المحور الأول: نظرية المجموعات

تعد المجموعات من المفاهيم الأساسية في نظرية الاحتمالات والتي يجب على الطالب أن يكون محيط بها لكي يتمكن من فهم المحاور اللاحقة.

I–1– تعريف المجموعة: هي تجمع لعدد من العناصر أو الأعضاء بناء على خصائص مشتركة، أو قد تكون نتائج لتجربة عشوائية، ونرمز للمجموعات بحروف لاتينية كبيرة A, B, C......Z مثل:

- نتائج رمي زهرة نرد $A = \{1.2.3.4.5.6\}$
- مجموعة الأعداد الزوجية B = {2, 4, 6, 8, ... 2n...}
- طلبة السنة الأولى جدع مشترك المرقمين من 1 إلى n $C = \{1.2.3...\text{n}\}$

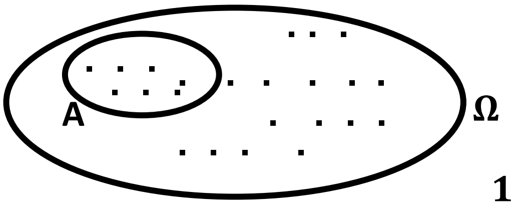
1–2– أنواع المجموعات: يمكن تقسيم المجموعات إلى ما يلي:

1–2–1– المجموعة الفارغة (خالية): وهي المجموعة التي لا تحتوي على أي عناصر تتمتع بالخاصية المعنية ونرمز لها بالرمز ∅ ونكتب: A={ } أو A=∅

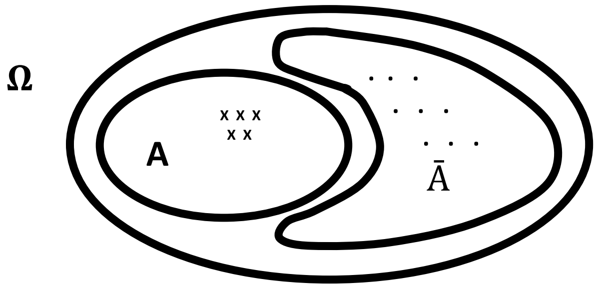
1–2–2– المجموعة الكلية: هي المجموعة التي تحتوي على كافة العناصر ويرمز لها بالرمز **Ω** ومن خلال هذه المجموعة يمكننا تشكيل مجموعات جزئية.

1–2–3– **المجموعة الجزئية:** هي مجموعات يمكن تشكيلها من المجموعة الكلية بما في ذلك المجموعة الفارغة وذلك بناء على خصائص أو خاصية مشتركة، وتقول المجموعة الجزئية A محتواه في Ω ونكتب: **A ϵ Ω**

ويمكن أن نمثل كل من المجموعة الكلية والمجموعة الجزئية في شكل الآتي:



1-2-4- المجموعة المكملة (المتممة): إذا كانت A مجموعة جزئية من Ω وكانت هناك عناصر تنتمي إلى Ω ولا تنتمي إلى A نطلق على المجموعة التي تحتوي على هذه العناصر بـ المجموعة المكملة ونرمز لها بالرمز $\bar{A}$. كما هو موضح في الشكل الموالي:



حيث:

$$1)\ A \cap \bar{A} = \emptyset$$

$$2)\ A \cup \bar{A} = \Omega$$

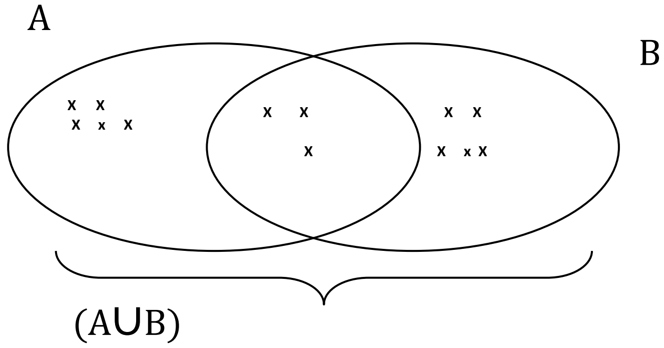
$$3)\ \bar{A} = \Omega - A$$

1-3- العمليات على المجموعات: تخضع المجموعات إلى مجموعة من العمليات أهمها:

1-3-1- إتحاد المجموعات: مجموعة العناصر التي تنتمي على الأقل إلى إحدى المجموعتين A أو B دون تكرار العناصر ونكتب:

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ أو } x \in B\}$$

والشكل الموالي يوضح أكثر



والمثال التالي يوضح

$$A = \{2, 3, 4, 5\}$$

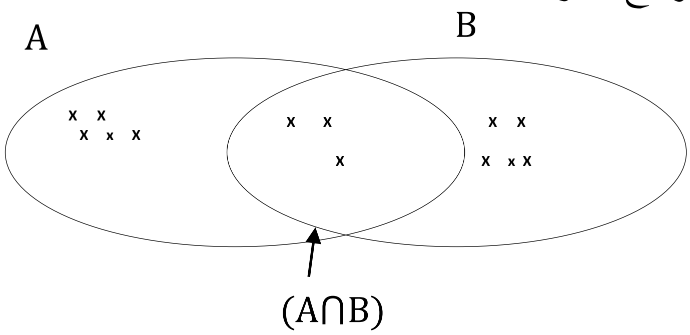
$$B = \{1, 4, 5, 8, 9, 10\}$$

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10\}$$

1-3-2- تقاطع المجموعات: هو مجموعة العناصر التي تنتمي إلى المجموعتين A وB في نفس الوقت ونكتب:

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ و } x \in B\}$$

والشكل الموالي يوضح أكثر:



