سلسلة 3.1

تمرين 1 :

وزن مجموعتين من المنتجات يتبع توزيع طبيعي ،
المجموعة الأولى ، وزن متوسط $\mu_1 = 500$ ، وانحراف معياري $\sigma_1 = 20$.
المجموعة الثانية ، وزن متوسط $\mu_2 = 480$ ، وانحراف معياري $\sigma_2 = 12$.
من المجموعة الأولى أخذت عينة $n_1 = 20$ ، ومن الثانية عينة $n_2 = 9$.
- ماهو إحتمال أن الفرق بين متوسطي العينتين $(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)$:

1°) أصغر أو يساوي 26 . 2°) محصور بين 26 و 30 . 3°) أكبر من 20 .

تمرين 2 :

مجتمع طبيعي بمتوقع رياضي $\mu_1 = 50$ ، وانحراف معياري $\sigma_1 = 15$.
ومجتمع طبيعي آخر بمتوقع رياضي $\mu_2 = 40$ ، وانحراف معياري $\sigma_2 = 12$.
من المجتمعين أخذنا عينتين متساويتين : $n_1 = n_2 = n$.

1°) إذا علمت أن : $Pr\left((\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \leq 16\right) = 0,9772$ ، أوجد n .

2°) أحسب إحتمال : $Pr\left((\bar{X}_1 - \bar{X}_2) > 15\right)$

تمرين 3 :

مجموعتين من الطلبة ، المجموعة الأولى نسبة النجاح 60 % ، أخذنا منها
عينة $n_1 = 80$ ، نرمز (ناجح 1 ، راسب 0) ، $\bar{X}_1$ نسبة الناجحين في العينة .
المجموعة الثانية نسبة النجاح 50 % ، أخذنا منها عينة $n_2 = 100$ ،
نرمز (ناجح 1 ، راسب 0) ، $\bar{X}_2$ نسبة الناجحين في العينة .
- ماهو إحتمال أن الفرق بين نسبتي العينتين $(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)$:

1°) أصغر أو يساوي 20 % . 2°) أكبر من 25 % . 3°) أصغر أو يساوي 5 % .

تمرين 4 :

متغير طبيعي X_1 ، متوقع رياضي $\mu_1 = 200$ ،

أخذت عينة $n_1 = 16$ ، فوجد أن : $\sum(X_1 - \bar{X}_1)^2 = 1470$

متغير طبيعي ثاني X_2 ، متوقع رياضي $\mu_2 = 150$ ،

أخذت عينة $n_2 = 10$ ، فوجد أن : $\sum(X_2 - \bar{X}_2)^2 = 450$

1°) أحسب تباين العينة الأولى S_1^2 ، وتباين العينة الثانية S_2^2 .

2°) إذا كان تباين المتغير الأول σ_1^2 يساوي تباين المتغير الثاني σ_2^2 ،

ماهو إحتمال أن الفرق بين المتوسطين $(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)$:

- أقل أو يساوي 60 . - محصور بين 54 و 60 .

تمرين 5 :

مجتمعين طبيعيين ، المجتمع الأول بتوقع رياضي $\mu_1 = 800$ ،

وتباين $\sigma_1^2 = 300$ ، أخذت عينة $n_1 = 10$ ، S_1^2 تباين العينة .

المجتمع الثاني بتوقع رياضي $\mu_2 = 1000$ ، وتباين $\sigma_2^2 = 690$ ،

أخذت عينة $n_2 = 25$ ، S_2^2 تباين العينة .

1°) ماهو إحتمال أن S_1^2 أصغر من S_2^2 .

2°) ماهو إحتمال أن S_1^2 أصغر من $\frac{3}{2} S_2^2$.

