ChI : Fonctions holomorphes.

I-1- Le plan complexe :

Déf 1.1.1 : On appelle nbre. complexe l'expression $z = x + iy$ où $x, y \in \mathbb{R}$ et $i^2 = -1$.

- L'ensemble des nbres. complexes est noté $\mathbb{C}$, i.e,

$$\mathbb{C} = \{ z = x + iy,\ (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ i^2 = -1 \}.$$

- x (resp. y) est appelé la partie réelle (resp. imaginaire) de $z = x + iy$, et on écrit $\mathrm{Re}\, z = x$ et $\mathrm{Im}\, z = y$.

Rem 1.1.2 : - Les nbres. réelles sont les nbres. complexes dont la partie imaginaire est nulle et $\{ iy,\ y \in \mathbb{R} \}$ est l'ensemble des nbres. purement imaginaires.

- On peut visualiser les nbres. complexes dans le plan euclidien usuel $\mathbb{R}^2$:

$$z = x + iy \in \mathbb{C} \Leftrightarrow (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Déf 1.1.5: soit $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ $\in \mathbb{C}$ où $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$.

- La somme de z_1 et z_2 est le nbre complexe $z = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) = z_1 + z_2$
- Le produit de z_1 et z_2 est le nbre complexe $z = z_1 \cdot z_2$

$$= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

- Si $z_2 \neq 0$, on définit $\frac{z_1}{z_2}$ par

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)}$$

$$= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

- On dit que $z_1 = z_2$ si on a $x_1 = x_2$ et $y_1 = y_2$.

- Si $z = x + iy$ avec $x \neq 0$ ou $y \neq 0$ on définit l'inverse de z par

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{x + iy} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2}$$

Prop 1.1.6: Soient $z_j = x_j + iy_j$, $j = 1, 2, 3$ des nbres complexes

Alors

a) $z_1+z_2=z_2+z_1$.

b) $z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3$.

c) $(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$

d) $z_1z_2=z_2z_1$.

Déf 1.1.4: On appelle module d'un nbre. complexe $z=x+iy$ $x,y\in\mathbb{R}$, la quantité

$$|z|=\sqrt{x^2+y^2}.$$

Rem 1.1.7: soit $z=x+iy\in\mathbb{C}$, alors * $|z|\geq 0$.

* $|z|=0 \iff z=0$.
* $\cancel{\mathrm{Re}\, z \leq}\ |\mathrm{Re}\, z|\leq |z|$
* $\cancel{\mathrm{Im}\, z \leq}\ |\mathrm{Im}\, z|\leq |z|$
* $|z_1 z_2|=|z||z_2|$, $\forall z_1, z_2\in\mathbb{C}$.
* $|z_1+z_2|\leq |z_1|+|z_2|$, $\forall z_1, z_2\in\mathbb{C}$
* $||z_1|-|z_2||\leq |z_1-z_2|$, $\forall z_1, z_2\in\mathbb{C}$.

Déf 1.1.3: On appelle conjugué d'un nbre. complexe $z=x+iy$, $x,y\in\mathbb{R}$, le nbre. complexe $\overline{z} = x - iy$.

Prop 1.1.8: Soit $z \in \mathbb{C}$, alors

1) $|z| = |\overline{z}|$ et $z = \overline{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$.

2) $\overline{-z} = -\overline{z}$.

3) $\operatorname{Re} z = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$, $\operatorname{Im} z = \dfrac{z-\overline{z}}{2i}$

4) $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$.

5) $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$

Preuve (TD)

Déf 1.1.9: Soit $z = x+iy \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.
On appelle forme polaire ou trigonométrique de z, l'écriture

$$z = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$ où

$r = |z| = \sqrt{x^2+y^2} > 0$ et θ est l'an[gle] que fait le vecteur $\overrightarrow{OP}$ avec l'axe (Ox) positif où $P(x,y)$ et $O(0,0)$.

Déf 1.1.10: Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

- Chaque valeur de θ telle que $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ s'appelle un argument de z.
- L'ensemble de tous les argume[nts] de z est noté $\arg(z)$.

- $\sin\theta = \dfrac{y}{|z|} = \dfrac{y}{r} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

- $\cos\theta = \dfrac{x}{|z|} = \dfrac{x}{r} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

- $\tan\theta = \dfrac{y}{x}$.

