نلاحظ أن الأشعة الذاتية $x_3=(1,-1,1)$

$x_1=(1,-1,0)$, $x_2=(1,0,-1)$

مستقلة خطيا فهي تشكل اساس لـ $\mathbb{R}^3$.

ومنه f قطور (A قطورة)

إذن A مشابهة لمصفوفة قطرية $D=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$D=M(f,B',B')$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^3 \arrow[r, "A"] & \mathbb{R}^3 \ \{e_1,e_2,e_3\}=B \arrow[d, "P^{-1}"] \\ \mathbb{R}^3 \arrow[u, "P"] \arrow[r, "D"] & \mathbb{R}^3 \end{tikzcd}$$

$B'=\{x_1,x_2,x_3\}$ $\quad$ $\{x_1,x_2,x_3\}=B'$

$$\boxed{P=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}}$$

$e_1 = a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3 \Leftrightarrow (1,0,0) = -1x_1 + x_2 + 0.x_3$

$(1,0,0) = a_{11}(1,-1,0) + a_{21}(1,0,-1) + a_{31}(1,-1,1)$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_{11}+a_{21}+a_{31}=1 \quad \cdots (1) \\ -a_{11}-a_{31}=0 \quad \cdots (2) \\ -a_{21}+a_{31}=0 \quad \cdots (3) \end{cases}$$

$\Rightarrow \quad a_{11}=-a_{31} \ \wedge \ a_{21}=a_{31}$

بالتعويض في (1) نجد

$-a_{31}+a_{31}+a_{31}=1 \Rightarrow \boxed{a_{31}=1} \Rightarrow \boxed{a_{11}=-1} \ \boxed{a_{21}=1}$

نتحقق بسهولة أن

$\boxed{D=P^{-1}AP}$

$$P^{-1}=\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} e_1 & e_2 & e_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array}$$

ليكن $P \in K[X]$ ، $P = a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0$

عرفنا سابقا : $P(f) = a_n f^n + \cdots + a_1 f + a_0$

حيث $f^2 = f \circ f$, $f^3 = f^2 \circ f$, ... , $f^n = f^{n-1} \circ f$

$$P(A) = a_n A^n + \cdots + a_1 A + a_0$$

تعريف : نقول عن كثير حدود P أنه يعدم f إذا كان $P(f) = 0$. نقول أيضا أن P عادم لـ f .

فرضية : ليكن V ف.ش بعده n على الحقل K و $f : V \to V$ ت.خ

1 إذا كان f قابل للتقطير، فإنه يوجد كثير حدود P قابل للتفكيك في $K[X]$ و جميع جذوره بسيطة بحيث $P(f) = 0$.

2 إذا وجد كثير حدود $P \in K[X]$ عادم لـ f ، فإن كل قيمة ذاتية لـ f هي جذر لـ P .

البرهان : نفرض أن f قابل للتقطير ليكن $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ أساس لـ V متشكل من الأشعة الذاتية لـ V و ليكن $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ القيم الذاتية المختلفة لـ f .

نضع $P(X) = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2) \cdots (X - \lambda_k)$. إذن

$$P(f) = (f - \lambda_1 I) \circ (f - \lambda_2 I) \circ \cdots \circ (f - \lambda_k I)$$

نلاحظ أن $(f - \lambda_i I) \circ (f - \lambda_j I) = (f - \lambda_j I) \circ (f - \lambda_i I)$, $\forall i, j$

ليكن $v_i \in B$ ، $1 \leq i \leq n$ و ليكن λ_j القيمة الذاتية المرفقة لـ v_i ، $1 \leq j \leq k$. فإن

$$f(v_i) = \lambda_j v_i \Rightarrow f(v_i) - \lambda_j id(v_i) = (f - \lambda_j I)(v_i) = 0$$

$$\Rightarrow P(f)(v_i) = (f - \lambda_1 I) \circ \cdots \circ (f - \lambda_k I) \circ (f - \lambda_j I)(v_i)$$
$$= 0 .$$

$$\Rightarrow P(f)(v_i) = 0, \ \forall \ 1 \leq i \leq n \Rightarrow \boxed{P(f) = 0}$$