تمرين 1 :

المجموعة الأولى : الوزن حجم طبيعي :

$$\begin{cases} \mu_1 = 500 & \text{المتوقع} \\ \sigma_1 = 20 & \text{الانحراف} \end{cases}$$

عينة $n_1 = 20$ ، $\bar{X}_1$ متوسط العينة :

$$\begin{cases} \mu_{\bar{X}_1} = \mu_1 = 500 & \text{المتوقع} \\ \sigma^2_{\bar{X}_1} = \frac{\sigma_1^2}{n_1} = \frac{20^2}{20} = 20 & \text{التباين} \end{cases}$$

المجموعة الثانية :

$$\begin{cases} \mu_2 = 480 & \text{المتوقع} \\ \sigma_2 = 12 & \text{الانحراف} \end{cases}$$

عينة $n_2 = 9$ ، $\bar{X}_2$ متوسط العينة :

$$\begin{cases} \mu_{\bar{X}_2} = \mu_2 = 480 & \text{المتوقع} \\ \sigma^2_{\bar{X}_2} = \frac{\sigma_2^2}{n_2} = \frac{12^2}{9} = 16 & \text{التباين} \end{cases}$$

الفرق بين المتوسطات $(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)$ حجم طبيعي :

$$\begin{cases} \mu_{\bar{X}_1} - \mu_{\bar{X}_2} = \mu_1 - \mu_2 = 500 - 480 = 20 & \text{المتوقع :} \\ \sigma^2_{\bar{X}_1} + \sigma^2_{\bar{X}_2} = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2} = 20 + 16 = 36 & \text{التباين :} \end{cases}$$

الاحتمال :

1°) $Pr((\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \leq 26) = Pr\left(\frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \leq \frac{26 - 20}{\sqrt{36}}\right)$

$= Pr(Z \leq 1) = 0{,}8413$

2°) $Pr(26 \leq (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \leq 30) = Pr\left(\frac{26-20}{6} \leq \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \leq \frac{30-20}{6}\right)$

$= Pr(1 \leq Z \leq 1{,}66) = 0{,}9515 - 0{,}8413 = 0{,}1102$

3°) $Pr((\bar{X}_1 - \bar{X}_2) > 20) = Pr\left(\frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} > \frac{20-20}{6}\right)$

$= Pr(Z > 0) = 1 - Pr(Z < 0) = 0{,}5$

تمرين 2 :

المجتمع الأول : $\begin{cases} \mu_1 = 50 \\ \sigma_1 = 15 \end{cases}$

$\bar{X}_1$ متوسط العينة n_1 ،

$$\begin{cases} \mu_{\bar{X}_1} = \mu_1 = 50 \\ \sigma^2_{\bar{X}_1} = \frac{\sigma_1^2}{n_1} = \frac{15^2}{n} \end{cases}$$

المجتمع الثاني : $\begin{cases} \mu_2 = 40 \\ \sigma_2 = 12 \end{cases}$

$\bar{X}_2$ متوسط العينة n_2 ،

$$\begin{cases} \mu_{\bar{X}_2} = \mu_2 = 40 \\ \sigma^2_{\bar{X}_2} = \frac{\sigma_2^2}{n_2} = \frac{12^2}{n} \end{cases}$$

الفرق بين المتوسطين : $(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)$

$$\begin{cases} \mu_{\bar{X}_1} - \mu_{\bar{X}_2} = \mu_1 - \mu_2 = 50 - 40 = 10 \\ \sigma^2_{\bar{X}_1} + \sigma^2_{\bar{X}_2} = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2} = \frac{15^2}{n} + \frac{12^2}{n} = \frac{369}{n} \end{cases}$$

الحل :

$$1°)\ Pr\left((\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \leq 16\right) = Pr\left(\frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \leq \frac{16 - 10}{\sqrt{\frac{369}{n}}}\right) = 0{,}9772$$

$$= Pr\left(Z \leq \frac{6}{\sqrt{\frac{369}{n}}}\right) = 0{,}9772$$

من الجدول : $Z_{0{,}9772} = 2$

إذن : $Pr(Z \leq 2) = 0{,}9772$

$$\Rightarrow \frac{6}{\sqrt{\frac{369}{n}}} = 2 \Rightarrow \sqrt{\frac{369}{n}} = \frac{6}{2} = 3 \Rightarrow \frac{369}{n} = 9$$

$$\Rightarrow n = 41$$

$$2°)\ Pr\left((\bar{X}_1 - \bar{X}_2) > 15\right) = Pr\left(\frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} > \frac{15 - 10}{3}\right)$$

$$= Pr(Z > 1{,}66) = 1 - Pr(Z \leq 1{,}66) = 1 - 0{,}9515$$

$$= 0{,}0485$$

تمرين 3 :

عند أخذ طالب واحد : ناجح 1 ، راسب 0 ، توزيع برنولي .