Rem 1.1.11:

1) Si $z=0$, alors θ n'est pas défini et on ne peut pas écrire z sous forme polaire.

2) θ a un nbre. infini de valeurs positives et négatives, qui diffèrent par des multiples entiers de 2π.

3) Si $-\pi < \theta \leq \pi$, alors l'angle θ est appelé l'argument principale, noté par $Arg(z)$ et on a donc
$$\theta = Arg(z) + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}.$$

4) Si $z = x + iy \neq 0$, alors

$$\mathrm{Arg}(z) = \begin{cases} \mathrm{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) \text{ si } x>0 \\ \mathrm{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)+\pi \text{ si } x<0 \text{ et } y\geq 0 \\ \frac{\pi}{2} \text{ si } x=0 \text{ et } y>0 \\ \mathrm{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)-\pi \text{ si } x<0 \text{ et } y<0 \\ -\frac{\pi}{2} \text{ si } x=0 \text{ et } y<0. \end{cases}$$

Prop 1.1.12: (Formule d'Euler).
Soit $\theta \in \mathbb{R}$, alors
$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$$

Preuve: (TD).

Prop 1.1.13:

1) $\frac{d}{dt}(e^{it}) = i(e^{it})$.

2) $e^{i0} = 1$.

3) $e^{i(t+\cancel{t})} = e^{it}e^{i\cancel{t}}$, $\forall t, \cancel{t} \in \mathbb{R}$.

4) $\cos\theta_t = \frac{e^{i\theta t} + e^{-i\theta t}}{2}$, $\sin\theta_t = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

5) $\overline{e^{i\theta_t}} = e^{-i\theta_t}$, $\forall \theta_t \in \mathbb{R}$

Preuve (TD).

Prop 1.1.14: Soient $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ et $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ deux nbres. complexes où $r_1, r_2 > 0$ et $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$, alors

$z_1 = z_2 \iff r_1 = r_2$ et $\theta_1 = \theta_2 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Preuve (TD).

Prop 1.1.15 Soient $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ et $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ deux nbres. complexes alors 1) $z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$

2) $z_1^{-1} = \frac{1}{z_1} = \frac{1}{r_1} e^{-i\theta_1}$ où $z_1 \neq 0$.

3) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)}$, $z_2 \neq 0$.

Preuve (TD).

Prop: 1.1.16: Soient $n \in \mathbb{N}$ et $z = r e^{i\theta} \in \mathbb{C}$, $r > 0$, $\theta \in \mathbb{R}$, alors $z^n = r^n e^{in\theta}$, c'est la formule de Moivre.

Preuve: Soit $z = r e^{i\theta}$, par recurrence on a:

$z^0 = r^0 (e^{i\theta})^0 = r^0 e^{i0\theta} = 1.$

supposons que $z^n = r^n e^{in\theta}$ et montrons que $z^{n+1} = r^{n+1} e^{i(n+1)\theta}$.

On a $z^{n+1} = z^n \cdot z = r^n e^{in\theta} \cdot r e^{i\theta}$

$$= r^n r \, e^{in\theta} e^{i\theta}$$

$$= r^{n+1} e^{i(n+1)\theta}$$

<u>Rem 1.1.17:</u> 1) Si $n \in \mathbb{Z}$ On a

$$z^n = \left(\frac{1}{z}\right)^{-n} = \left(\frac{1}{re^{i\theta}}\right)^{-n} = \left(\frac{1}{r}\right)^{-n}\left(\frac{1}{e^{i\theta}}\right)^{-n}$$

$$= (r^{-1})^{-n} \, (e^{-i\theta})^{-n}$$

$$= r^n e^{in\theta}$$

2) Si $r = 1$, on trouve

$$(e^{i\theta})^n = (\cos\theta + i\sin\theta)^n$$

$$= e^{in\theta} = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

<u>Prop 1.1.18:</u> Soient z_1 et z_2 deux nbres complexes non nuls, alors

a) $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

b) $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

<u>Preuve (Devoir)</u>.

