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots\ldots\ldots x_n, \alpha)}{d\alpha^2} < 0 \end{cases}$$

لدينا دالة المعقولية العظمى تكتب كما يلي:

$$L(x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots\ldots\ldots x_n, \alpha) = L(\underline{x}, \alpha) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \alpha) = \prod_{i=1}^{n} \alpha e^{-\alpha x_i}$$

$$= \alpha^n e^{-\alpha \sum_{i=1}^{n} x_i}$$

$$\ln L(\underline{x}, \alpha) = n \ln \alpha - \alpha \sum_{1}^{n} x_i$$

$$\Rightarrow \frac{d \ln L(\underline{x}, \alpha)}{d\alpha} = \frac{n}{\alpha} - \sum_{1}^{n} x_i$$

$$\frac{d \ln L(\underline{x}, \alpha)}{d\alpha} = 0 \Rightarrow \frac{n}{\hat{\alpha}} - \sum_{1}^{n} x_i = 0$$

ولدينا:

$$\Rightarrow \frac{n}{\hat{\alpha}} = \sum_{1}^{n} x_i \Rightarrow \hat{\alpha} = \frac{n}{\sum_{1}^{n} x_i} = \frac{1}{\overline{x}}$$

$$\frac{d^2 \ln L(\underline{x}, \alpha)}{d\alpha^2} = \frac{-n}{\alpha^2} < 0$$

وبما أن الشرطين محققين فإننا نستنتج أن $\hat{\alpha} = \frac{1}{\overline{x}}$ هو مقدر لـ α.