العينة الأولى :

$$\begin{cases} \mu_1 = p_1 = 0{,}6 & \text{التوقع} \\ \sigma_1^2 = p_1 \cdot q_1 = 0{,}6 \cdot 0{,}4 = 0{,}24 & \text{التباين} \end{cases}$$

نسبة العينة $\overline{X}_1$:

$$\begin{cases} \mu_{\overline{X}_1} = \mu_1 = 0{,}6 & \text{التوقع} \\ \sigma^2_{\overline{X}_1} = \frac{\sigma_1^2}{n_1} = \frac{0{,}24}{80} & \text{التباين} \end{cases}$$

$n_1 \geq 30$

توزيع $\overline{X}_1$ تقريبا طبيعي .

العينة الثانية :

$$\begin{cases} \mu_2 = p_2 = 0{,}5 & \text{التوقع} \\ \sigma_2^2 = p_2 \cdot q_2 = 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}25 & \text{التباين} \end{cases}$$

نسبة العينة $\overline{X}_2$:

$$\mu_{\overline{X}_2} = \mu_2 = 0{,}5 \quad \text{التوقع}$$

$$\sigma^2_{\overline{X}_2} = \frac{\sigma_2^2}{n_2} = \frac{0{,}25}{100} \quad \text{التباين}$$

$n_2 \geq 30$

توزيع $\overline{X}_2$ تقريبا طبيعي .

الفرق بين المتوسطين $(\overline{X}_1 - \overline{X}_2)$ له توزيع تقريبا طبيعي :

$$\begin{cases} \mu_{\overline{X}_1} - \mu_{\overline{X}_2} = \mu_1 - \mu_2 = p_1 - p_2 = 0{,}6 - 0{,}5 = 0{,}1 & \text{: التوقع} \\ \sigma^2_{\overline{X}_1} + \sigma^2_{\overline{X}_2} = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2} = \frac{p_1 \cdot q_1}{n_1} + \frac{p_2 \cdot q_2}{n_2} = \frac{0{,}24}{80} + \frac{0{,}25}{100} & \text{: التباين} \end{cases}$$

$$= 0{,}003 + 0{,}0025 = 0{,}0055$$

الحـــل :

$$1^{\circ})\ Pr\left((\bar{X}_1-\bar{X}_2)\leqslant 0{,}2\right)=Pr\left(\frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(p_1-p_2)}{\sqrt{\frac{p_1\cdot q_1}{n_1}+\frac{p_2\cdot q_2}{n_2}}}\leqslant\frac{0{,}2-0{,}1}{\sqrt{0{,}0055}}\right)$$

$$=Pr(Z\leqslant 1{,}34)=0{,}9099$$

$$2^{\circ})\ Pr\left((\bar{X}_1-\bar{X}_2)>0{,}25\right)=Pr\left(\frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(p_1-p_2)}{\sqrt{\frac{p_1\cdot q_1}{n_1}+\frac{p_2\cdot q_2}{n_2}}}>\frac{0{,}25-0{,}1}{\sqrt{0{,}0055}}\right)$$

$$=Pr(Z>2{,}02)=1-Pr(Z\leqslant 2{,}02)=1-0{,}9783$$
$$=0{,}0217$$

$$3^{\circ})\ Pr\left((\bar{X}_1-\bar{X}_2)\leqslant 0{,}05\right)=Pr\left(\frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(p_1-p_2)}{\sqrt{\frac{p_1 q_1}{n_1}+\frac{p_2\cdot q_2}{n_2}}}\leqslant\frac{0{,}05-0{,}1}{\sqrt{0{,}0055}}\right)$$

$$=Pr(Z\leqslant -0{,}674)=Pr(Z>+0{,}674)$$

$$=1-Pr(Z\leqslant 0{,}67)=1-0{,}7486=0{,}2514$$

تمرين 4 :