والمثال التالي يوضح

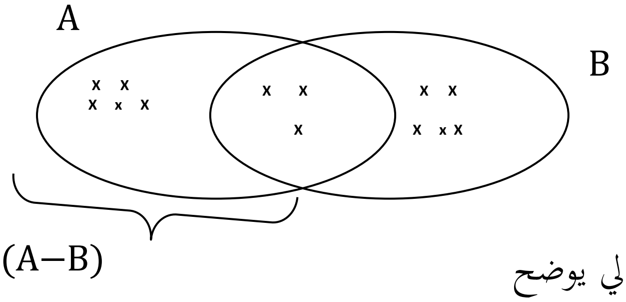
$$A = \{2, 3, 4, 5\}$$

$$B = \{1, 4, 5, 8, 9, 10\}$$

$$A \cap B = \{4, 5\}$$

1-3-3- الفرق بين مجموعتين: هو مجموع العناصر التي تنتمي إلى مجموعة A ولا تنتمي إلى B ونكتب:

$$A - B = \{x : x \in A \text{ و } x \notin B\}$$



والمثال التالي يوضح

$$A = \{2, 3, 4, 5\}$$

$$B = \{1, 4, 5, 8, 9, 10\}$$

$$A-B = \{2, 3\}$$

1-4- قوانين المجموعات: إذا كانت لدينا المجموعات A, B, C والمجموعة Ω هي المجموعة الكلية، نجد ما يلي:

1) $A\cup B = B\cup A$ (الإتحاد تبديلي)

2) $A\cap B = B\cap A$ (التقاطع تبديلي)

3) $A\cup (B \cup C)= (A \cup B) \cup C=A \cup B \cup C$ (الإتحاد تجميعي)

4) $A\cap (B\cap C) = (A\cap B) \cap C = A\cap B\cap C$ (التقاطع تجميعي)

5) $A\cap(B\cup C) = (A\cap B) \cup(A\cap C)$ (قانون التوزيع الأول)

6) $A \cup(B \cap C) = (A\cup B) \cap (A\cup C)$ (قانون التوزيع الثاني)

7) $(A-B)= A-(A\cap B) = A \cap \bar{B}$

8) $(B-A)= B-(A\cap B) = \bar{A} \cap B$

9) $A \subset B$ و $B \subset C \Longrightarrow A \subset C$

10) $A\cup\varnothing= A$و $A\cap\varnothing=\varnothing$

11) $A\cup \Omega= \Omega$و $A\cap \Omega=A$

12) $A\cup \bar{A}= \Omega$و $A\cap \bar{A}=\varnothing$

13) $(\overline{A \cup B}) = (\bar{A} \cap \bar{B})$ و $(\overline{A \cap B}) = (\bar{A} \cup \bar{B})$ (قانون مورغان)

14) $A = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$

15) $(A \cup B) = (A-B) \cup (B-A) \cup (A \cap B)$

المحور الثاني: مفاهيم نظرية حول التجربة والحدث: التجربة العشوائية فراغ العينة، الحدث

كي نتمكن من عرض أسس ونظريات وقواعد علم الاحتمال يجب أولا تقديم بعض المفاهيم (التعاريف) التي تستخدم في هذا المجال.

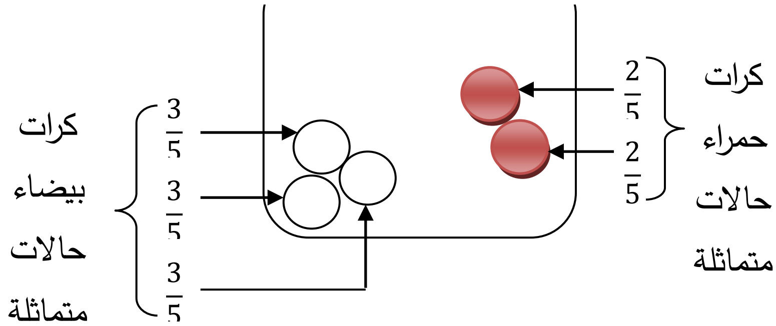
2-1- التجربة والحادث وفراغ العينة: إذا افترضنا أننا نقوم بإجراء عملية ما كرمي زهرة النرد مثلا، حيث نلاحظ كل النتائج الممكنة وهي ظهور أحد الأوجه الستة { 1 أو 2 أو 3 أو 4 أو 5 أو 6}، ونفرض أننا نهتم بظهور رقم فردي أي {1 أو 3 أو 5} من هذه العملية وهكذا، فإن عملية رمي زهرة النرد تسمى تجربة عشوائية، وظهور الرقم الفردي الذي هو محل اهتمامنا يسمى حادث، وجميع الحالات الممكنة الظهور تسمى بفراغ العينة أو فراغ الإمكانات أو نتائج التجربة.

ملاحظة: الحادث قد يكون حالة واحدة أو أكثر من فراغ الإمكانات.

2-2- الحالات الممكنة: هي جميع النتائج المختلفة التي يمكن أن تظهر من إجراء تجربة عشوائية معينة. فمثلا عند رمي قطعة نقود تكون نتيجتها حالتين ممكنتين هما ظهور الصورة أو الكتابة، وعند رمي زهرة النرد تكون نتيجتها ستة حالات ممكنة هي ظهور الرقم {1 أو 2 أو 3 أو 4 أو 5 أو 6}.

2-3- الحالات الملائمة: هي نتائج من فراغ الإمكانات التي تؤدي إلى تحقيق الحادث الذي هو موضوع اهتمامنا، فإذا كان الحادث هو الحصول على رقم فردي عند رمي زهرة النرد، فإن الحالات الملائمة التي تحقق هذا الحادث هي الحصول على الرقم {1 أو 3 أو 5}.