Déf 1.1.19: Soit $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.
On appelle racine n-ième de z_0 tout nbre. complexe z tel que $z^n = z_0$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Rem 1.1.20: Si on prend $z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$, $\theta_0 = \text{Arg}(z_0)$ et $r_0 = |z_0|$, alors les racines n-ième de z_0 sont:

$$z_k = \sqrt[n]{r_0}\, \exp\left(i\left(\frac{\theta_0 + 2k\pi}{n}\right)\right),$$
$$k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Déf 1.1.20: Les racines n-ième de l'unité sont les solutions de l'équation $z^n = 1$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Déf 1.1.21: Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ et $\rho > 0$

- On appelle disque ouvert $D(z_0, \rho)$ de centre z_0 et de rayon ρ l'ensemble
$$D(z_0, \rho) = \{ z \in \mathbb{C},\ |z - z_0| < \rho \}$$

- On appelle disque fermé $\overline{D}(z_0, \rho)$ de centre z_0 et de rayon ρ l'ensemble

$D(z_0, \rho) = \{z \in \mathbb{C},\ |z - z_0| \leq \rho\}$

_ On appelle cercle $C(z_0, \rho)$ de centre z_0 et de rayon ρ, l'ensemble $C(z_0, \rho) = \{z \in \mathbb{C}, |z - z_0| = \rho\}$

Rem 1.1.22: Le disque ouvert $D(0,1)$ est appelé disque unité.

Déf 1.1.23: Soient $z_0 \in \mathbb{C}$ et $r_1, r_2 >$ tels que $r_1 < r_2$. On appelle anneau $A(z_0, r_1, r_2)$ de centre z_0 et de rayons r_1, r_2 l'ensemble

$A(z_0, r_1, r_2) = \{z \in \mathbb{C},\ r_1 < |z - z_0| < r$

Déf 1.1.24: Soit $r > 0$. On appelle bande de largeur $2r$ dans le sens de l'axe x ou l'axe y l'ensemble $\{z \in \mathbb{C}, -r < \operatorname{Im} z <$ ou $\{z \in \mathbb{C}, -r < \operatorname{Re} z < r\}$.

Déf 1.1.25: Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha < \beta$. On appelle secteur de l'angle entre α et β l'ensemble

$\{z \in \mathbb{C},\ \alpha < \operatorname{Arg}(z) < \beta\}$

Déf 1.1.26 : Soient $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$ deux nbres complexes où $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$. On appelle segment de droite avec les extrémités z_1 et z_2 l'ensemble

$$[z_1, z_2] = \{ z \in \mathbb{C},\ z(t) = (1-t)z_1 + t z_2,\ 0 \leq t \leq 1 \}.$$

Déf 1.1.27 : Soient $\varepsilon > 0$ et $z_0 \in \mathbb{C}$.

- On appelle ε-voisinage du pt. z_0 l'ensemble $v(z_0, \varepsilon) = \{ z \in \mathbb{C},\ |z - z_0| < \varepsilon \}$
- On appelle ε-voisinage privé du pt. z_0 l'ensemble $\{ z \in \mathbb{C},\ 0 < |z - z_0| < \varepsilon \}$.

Exemple 1.1.28 : Le disque ouvert $D(0,1)$ est un voisinage du pt. 0, i.e $D(0,1) = v(0,1)$.

$D(i,2)$ est un voisinage de i

$D(i,2) = v(i,2)$.

Déf 1.1.29 : Soit $S \subseteq \mathbb{C}$.

- On dit que z_0 est un pt. intérieur de S s'il existe un ε_voisinage $v(z_0, \varepsilon)$ de z_0 tel que $v(z_0, \varepsilon) \subseteq S$.

_ On dit que z_0 est un pt. extérieur de S s'il existe un ε_voisinage $v(z_0, \varepsilon)$ de z_0 tel que $v(z_0, \varepsilon) \cap S = \phi$

Déf 1.1.30: Soient $S \subset \mathbb{C}$ et $z \in \mathbb{C}$

_ On dit que z_0 est un pt. de frontière de S s'il n'est ni un pt. intérieur ni un pt. extérieur.

_ L'ensemble de tous les pts. de frontières ~~d'un ensemble~~ de S est appelé la frontière de S $(\partial S$

×**Déf 1.1.31:** Soit $S \subset \mathbb{C}$.

_ On dit que S est ouvert si tous ses points sont des pts. intérieur

_ Un ensemble est fermé s'il contient tous ses pts. limites.

_ La fermeture de S est l'ensemble fermé de tous les pts. de S avec la limite (frontière de S.