المجتمع الأول : $\begin{cases} \mu_1 = 200 \\ \sigma_1^2 = \end{cases}$

عينة $n_1 = 16$

متوسط العينة $\bar{X}_1$

تباين العينة S_1^2

المجتمع الثاني : $\begin{cases} \mu_2 = 150 \\ \sigma_2^2 = \end{cases}$

عينة $n_2 = 10$

متوسط العينة $\bar{X}_1$

تباين العينة S_2^2

1) حساب تباين العينتين :

$$S_1^2 = \frac{\Sigma(x_1-\bar{x}_1)^2}{n_1-1} = \frac{1470}{16-1} = 98$$

$$S_2^2 = \frac{\Sigma(X_2-\bar{X}_2)^2}{n_2-1} = \frac{450}{10-1} = 50$$

2) الفرق $(\bar{X}_1-\bar{X}_2)$:

$$\begin{cases} \mu_{\bar{X}_1}-\mu_{\bar{X}_2} = \mu_1-\mu_2 = 200-150 = 50 \\ \sigma^2_{\bar{X}_1}-\sigma^2_{\bar{X}_2} = \frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2} = \sigma^2\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right) \\ \quad = S^2\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{10}\right) = S^2 \cdot \frac{26}{160} \end{cases}$$

التباينات متساوية :

$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$

إيجاد S^2 الوسط الحسابي المرجح :

$$S^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{(n_1-1)+(n_2-1)}$$

$$= \frac{15 \cdot 98 + 9 \cdot 50}{24} = \frac{1920}{24} = 80$$

$$\Rightarrow S^2 \cdot \frac{26}{160} = 80 \cdot \frac{26}{160} = 13$$

الإحصاءة : تتبع توزيع student

$$\frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{S^2\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}} \sim t_v$$

درجة الحرية :

$v = n_1+n_2-2 = 24$

الاحتمال :

$$Pr\left((\bar{X}_1-\bar{X}_2) \leqslant 60\right) = Pr\left(\frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{S^2\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}} \leqslant \frac{60-50}{\sqrt{13}}\right)$$

$$Pr\left(t \leqslant 2{,}7735\right) = 0{,}995$$

من الجدول :

$$t_{24\ 0{,}995} = 2{,}797$$

$$Pr\left(54 \leqslant (\bar{X}_1-\bar{X}_2) \leqslant 60\right) = Pr\left(\frac{54-60}{\sqrt{13}} \leqslant \frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{S^2\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}} \leqslant \frac{60-50}{\sqrt{13}}\right)$$

$$= Pr\left(1{,}1094 \leqslant t \leqslant 2{,}7735\right)$$

$$= Pr\left(t \leqslant 2{,}7735\right) - Pr\left(t \leqslant 1{,}1094\right)$$

$$= 0{,}995 - 0{,}85 = 0{,}145$$

$$t_{24\ 0{,}85} = 1{,}059$$

تمرين 5 :

المجتمع الأول : المعطاة S_1^2 ، عينة $n_1=10$ ، $\sigma_1^2=300$

المعطاة : $\frac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma_1^2}$ توزيع كاي تربيع $v_1=n_1-1$.

المجتمع الثاني : المعطاة S_2^2 ، عينة $n_2=25$ ، $\sigma_2^2=690$

المعطاة : $\frac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma_2^2}$ توزيع كاي مربع $v_2=n_2-1$.

نستعمل إحصاءة Fisher : $F=\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}$

1°) إحتمال :

$$Pr(S_1^2\leq S_2^2)=Pr\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\leq 1\right)$$

$\times\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$

$$=Pr\left(\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}\leq\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\right)=Pr\left(F\leq\frac{690}{300}\right)=Pr(F\leq 2{,}3)=0{,}95$$

$F_{9\ 24\ \%5}=2{,}3$ | $\alpha=0{,}05$ ، $1-\alpha=0{,}95$ ، المحصل $0{,}95$ | درجة حرية البسط : $v_1=10-1=9$ ، درجة حرية المقام : $v_2=25-1=24$

2°) إحتمال :

$$Pr\left(S_1^2\leq\frac{3}{2}S_2^2\right)=Pr\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\leq\frac{3}{2}\right)$$

$$=Pr\left(\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}\leq\frac{3}{2}\cdot\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\right)=Pr\left(F\leq\frac{3}{2}\cdot\frac{690}{300}\right)$$

$$=Pr(F\leq 3{,}45)=0{,}99$$

$F_{9\ 24\ \%1}=3{,}25$ أقرب قيمة لـ $3{,}45$.

$\alpha=0{,}01$

المحصل : $1-\alpha=0{,}99$