2-4- الحالات المتماثلة: إذا كان لدينا مثلا كرات معدنية متجانسة في كل شيء (في اللون، الحجم، الشكل، الوزن)، ووضعنا في كيس ثم سحبنا كرة منها بعد خلطها جيدا، فإن هذه الكرات تُكوِّن حالات متماثلة أي يكون لكل منها نفس الاحتمال في الاختيار، أنظر الشكل الموالي:



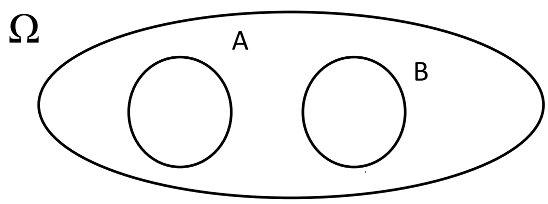
2–5– الحوادث الأكيدة: هي حوادث لابد من وقوعها أو حدوثها، فمثلا إذا ألقيت حجر في الهواء فإنه لابد وأن يسقط على الأرض، وإذا كان الحادث مؤكد فإن احتمال وقوعه هو 1، ونرمز للحادث الأكيد بالرمز (Ω).

2–6– الحوادث المستحيلة: هي حوادث يستحيل وقوعها أو حدوثها، فمثلا سحب كرة حمراء من صندوق لا يحتوي إلا على كرات بيضاء، وإذا كان الحادث مستحيل فإن احتمال وقوعه هو 0، ونرمز لحادث المستحيل بالرمز $(\varnothing)$.

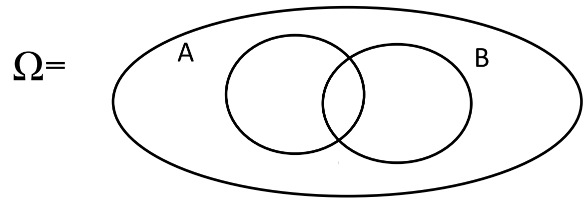
2–7– الحوادث المحتملة (الممكنة): هي نتائج التجارب العشوائية التي لا نستطيع التنبؤ بوقوعها مسبقا، ولكن نستطيع باستخدام قواعد الاحتمالات أن نحسب (نقيس) احتمال وقوعها، وإذا كان الحادث ممكن فإن احتمال وقوعه ينحصر بين $[0-1]$.

2–8– الحوادث المتنافية وغير المتنافية:

أ- **الحوادث المتنافية:** هي تلك الحوادث التي لا يمكن وقوعها في آن واحد حيث وقوع أحدها يمنع وقوع الآخر، وهذا يعني عدم وجود إمكانيات مشتركة للإمكانيات المكونة لكل حادث.



ب-**الحوادث غير المتنافية** (غير مانعة): فهي عكس ما سبق.



2-9- الحوادث المستقلة وغير المستقلة والشرطية:

أ- الحوادث المستقلة: نقول عن حوادث أنها مستقلة إذا كان وقوع إحداها لا يؤثر ولا يتأثر بوقوع الحادث الآخر، فمثلا نتائج عدة رميات متعاقبة لقطعة نرد حوادث مستقلة، حيث ظهور رقم معين في إحدى الرميات مستقل تماما عن حادث ظهور رقم معين في الرمية الموالية.

ب- الحوادث غير المستقلة: نقول عن حوادث أنها غير مستقلة إذا كان وقوع حادث ما يؤثر في احتمال وقوع أو عدم وقوع حادث آخر، وهذا النوع من الحوادث نجده بصورة أساسية عندما نكون بصدد السحب من مجتمع محدود وصغير مع عدم الإعادة، وبالتالي فالسحبة الموالية تتأثر بنتيجة السحبة السابقة.

ج-الحوادث الشرطية: نقول عن حادث أنه شرطي إذا كان وقوع هذا الحادث مرتبط بتحقيق أو عدم تحقيق حادث آخر، فمثلا صندوق به ثلاثة أكياس كيس به كرات بيضاء وآخر كرات حمراء وآخر كرات صفراء، نريد سحب كرة بيضاء فهذا الحادث مرتبط بحادث سحب الكيس الذي به كرات بيضاء. (حدوث A مشروط بحدوث B)

المحور الثالث: التحليل التوفيقي: طرق التباديل، طرق التراتيب، طرق التوافيق

كثيرا ما تهتم في مجال الدراسات الاقتصادية والاجتماعية بعملية تكوين مجموعات جزئية من مجموعات أصلية وفق شروط مفترضة، كالاهتمام بطبيعة الأشياء أو العناصر وترتيبها في الوقت نفسه. كما يمكن أن تختلف الحالات عن بعضها بافتراض عدم إمكانية تكرار العناصر في المجموعات الجزئية، أو إمكانية تكراراها ويساعدنا في دراسة ذلك ما يسمى بالتحليل التوفيقي.

يهتم التحليل التوفيق بإعطاء عدد الطرق الممكنة للمجموعات ضمن شروط معينة من خلال بعض القواعد الرياضية التي تسهل هذا التكوين من جهة ويتمكن من دراسة المجموعات المنتهية من خلال تبسيط العد بها واستنباط طرق أكثر فعالية لحساب عدد الحالات الممكنة وعدد الحالات الملائمة المرتبطة بذلك الحادث من جهة أخرى، وبالتالي يصبح حساب الاحتمالات من أهم التطبيقات العملية للتحليل التوفيقي. لهذا تتجلى ضرورة عرض تلك القواعد الرياضية للاستفادة منها عند التطرق لموضوع الاحتمال وقوانينه.

سنحاول في هذا المحور تناول الموضوعات التالية:

- التباديل؛ التراتيب؛ التوافيق.

وقبل التطرق إلى هذه الموضوعات، لابد من الإشارة إلى نقطة أساسية تشكل المرتكز الحقيقي للتحليل التوفيقي، هي قاعدة الضرب وقاعدة الجمع أو ما يسمى بالمبدأ الأساسي للعد.