Déf 1.1.31 : Soit $S \subset \mathbb{C}$ et ∂S la frontière ~~de S~~.
- On dit que S est un ouvert dans $\mathbb{C}$ si $\forall z \in S$, $\exists r > 0$ tq $D(z, r) \subset S$.
- Si $\partial S \cap S = \emptyset$, alors S est un ouvert ds. $\mathbb{C}$.

Exemple 1.1.32 : - Tout disque ouvert $D(z_0, r)$ est un ouvert dans $\mathbb{C}$.
- Les demi-plans $\{z \in \mathbb{C}, Re\, z > x_0\}$ et $\{z \in \mathbb{C}, Im\, z > y_0\}$ sont des ouverts de $\mathbb{C}$.

Déf 1.1.33 : Soit $F \subset \mathbb{C}$. On dit que F est un fermé ds. $\mathbb{C}$ si son complémentaire $\mathbb{C} \setminus F$ est un ouvert de $\mathbb{C}$.

Rem 1.1.34 : si un ensemble ~~est fermé~~ s'il contient tous ses pts. de frontière, alors il est fermé

Exemple 1.1.35 : - Tout disque fermé $\overline{D}(z_0, r)$ est un fermé ds. $\mathbb{C}$, $r > 0$.

Exemple 1.1.42 _ $\overline{D}(0,r)$, $r>0$ est compact.

_ Le disque ouvert $D(0,r)$, $r>0$ n'est pas compact.

Déf 1.1.43 Soit S un ouvert de $\mathbb{C}$. On dit que S est connexe par arcs si deux pts. quelconques peuvent être reliés par un chemin qui se trouve entièrement dans S.

Déf 1.1.44. Soit $S \subset \mathbb{C}$ un ouvert S est dit connexe s'il ne peut être pas la réunion de deux ouverts disjoints non vides

Rem 1.1.45. Toute partie de $\mathbb{C}$ connexe par arcs est connexe.

Exemple 1.1.46. – Le disque unité $D(0,1)$ est connexe car il est connexe par arcs.

– La couronne $\{z \in \mathbb{C}, r_1 < |z| < r_2\}$ $r_1, r_2 \in \mathbb{R}_+^*$, $r_1 < r_2$ est connexe car elle est connexe par arcs.

- La couronne $A(z_0, r_1, r_2) = \{z \in \mathbb{C}, r_1 \leq |z - z_0| \leq r_2\}$ est un fermé de $\mathbb{C}$.

Déf 1.1.36 : Soit $D \subset \mathbb{C}$. On appelle adhérence ou fermeture de D l'ensemble $\overline{D} = D \cup \partial D$.

Exemple 1.1.37 : L'adhérence du disque ouvert $D(z_0, r)$ est le disque fermé $\overline{D}(z_0, r)$

Déf 1.1.38 : Soit $S \subset \mathbb{C}$. On dit que S est borné s'il existe $M >$ tel que $|z| < M$, $\forall z \in S$.

Prop 1.1.39 : Soit $S \subset \mathbb{C}$ et soi $D(0, r)$ le disque ouvert de centre 0 et de rayon r. Alo S est borné ssi $\exists r > 0$, $S \subset D(0, r$

Exemple 1.1.40 : - L'ensemble $D(0, 6)$ est borné.

- Le demi-plan $\{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} z >$ n'est pas borné.

Déf 1.1.41 : Soit $K \subset \mathbb{C}$. On dit K est compact si K est borné et f ds. $\mathbb{C}$.

Déf 1.1.47: un ensemble $\mathbb{S} \subset \mathbb{C}$ qui est non vide, ouvert et connexe est appelé un domaine.

Exemple 1.1.48: - Le disque unité $D(0,1)$, le demi-plan $\{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Im} z < 0\}$ et la couronne $\{z \in \mathbb{C}, 1 < |z| < 2\}$ sont des domaines.

- L'ensemble $\{z \in \mathbb{C}, |z| \neq 1\}$ n'est pas un domaine car il n'est pas connexe.

