4) توزيع كاي مربع χ^2 chi_carré Loi du Khi_deux

توزيع كاي مربع χ^2_v بدرجة حرية $v = n$ ، هو توزيع احتمالي لمجموع n متغيرات عشوائية طبيعية كل منها مرفوع للقوة 2 .

إذا كانت : $Z_1 , Z_2 , \ldots\ldots , Z_n$

متغيرات عشوائية مستقلة لها توزيع طبيعي معياري : $Z_i \sim N(0,1)$ $i = 1, 2 \ldots n$

فإن المتغيرة العشوائية :

$$\chi^2 = Z_1^2 + Z_2^2 + \ldots\ldots + Z_n^2$$

هي متغيرة كاي مربع χ^2_v

بدرجة حرية $v = n$ عدد المتغيرات المستقلة المكونة لها :

$$\chi^2 \sim \chi^2_v \qquad \chi^2 \geq 0$$

متغيرة كاي مربع χ^2 ، هي متغيرة مستمرة تأخذ قيم حقيقية غير سالبة .

التوقع الرياضي :

$$\mu = E(x^2) = \nu$$

التباين :

$$\sigma^2 = V(x^2) = 2\nu$$

تجميع توزيع كاي مربع χ^2 :

لدينا y و y' متغيرين مستقلين لهما توزيع χ^2 :

$$y \sim \chi^2_{v}$$
$$y' \sim \chi^2_{v'}$$

المتغيرة : $X^2 = y + y'$

هي متغيرة χ^2 بدرجة حرية $v + v'$

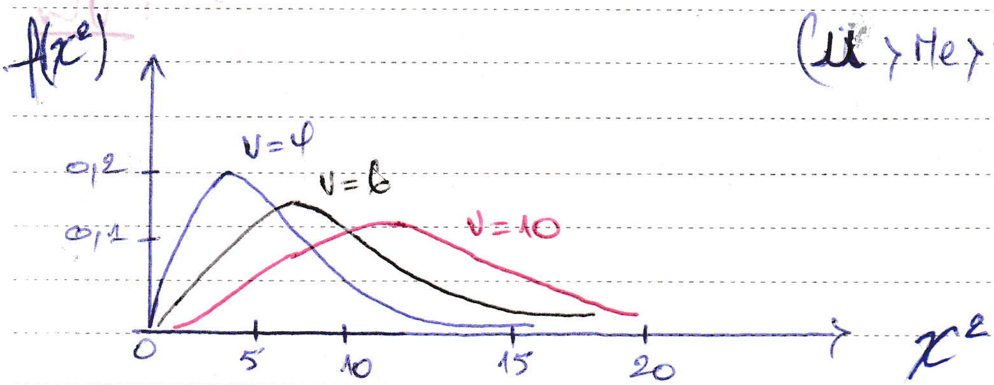
$$X^2 \sim \chi^2_{v+v'}$$

ملاحظة : $\chi^2 = y + y' - y''$

التمثيل البياني :

المنحنى الممثل لمتغيرة χ^2 ليس متناظر ، موجب الالتواء

ذيله الأيمن أطول $(\mu > Me > Mo)$



عندما تزداد v المنحنى ينتقل نحو اليمين و يقترب من الطبيعي .

متغيرة كاي مربع χ^2

إستعمال الجدول :

نستعمل جدول يعطي إحتمالات مراكمية من الشكل $(\chi^2 \leq \chi^2_v)$

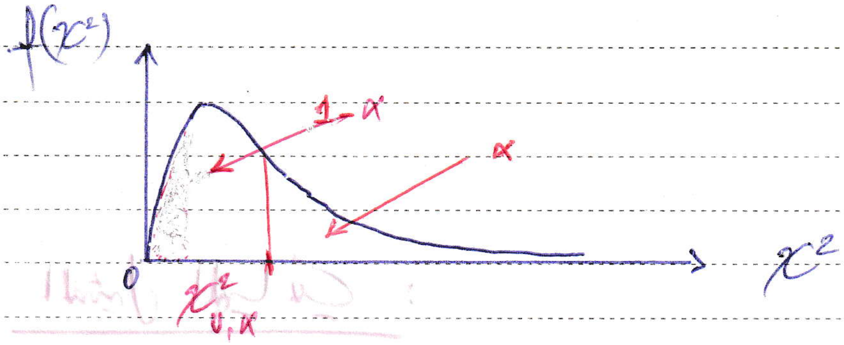
يستخدم الرمز $\chi^2_{v,\alpha}$ للتعبير عن قيمة خاصة