3-1- القواعد الأساسية لطرق العد

هناك قاعدتان أساسيتان لطرق العد هما: قاعدة الضرب وقاعدة الجمع، نلخصهما فيما يلي:

3-1-1- قاعدة الضرب (ضرب الخيارات)

إذا كان هناك عملية أو تجربة عشوائية ما مكونة من عدد مقداره K من المراحل بحيث:

- المرحلة الأولى تتم بعدد قدره n_1 من الطرق المختلفة (الخيارات الممكنة)
- المرحلة الثانية تتم بعدد قدره n_2 من الطرق المختلفة
- .... وهكذا
- المرحلة الأخيرة K تتم بعدد قدره n_k من الطرق المختلفة؛

فإن العملية ككل يمكن إجراؤها بعدد من الطرق الممكنة كما يلي:

$n= n_1 \times n_2 \times \ldots\ldots. \times n_k$ (النتائج التي يمكن أن تحدث)

مثال:

بكم طريقة يمكن أن يختار أحد الطلاب ثلاثة مقررات: الأول في مقياس الإحصاء والثاني في الرياضيات والثالث في المحاسبة إذا علمت أن هناك ثلاثة مقررات مختلفة للإحصاء ومقررين مختلفين في الرياضيات ومقررين مختلفين في المحاسبة؟

الحل: العملية هي اختيار ثلاثة مقررات وهي تمر بثلاث مراحل:

- المرحلة الأولى اختيار مقرر الإحصاء وعدد الخيارات الممكنة لهذه المرحلة هو : $n_1 = 3$
- المرحلة الثانية اختيار مقرر الرياضيات وعدد الخيارات الممكنة لهذه المرحلة هو : $n_2= 2$
- المرحلة الثالثة اختيار مقرر المحاسبة وعدد الخيارات الممكنة لهذه المرحلة هو : $n_3 = 2$

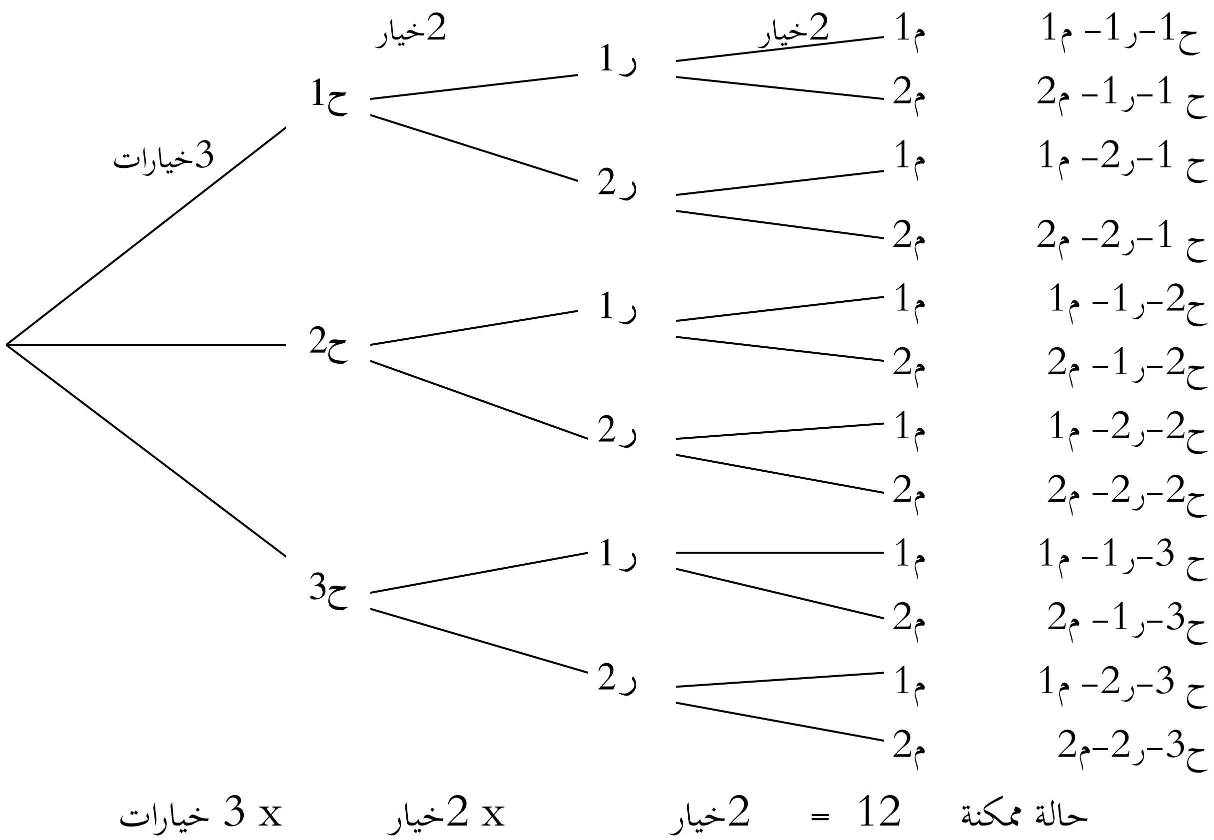
وباستخدام قاعدة الضرب الخيارات يكون:

$$n= n_1 \times n_2 \times n_3$$

$n=3 \times 2 \times 2 =12$ طريقة ممكنة

ومنه عدد الطرق الممكنة لاختيار مقرر من بين المقررات المقدمة هو 12 طريقة ممكنة.

ويمكن توضيح الطرق الممكنة باستخدام ما يسمى بشجرة الإمكانات (الشجرة البيانية) كما يلي:



ملاحظة: في عملية الضرب يتم إجراء جميع المراحل معا لإتمام العملية.