Déf 1.1.49: Soient $D \subset \mathbb{C}$ et $z_0 \in D$. On dit que D est étoilé en z_0 si on a $\forall z \in D$, $[z_0, z] \subset D$

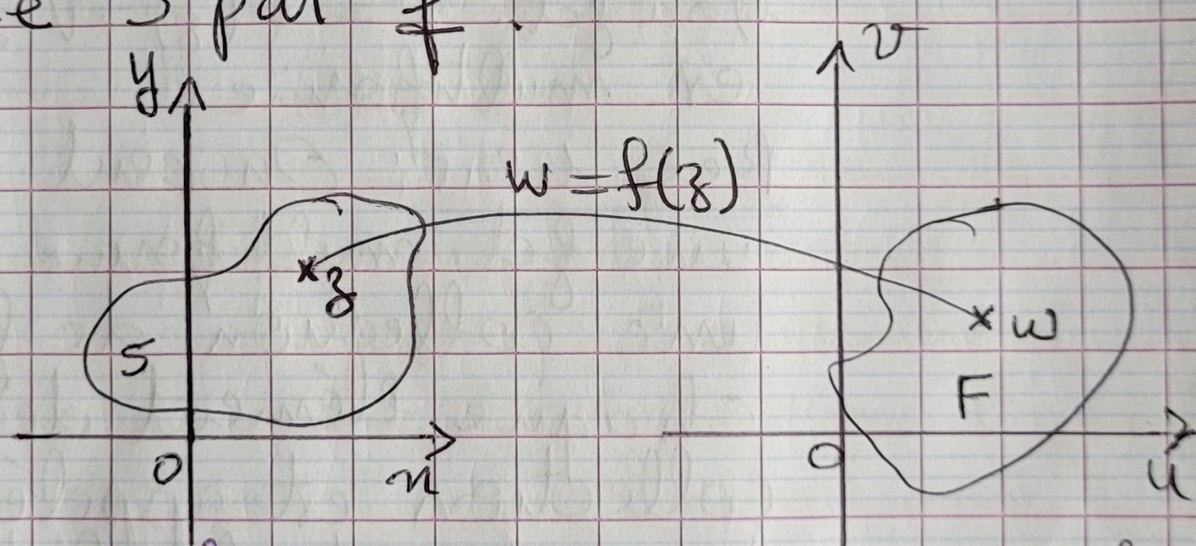
Déf 1.1.50: Soit $D \subset \mathbb{C}$ et $a \in \mathbb{C}$. On dit que a est un pt. d'accumulation de D si le singleton $\{a\}$ n'est pas un ouvert de $A \cup \{a\}$ (pour la topologie induite)

Re 1.1.51: Soit $B \subset \mathbb{R}$ un sous-ensemble infini de $\mathbb{R}$. x est un pt. d'accumulation de B si $\forall \varepsilon > 0, \exists y \in B, y \neq x$ et $y \in]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$.

[Être connexe, c'est être en un seul morceau

1-2- Fonction d'une variable complexe à valeurs complexes

Déf 1.2.1 : Soient S et F deux sous-ensembles non vides de $\mathbb{C}$. Si à chaque valeur $z \in S$, il correspond une ou plusieurs valeurs $w \in F$, on dit que w est une fct. de z et on écrit $w = f(z)$.
S est appelé le domaine de définition de f et F est l'image de S par f.



Exemple 1.2.2 : 1) $f_1(z) = w_1 = z^2$, $S_1 = \mathbb{C}$. f_1 est une fct. complexe.

2) $f_2(z) = w_2 = \dfrac{z+1}{z}$, $S_2 = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

3) $f_3(z) = w_3 = \dfrac{1}{z^2+1}$, $S_3 = \mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$.

Déf 1.2.3 On dit que la fct. $f : S \longrightarrow \mathbb{C}$ est uniforme si à chaque valeur de $z \in S$ ne correspond qu'une seul valeur w.

- Si pour tout $z \in S$, $f(z)$ possède plusieurs valeurs, alors f est dite multiforme.

Exemple 1.2.4 :

1) La fct. polynôme : $w = f(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j$, $z \in \mathbb{C}$ est uniforme.

2) La fct. $w = f(z) = \sqrt{z}$, $z \in \mathbb{C}$ est multiforme.

Rem 1.2.5 : On peut considérer une fct. multiforme comme une collection de fcts. uniformes. Chaque élément de cette collection est appelé une branche de la fct. multiforme.

Déf 1.2.6 : Soient $S \subset \mathbb{C}$ et $f : S \longrightarrow \mathbb{C}$ une fct. complexe telle que $\forall z = x + iy \in S$, $x, y \in \mathbb{R}$