(2) ليكن $P \in K[X]$ كثير حدود عادم لـ f . نضع

$$P = a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0$$

لتكن λ قيمة ذاتية لـ f ، v شعاع ذاتي مرفق لـ λ

إذن $f(v) = \lambda v$. لدينا

$$P(f)(v) = (a_n f^n + \cdots + a_1 f + a_0)(v)$$
$$= a_n f^n(v) + \cdots + a_1 f(v) + a_0 v$$
$$= a_n \lambda^n v + \cdots + a_1 \lambda v + a_0 v$$
$$= (a_n \lambda^n + \cdots + a_1 \lambda + a_0) \cdot v$$

$$P(f) = 0 \Rightarrow P(f)(v) = 0 \Rightarrow (a_n \lambda^n + \cdots + a_1 \lambda + a_0) \cdot v = 0$$

بما أن $v \neq 0$ فإن $a_n \lambda^n + \cdots + a_1 \lambda + a_0 = 0$

ومنه $\boxed{P(\lambda) = 0}$.

فرضية : ليكن V ف.ش ذو بعد منته n على K.
و $f: V \to V$ ت.خ . نفرض أنه يوجد كثير حدود
$P \in K[X]$ قابل للتفكيك (جميع جذوره في K)
وجميع جذوره بسيطة بحيث $P(f)=0$ ، إذن f
قابل للتقطير.

نتيجة : ① f قابل للتقطير إذا وفقط إذا وجد كثير
حدود قابل للتفكيك في $K[X]$ له جذور بسيطة ومعادم
لـ f.

② f قابل للتقطير $\Leftrightarrow$ كثير الحدود الاصغري لـ f
يملك سوى جذور بسيطة

الشكل المثلثي (Triangularisation):

تعريف : ① ليكن V ف.ش ذو بعد n على الحقل K و $f: V \to V$
ت.خ. نقول عن f أنه ثلوثي إذا وجد أساس لـ V
بحيث تكون المصفوفة المرافقة لـ f بالنسبة إلى ذلك
الأساس مثلثية.

② لتكن $A \in M_n(K)$. نقول عن المصفوفة A أنها ثلوثية
(Triangularisable ou Trigonalisable) إذا كانت مشابهة لمصفوفة مثلثية
(عليا أو سفلى).

نظرية: ليكن V ف.ش ذو بعد منته على الحقل K و $f: V \to V$ تطبيق خطي، فإن f ثلوث إذا وفقط إذا كان كثير الحدود المميز لـ f قابل للتفكيك في $K[X]$.

البرهان: نفرض أن f ثلوث (قابل للتثليث) ولتكن A مصفوفة مثلثية مرفقة لـ f بالنسبة لأساس معين لـ V.

نفرض أن A من الشكل:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Det}(A - \lambda I_n) = (a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)\cdots(a_{nn}-\lambda) = P_f(\lambda)$$

إذا $P_f(\lambda)$ قابل للتفكيك في $K[X]$ و $a_{11}, \ldots, a_{nn}$ هي القيم الذاتية لـ f.

العكس نفرض أن $P_f(\lambda)$ قابل للتفكيك في $K[X]$.

نبرهن بالتراجع على n بعد V. من أجل $n=1$ النتيجة بديهية
نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل فضاء شعاعي بعده $\leq (n-1)$ ونبرهن الخاصية من n.

نفرض أن $P_f(x) = (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\cdots(x-\lambda_n)$
حيث $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ هم القيم الذاتية لـ f التي ليست بالضرورة مختلفة جميعها.

ليكن v_1 شعاع ذاتي مرفق للقيمة الذاتية λ_1.

أي $f(v_1) = \lambda_1 v_1$

حسب نظرية الأساس غير التام ، يوجد أساس

$B = \{v_1, u_2, u_3, \dots, u_n\}$ لـ V و

$$A = M(f, B, B) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$B_1 = \{u_2, \dots, u_n\}$ أساس لفضاء شعاعي جزئي F من E.

وإذا كان $G = \langle v_1 \rangle$ فإن $E = G \oplus F$

نعرف التطبيق الخطي $g : F \longrightarrow F$ حيث

$$A_1 = M(g, B_1, B_1) = \begin{pmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

لدينا $P_f(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda) P_g(\lambda)$

$\Leftarrow$ $P_g(\lambda)$ قابل للتفكيك في $K[x]$. وبما أن

$\dim F = n-1$ ، حسب خاصية التراجع ، يوجد أساس

$B_2 = \{v_2, \dots, v_n\}$ لـ F حيث $M(g, B_2, B_2)$ مصفوفة

مثلثية عليا. نضع $B' = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ، وإذن

$M(f, B', B')$ سوف تكون مصفوفة مثلثية عليا.