3-1-2- قاعدة الجمع (قاعدة جمع الخيارات)

إذا كان هناك عملية أو تجربة مكونة من عدد مقداره K من المراحل بحيث

- المرحلة الأولى تتم بعدد قدره n_1 من الطرق المختلفة؛
- المرحلة الثانية تتم بعدد قدره n_2 من الطرق المختلفة؛
- .... وهكذا

المرحلة الأخيرة K تتم بعدد قدره n_k من الطرق المختلفة؛

فإن عدد الطرق المختلفة لإجراء عملية واحدة فقط من هذه العمليات المتنافية هو:

$$n = n_1 + n_2 + \ldots\ldots + n_k$$

مثال:

من معطيات المثال السابق بكم طريقة يمكن أن يختار أحد الطلاب مقررا واحدا فقط من الإحصاء **أو** الرياضيات **أو** المحاسبة؟

الحل:

العملية هي اختيار مقرر واحد فقط (بتالي إما تحقق المرحلة1 أو المرحلة 2 أو المرحلة 3):

- المرحلة الأولى اختيار مقرر الإحصاء وعدد طرق هذه المرحلة هو: $n_1 = 3$
- المرحلة الثانية اختيار مقرر الرياضيات وعدد طرق هذه المرحلة هو: $n_2 = 2$
- المرحلة الثانية اختيار مقرر المحاسبة وعدد طرق هذه المرحلة هو: $n_3 = 2$

وباستخدام قاعدة الجمع يكون:

$$n = n_1 + n_2 + n_3$$

$$n = 3 + 2 + 2 = 7$$

ومنه عدد الطرق الكلية لاختيار مقرر واحد من بين المقررات المقدمة هو 07 طرق.

ملاحظة: في قاعدة الجمع تكون العمليات (المراحل) متنافية أي إجراء إحدى العمليات ينفي أو يمنع إجراء العمليات الأخرى.

3-2- التبديلات: نقصد بها تبديل مواقع العناصر في المجموعة ككل وتنقسم إلى قسمين هما:

3-2-1- التبديلة بدون تكرار العناصر: عندما نكون أمام مجموعة من العناصر (n) وكلها مختلفة عن بعضها البعض، يسمى وضع هذه العناصر في ترتيب معين بالتبديلة بدون تكرار، ونرمز لها بالرمز (Pn) حيث: $\mathbf{Pn} = \mathbf{n}! = n \times n-1 \times n-2 \times \ldots 1$.

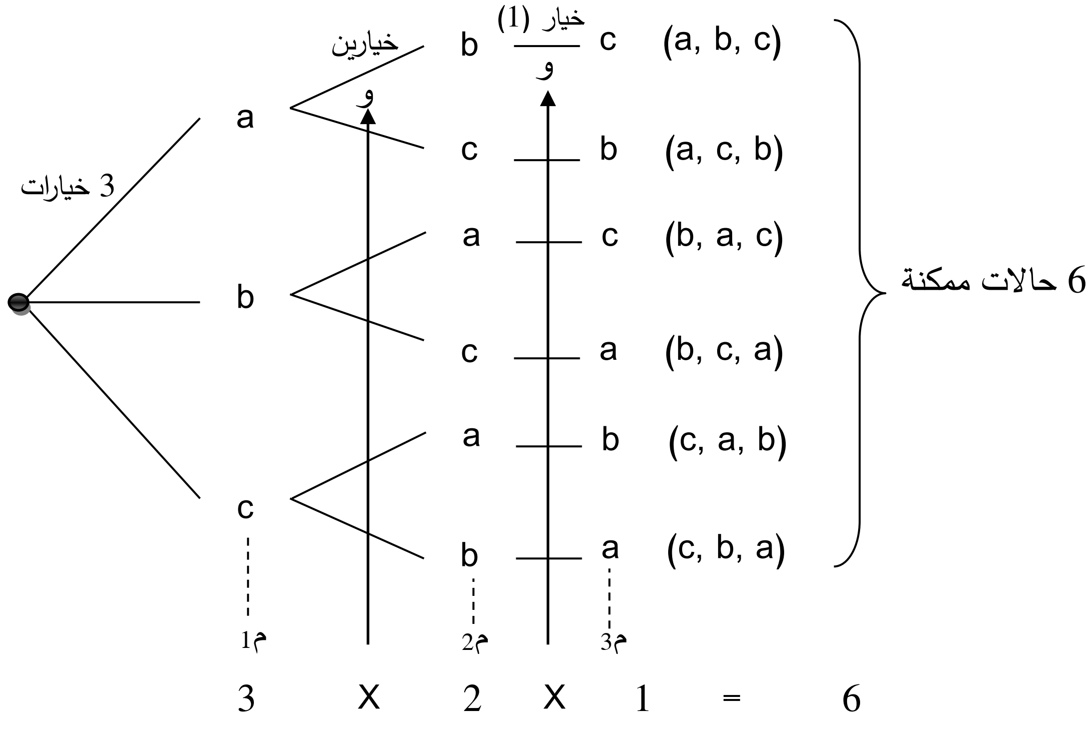
مثال: لتكن المجموعة التالية المكونة من ثلاثة عناصر كلها مختلفة $\Omega = \{a, b, c\}$

المطلوب: ما هي التبديلات (Pn) التي يمكن الحصول عليها من تبديل مواقع العناصر بين الموقع الأول و الثاني و الثالث؟

حل المثال: لدينا ثلاثة عناصر مختلفة **n=3** كلها مختلفة وعليه التبديلات هي:

$$\text{Pn} = n! \Rightarrow P_3 = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$ تبديلات (حالات ممكنة)

وفي هذه الحالة حيث عدد العناصر n قليل يمكن استعمال شجرة الإمكانات كما يلي:



وبصفة عامة إذا كان لدينا (n) عنصر مختلف يمكن ترتيبها بـ $Pn = (n!)$

3-2-2- التبديلة بتكرار العناصر: عندما تكون لدينا مجموعة من العناصر(n) ليست كلها مختلفة بل توجد بعض العناصر متماثلة (متكررة) مثل تكرار الحروف في الأسماء (ليبيا، جرجرة...) أو تكرار الأعداد (4294221، 3362136).

في هذه الحالة التبديلات المختلفة لـ n عنصر هي:

$$\mathbf{P}_{n}^{n_1\text{،}\mathbf{n_2.....n_k}} = \frac{\mathbf{n!}}{\mathbf{n_1!.\,n_2!\;...\;n_k!}}$$

حيث: $\mathbf{n_1!.\,n_2!\;...\;n_k!}$: هي عدد تكرارات كل عنصر.