للمتغيرة χ^2 بحيث أن الاحتمال : $Pr(\chi^2 \leq \chi^2_{v,\alpha}) = 1-\alpha$

بدرجة حرية v

$\chi^2_{v\ 1-\alpha}$

$\chi^2_{v\ \alpha\%}$



مثال :

$\chi^2_{20\ .\ 0,95} = 31,42$

$\chi^2_{20}\ 5\% = 31,42$

الاحتمال $Pr(\chi^2 \leq 31,42) = 0,95$ بدرجة حرية 20

$\chi^2_{24\ .\ 0,95} = 36,42$

$\chi^2_{24}\ 5\% = 36,42$

الاحتمال $Pr(\chi^2 \leq 36,42) = 0,95$ بدرجة حرية 24

5) توزيع ستودنت — La distribution student t

توزيع ستودنت t_v بدرجة حرية v ، توزيع إحصائي محدد على توزيع طبيعي وتوزيع كاي مربع بدرجة حرية v .

إذا كان :

Z متغير طبيعي معياري : $Z \sim N(0,1)$

و X^2 متغيرة كاي مربع بـ v درجة حرية : $X^2 \sim \chi^2_v$

وكان Z و X^2 مستقلتين ،

فإن المتغيرة العشوائية :

$$t = \frac{Z}{\sqrt{X^2/v}}$$

هي متغيرة ستودنت بدرجة حرية v ، نفس درجة حرية كاي مربع :

$$t \sim t_v$$

$$t \in]-\infty, +\infty[$$

متغيرة ستودنت t_v هي متغيرة مستمرة تأخذ قيم حقيقية موجبة أو سالبة .

التوقع الرياضي :

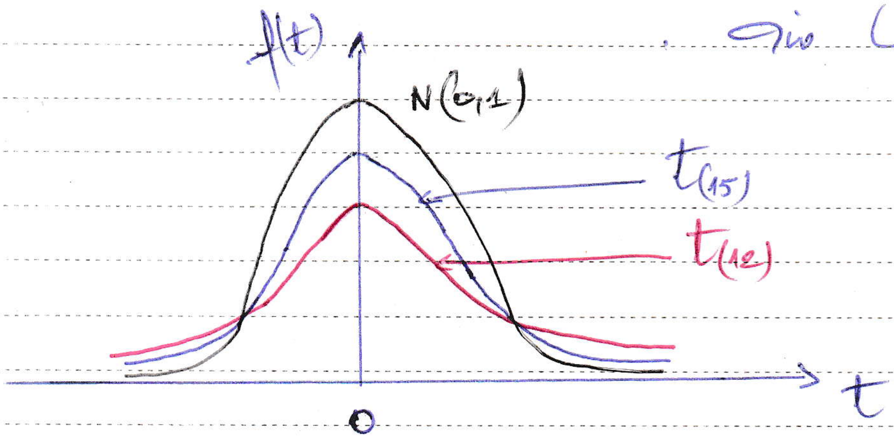
$$\mu = E(t) = 0$$

التباين :

$$\sigma^2 = V(t) = \frac{v}{v-2} \quad , \quad v > 2$$

التمثيل البياني :

المنحنى الممثل لدالة كثافة متغيرة t ، منحنى على شكل جرس ، متناظر بالنسبة لـ 0 ، مثل المنحنى الطبيعي المعياري لكن أكثر تفلطحا منه .



عندما تزداد v المنحنى يتطاول ويقترب من الطبيعي .

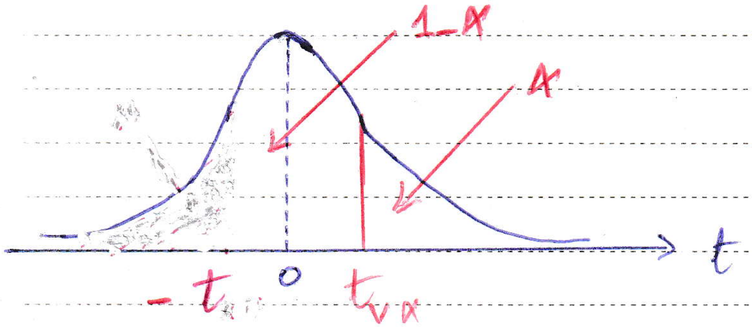
استعمال الجدول :

نستعمل جدول يعطي احتمالات تراكمية من الشكل $(t < t_v)$

نستخدم الرمز $t_{\alpha v}$ للقيمة خاصة لمتغيرة t

بحيث أن الاحتمال : $P_r(t < t_{\alpha v}) = 1-\alpha$

بدرجة حرية v



مثال :

مثال :

$Pr(t \leq 1{,}725) = 0{,}95$ $\qquad$ $t_{20\ 5\%} = 1{,}725$

$Pr(t \leq 2{,}086) = 0{,}975$ $\qquad$ $t_{20\ 2{,}5\%} = 2{,}086$

$Pr(t \leq 2{,}492) = 0{,}99$ $\qquad$ $t_{24\ 1\%} = 2{,}492$

6) توزيع فيشر F La distribution de Fisher

توزيع فيشر $F(v_1 , v_2)$ بدرجتي حرية v_1 ، v_2

توزيع إحتمالي يعتمد على توزيع كاي مربع .