~~مثال~~ نتيجة: كل أندومورفيزم لـ V قابل للتثليث

(تلوث) على $\mathbb{C}$.

تعريف : نسمي مصفوفة جوردان (Jordan) من الدرجة n كل مصفوفة مثلثية عليا من الشكل

$$J=\begin{pmatrix} \lambda_1 & \alpha_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \alpha_3 & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \alpha_{n} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

حيث $\alpha_i = 0$ أو 1 ، $i = 2,3,\dots,n$

و λ_j هم القيم الذاتية لـ J

أو للأندومورفيزم المرفق لـ J .

مثال : كل مصفوفة قطرية هي مصفوفة جوردان

ملاحظة : كل مصفوفة مربعة A مشابهة لمصفوفة جوردان تسمى إختزال جواردان لـ A .

مثال : لتكن التطبيق الخطي

$$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x,y,z) \longmapsto (-z, x-y-z, y-2z)$$

أثبت أن f قابل للتثليث على $\mathbb{R}$.

لتكن $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ المصفوفة المرفقة لـ f

$A = M(f,B,B)$ بالنسبة B للأساس القانوني لـ $\mathbb{R}^3$ " $\{e_1,e_2,e_3\}$

$$P_A(X) = \det(A - XI_3) = \begin{vmatrix} -X & 0 & -1 \\ 1 & -1-X & -1 \\ 0 & 1 & -2-X \end{vmatrix} = -(X^3+3X^2+3X+1)$$
$$= -(X+1)^3.$$

$P_A(x)$ قابل للتفكيك على $\mathbb{R}$ ، ومنه A قابلة للتثليث على $\mathbb{R}$.

A قابلة للتثليث على $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ توجد مصفوفة مثلثية مشابهة لـ A و P مصفوفة قابلة للقلب. بحيث

$T = P^{-1} \cdot A \cdot P$ و $T = \begin{pmatrix} -1 & a & b \\ 0 & -1 & c \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

ليكن $B' = \{v_1, v_2, v_3\}$ أساس لـ $\mathbb{R}^3$ بحيث $M(f, B', B') = T$

لدينا $\begin{cases} f(v_1) = -v_1 & \cdots (1) \\ f(v_2) = av_1 - v_2 & \cdots (2) \\ f(v_3) = bv_1 + cv_2 - v_3 & \cdots (3) \end{cases}$

(*) من (1) نجد أن v_1 شعاع ذاتي مرفق للقيمة الذاتية $\lambda = 1$.

$V_\lambda = Ker(A + I_3) = \{v \in \mathbb{R}^3 / (A + I_3)v^t = 0\}$

$= \langle (1,1,1) \rangle$ ، $\boxed{\dim V_\lambda = 1}$

يمكن أخذ $\boxed{v_1 = (1,1,1)}$

من (2) نجد أن $f(v_2) + v_2 = (f + id)(v_2) = av_1$. بما أن

$\dim V_\lambda = 1$ فإن $a \neq 0$. لإيجاد مصفوفة

جوردان يمكن أخذ $\boxed{a = 1}$

من (3) ، لدينا $\cancel{f(v_3) + v_3 = bv_1 + cv_2}$

$(2) \Leftrightarrow (f + id)(v_2) = v_1 \Leftrightarrow (A + I_3) v_2^t = v_1^t$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow x = y = z + 1$

نأخذ $v_2 = (1,1,0)$

$③ \Leftrightarrow f(v_3)+v_3=(f+id)(v_3)=bv_1+cv_2$

وإذا كان $b=c=0$ فإن v_3 شعاع ذاتي مرفق لـ $\lambda=1$

وهذا غير ممكن لأن $\dim V_\lambda=1$ و v_1 و v_3 مستقلان

خطيا. إذاً $b\neq 0 \vee c\neq 0$. من أجل الحصول على

شكل جوردان نأخذ $b=0 \wedge c=1$.

$$(f+id)(v_3)=v_2 \Leftrightarrow (A+I_3)(v_3^t=v_2^t$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x=z+1 \\ y=z \end{cases}$$

نأخذ $v_3=(1,0,0)=e_1$

ومنه

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad T=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

لدينا

$$P^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \boxed{P^{-1}AP=T}$$