K : هو عدد العناصر بدون أخذ التكرار بعين الاعتبار

مثال: لنحسب عدد التبديلات المختلفة التي يمكن تكوينها من كلمة جرجرة.

حل المثال: Ω= {ج، ر، ج، ر، ة} توجد 5 عناصر (n=5)، ولكنها غير مختلفة كلها، حيث تكرار كل عنصر هو:

ج: يتكرر مرتين $n_1=2$ ر: يتكرر مرتين $n_2=2$ ة: تتكرر مرة واحدة $n_3=1$ و $K=3$

وعليه التبديلات المختلفة هي:

$$\mathrm{P}_{n}^{n_1\text{،}n_2\text{،}n_3} = \frac{n!}{n_1!.n_2!.n_3!} = \mathrm{P}_{5}^{2\text{،}2\text{،}1} = \frac{5!}{2!.2!.1!} = \frac{5\times4\times3.2}{2.2.1} = 30$$

أي هناك 30 طريقة ممكنة لتكوين كلمة من الحروف الخمسة السابقة (يمكن تكوين بعض الكلمات ليست لها معنى).

3-2-3- حالة خاصة عن التبديلة وهي التبديلة الدائرية:

إذا كنا بصدد تبديل مجموعة ما في وضعية دائرية فإن عدد الطرق المختلفة والمقابلة لذلك هي:

$$P_n = (n-1)!$$

مثال: بكم طريقة يمكن لعائلة تتكون من 5 أفراد (5 إخوة) أن يجلسوا حول طاولة مستديرة لتناول وجبة الفطور؟

حل المثال: بما أن وضعية الكراسي تأخذ الشكل الدائري تماشيا مع هندسة الطاولة فإن هذا يعني أنه يمكن لأخ (لفرد) واحد أن يجلس في أي مكان حول الطاولة ويمكن للأخوة (أفراد العائلة) الآخرين أن يرتبوا أنفسهم حول الطاولة بطرق مختلفة عددها:

$$P_n = (n-1)! \longrightarrow P_n = (5-1)! = 4! = 4\times3\times2\times1 = 24$$ (طريقة ممكنة)

3-3- التراتيب: عندما نسحب k عنصر من مجموعة n عنصر حيث: $k < n$ ونأخذ بعين الاعتبار موقع (ترتيب العناصر في المجموعة المسحوبة) (العنصر المسحوب) نكون أمام التراتيب، ولدينا نوعين من التراتيب هي:

3-3-1- التراتيب بدون تكرار: أي السحب بدون إعادة العنصر، نرمز لها بالرمز: A_n^k

حيث: K: عدد السحبات بدون إعادة العنصر (عدد عناصر المجموعة الجزئية)

n: عدد العناصر الكلية (Ω)،

وتعطى بالصيغة التالية:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

مثال: لتكن لدينا مجموعة كلية مكونة من أربعة أحرف: $\Omega = \{a, b, c, d\}$

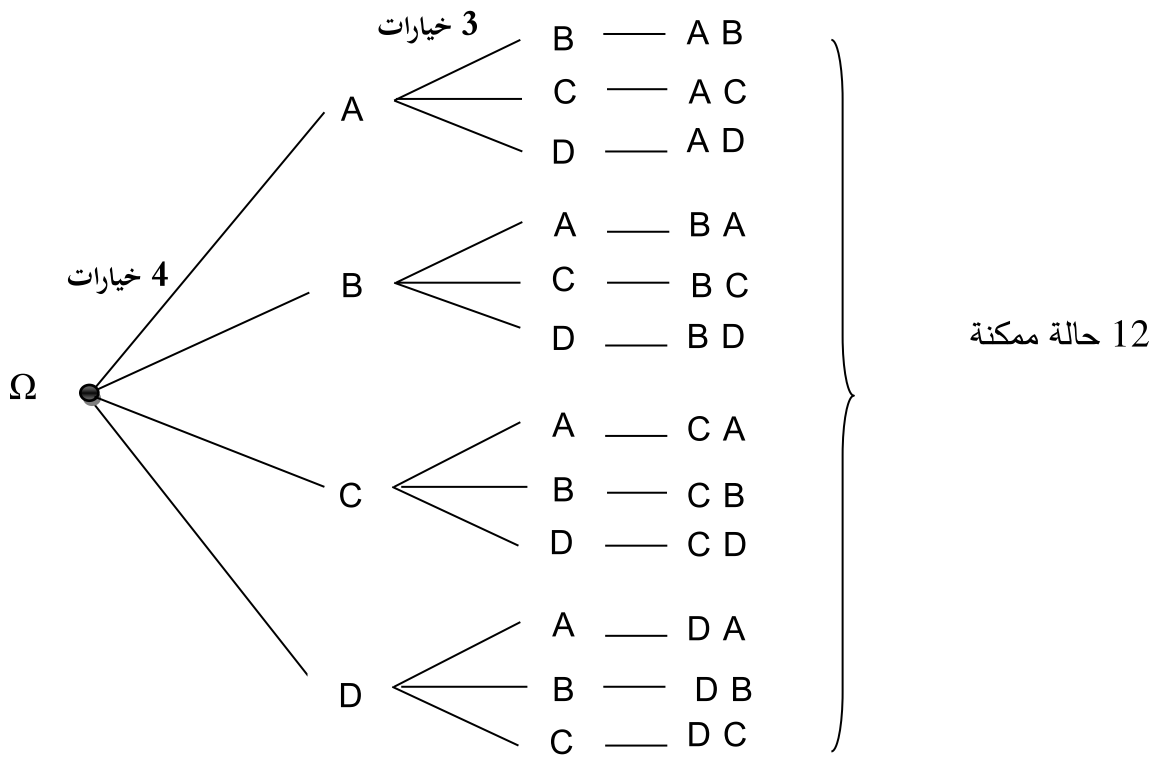
نريد تشكيل مجموعة جزئية تتكون من عنصرين، مع الأخذ بعين الاعتبار موقع العنصر، حيث السحب بدون إعادة.