إذا كانت متغيرات مستقلين :

χ_1^2 متغيرة كي مربع بدرجة حرية v_1

$$\chi_1^2 \sim \chi^2_{v_1}$$

χ_2^2 متغيرة كي مربع بدرجة حرية v_2

$$\chi_2^2 \sim \chi^2_{v_2}$$

فإن المتغيرة العشوائية :

$$F = \frac{\chi_1^2 / v_1}{\chi_2^2 / v_2}$$

هي متغيرة Fisher ، بدرجة حرية البسط v_1 ، وبدرجة حرية المقام v_2 :

$$F \sim F_{v_1 , v_2} \qquad F \geq 0$$

متغيرة Fisher ، F هي متغيرة مستمرة تأخذ قيم حقيقية غير سالبة .

التوقع الرياضي :

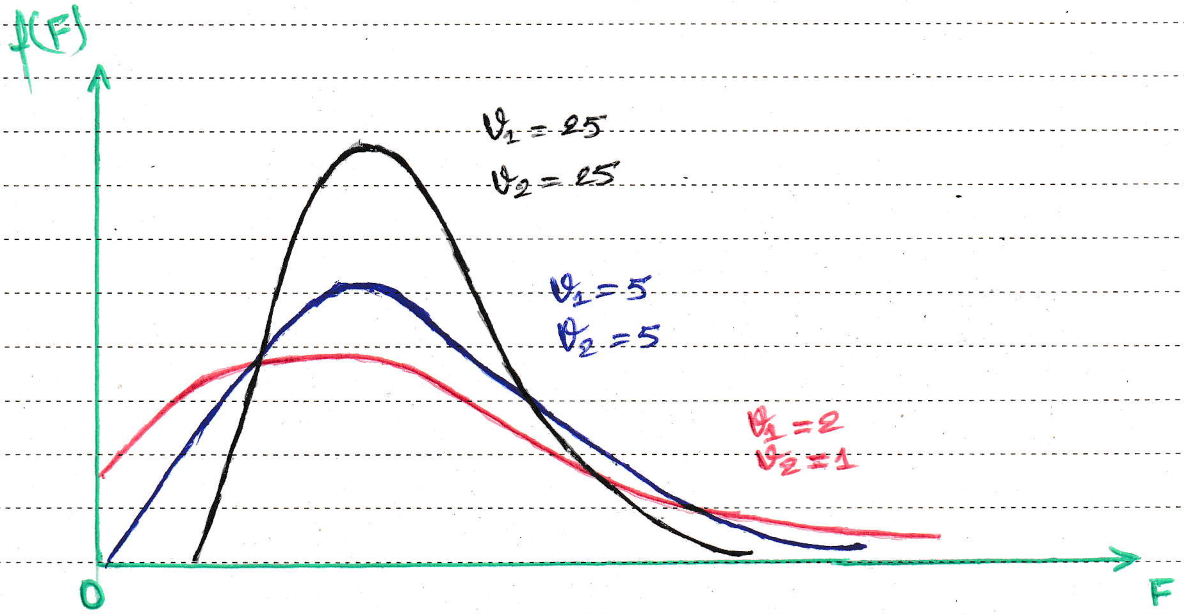
$$\mu = E(F) = \frac{\nu_2}{\nu_2 - 2} \quad , \quad \nu_2 > 2$$

التباين :

$$\sigma^2 = V(F) = \frac{2\nu_2^2}{\nu_1} \cdot \frac{\nu_1 + \nu_2 - 2}{(\nu_2 - 2)^2 (\nu_2 - 4)} \quad , \quad \nu_2 > 4$$

التمثيل البياني :

المنحنى الممثل للمتغيرة F غير متناظر ، موجب الالتواء ذيله الأيمن أطول . مثل منحنى χ^2



إستعمال الجدول :