المطلوب: بكم طريقة يمكن تكوين هذه المجموعة الجزئية؟

حل المثال:

$$A_n^k = A_4^2 = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2!} = 12$$ طريقة ممكنة

يمكن تكوين المجموعة الجزئية من خلال أيضا شجرة الإمكانات كما يلي:



4 خيارات X 3 خيارات = 12

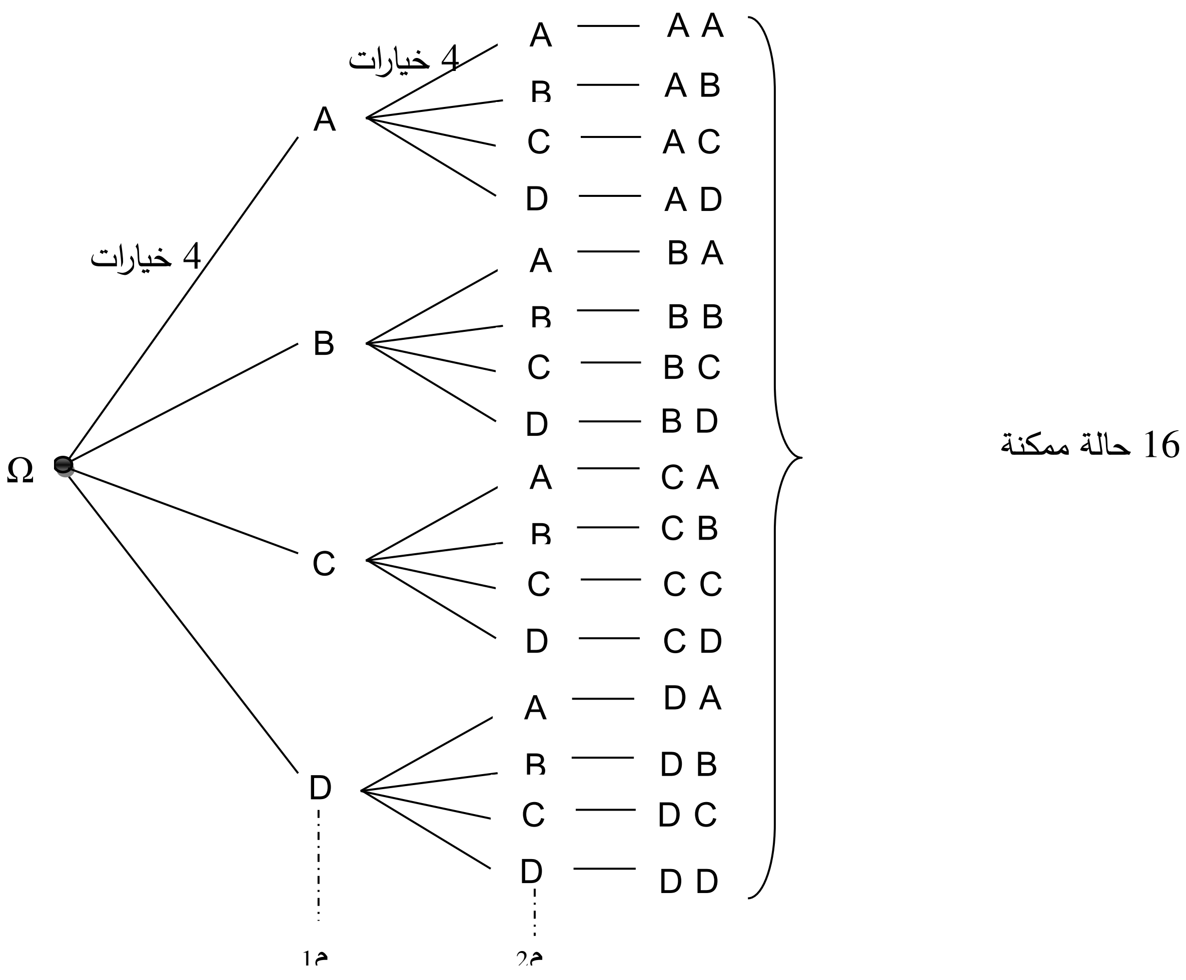
3-3-2- التراتيب بالتكرار: (بإعادة العنصر المسحوب) بمعنى أن عناك إمكانية أن يظهر العنصر المسحوب أكثر من مرة (بعدد مرات السحب)، في هذه الحالة نرمز لها بالرمز rA_n^k وتعطى بالصيغة التالية:

r: السحب بالإعادة / $\mathbf{rA_n^k = n^k}$

مثال: نفس المثال السابق ولكن السحب يكون بالإعادة:

$$rA_n^k = rA_4^2 = 4^2 = 4 \times 4 = 16 \qquad \text{(حالة ممكنة)}$$

ويمكن تكوين المجموعة الجزئية من خلال أيضا شجرة الإمكانات كما يلي:



4 خيارات X 4 خيارات = 16

3-4- التوفيقات: عندما نسحب K عنصر من مجموعة n عنصر حيث: $k < n$ ، ولا نأخذ بعين الاعتبار موقع العناصر في المجموعة الجزئية، المهم العناصر المكونة للمجموعة الجزئية تظهر مرة واحدة، ولدينا نوعين من التوفيقات هما:

3-4-1- التوفيقات بدون إعادة: ونرمز لها بالرمز $\mathbf{C}_n^k$ وتعطى بالصيغة الآتية:

K: عدد العناصر المسحوبة

n: عدد عناصر المجموعة الكلية

$$\mathbf{C}_n^k = \frac{\mathbf{n}!}{\mathbf{k}!(\mathbf{n}-\mathbf{k})!}$$

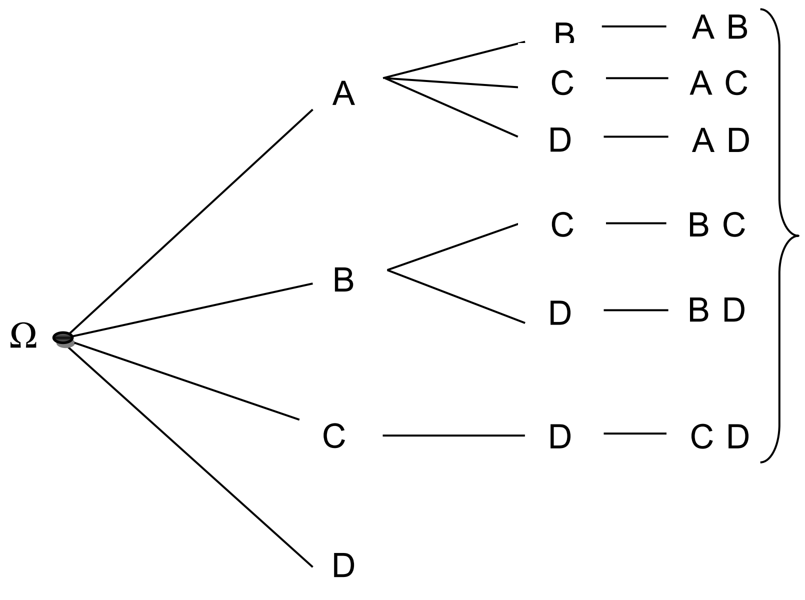
مثال: نفس المثال المعطى في التراتيب ولكن الآن لا نأخذ بعين الاعتبار موقع (ترتيب) العنصر في المجموعة الجزئية، والسحب بدون إعادة.

حل المثال:

$$\mathbf{C}_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{4!}{2!\,(2)!} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2!\,.2!} = \frac{12}{2}$$

$= 6$ حالات ممكنة

ويمكن تكوين المجموعة الجزئية من خلال أيضا شجرة الإمكانات التالية:



6 حالات ممكنة

<u>ملاحظة:</u> المثال الخاص بالتوفيقة بدون إعادة: نستبعد أخذ بعين الاعتبار ترتيب العنصر(نأخذ ظهور المجموعة مرة واحدة فقط).

{ (A B) ، (B A) }

3-3-2- التوفيقات مع الإعادة: يمكن أن يظهر العنصر بعدد مرات السحب.

نرمز لها بالرمز C_{n+k-1}^k أو K_n^k وتعطى حسب الصيغة الآتية:

$$\mathbf{K}_{n}^{k} = \mathbf{C}_{n+k-1}^{k} = \frac{(\mathbf{n}+\mathbf{k}-\mathbf{1})!}{\mathbf{k}!\,(\mathbf{n}-\mathbf{1})!}$$

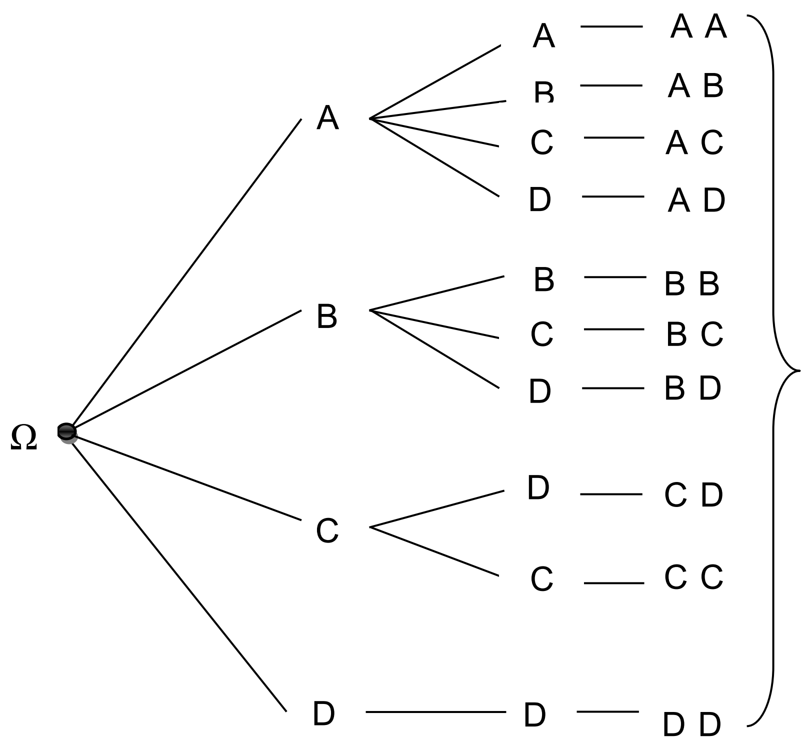
مثال: نفس المثال السابق ولكن السحب بالإعادة.

حل المثال:

$$\mathrm{K}_{4}^{2} = \mathrm{C}_{4+2-1}^{2} = \frac{(4+2-1)!}{2!\,(4-1)!} = \frac{5!}{2!\,3!} = \frac{5\times4\times3!}{2\times3!}$$

$$\mathrm{C}_{5}^{2} = \frac{20}{2} = 10$$ (حالات ممكنة)

ويمكن تكوين المجموعة الجزئية من خلال أيضا شجرة الإمكانات التالية:



10 حالة ممكنة

نستبعد ظهور المجموعة الجزئية مرتين أي:

{ ~~(A B)~~ أو (B A) }

❖ **بعض خصائص التحليل التوفيقي**:

- $\mathrm{C}_{n}^{k} = \mathrm{C}_{n}^{\mathrm{n}-k}$
- $\mathrm{C}_{n}^{0} = 1 \quad / \mathrm{A}_{n}^{0} = 1$
- $\mathrm{C}_{n}^{n} = \mathrm{C}_{n}^{0} = 1$

- $C_n^1 = n \quad / A_n^1 = n$
- $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$