نستعمل جدول يعطي احتمالات تراكمية من الشكل $(F \leq F_{v_1 v_2})$

يستخدم الرمز $F_{\alpha\, v_1 v_2}$ للتعبير عن قيمة خاصة لمتغيرة F

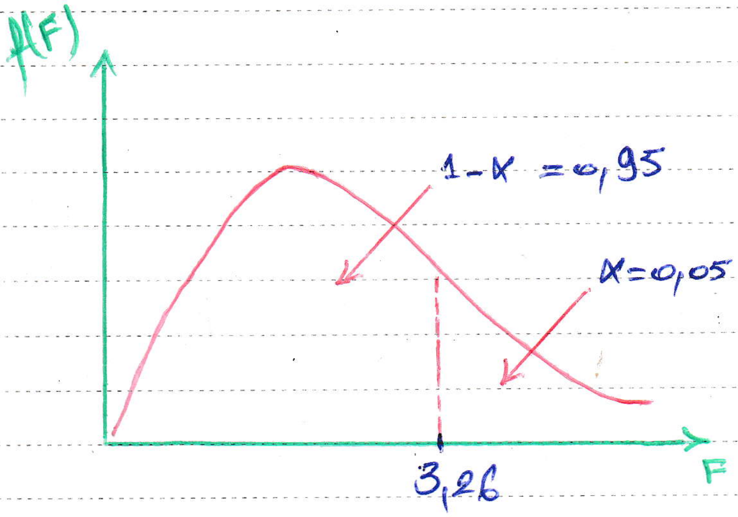
بحيث أن الاحتمال : $Pr(F \leq F_{\alpha\, v_1 v_2}) = 1-\alpha$

بدرجة حرية البسط v_1 ، المقام v_2

مثال :

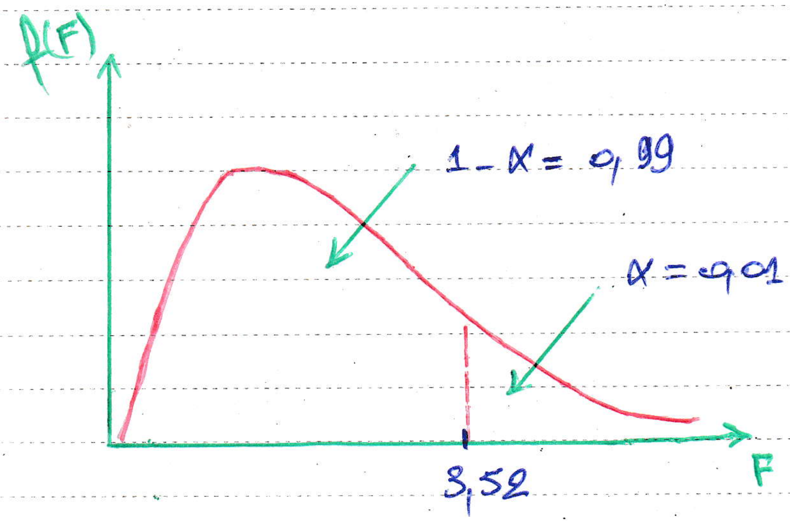
$F_{5\%\ 4\ 12} = 3,26$

$Pr(F \leq 3,26) = 1-0,05 = 0,95$



$F_{1\%\ 9\ 19} = 3,52$

$Pr(F \leq 3,52) = 1-0,01 = 0,99$



$$Pr\left(F \leq F_{\alpha\, v_1 v_2}\right) = 1-\alpha$$

$$Pr\left(\frac{\chi_1^2 / v_1}{\chi_2^2 / v_2} \leq F_{\alpha\, v_1 v_2}\right) = 1-\alpha$$

$$Pr\left(\frac{\chi_2^2 / v_2}{\chi_1^2 / v_1} \geq \frac{1}{F_{(\alpha\, v_1 v_2)}}\ v_2\, v_1\right) = 1-\alpha$$

$$Pr\left(\frac{\chi_2^2 / v_2}{\chi_1^2 / v_1} < \frac{1}{F_{(\alpha\, v_1 v_2)}}\ v_2\, v_1\ {}_{1-\alpha}\right) = \alpha$$

$$Pr\left(F \leq \frac{1}{F_{(\alpha\, v_1 v_2)}}\ (1-\alpha\ \ v_2\, v_1)\right) = \alpha$$

إذن الترميز :

$$F_{(1-\alpha)\, v_2 v_1} = \frac{1}{F_{\alpha\, v_1 v_2}}$$

مثال :

أوجد قيمة $F_{95\%\ 12\ 4}$

$$Pr\left(F \leq F_{95\%\ 12\ 4}\right) = 1 - 0{,}95 = 0{,}05$$

$$F_{95\%\,12\,4} = \frac{1}{F_{5\%\ 4\ 12}} = \frac{1}{3{,}26} = 0{,}306$$

$$Pr\left(F \leq 0{,}306\right) = 0{,}05$$