Chapitre 3 :

Equations différentielles d'ordre 2

à coefficients constants

Définitions.

- Les équations différentielles **d'ordre 2** (du second ordre) à coefficients constants sont données par la forme

$$ay'' + by' + cy = \varphi(x) \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (\boldsymbol{E_s})$$

Avec $\varphi(x)$ est une fonction continue et , $b, c \in \mathbb{R}$.

- L'équation différentielle homogène associée à l'équation (E) est sous la forme

$$ay'' + by' + cy = 0 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (\boldsymbol{E_h})$$

- L'équation caractéristique associé à l'équation (E_h) est donnée par

$$ar^2 + br + c = 0 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (\boldsymbol{E_c})$$

On note $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de cette équation.

Résolution de l'équation $(\boldsymbol{E_h})$.

Nous avons trois cas :

1^er^ cas. Si $\Delta > 0$, l'équation $(\boldsymbol{E_c})$ possède deux racines $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ $(r_1 \neq r_2)$. Les solutions sont

$$y(x) = k_1 e^{r_1 x} + k_2 e^{r_2 x} \quad \text{avec } k_1, k_2 \in \mathbb{R}$$

2^ème^ cas. Si $\Delta = 0$, l'équation $(\boldsymbol{E_c})$ possède une racine $r_0 \in \mathbb{R}$. Les solutions sont données par

$$y(x) = k_1 e^{r_0 x} + k_2 x e^{r_0 x} = (k_1 + k_2 x) e^{r_0 x} \quad \text{avec } k_1, k_2 \in \mathbb{R}$$

3^ème^ cas. Si $\Delta < 0$, l'équation $(\boldsymbol{E_c})$ possède deux racines complexes conjuguées $r_1 = \alpha + i\beta, r_2 = \alpha - i\beta$. Les solutions générales sont données par

$$y(x) = (k_1 \cos(\beta x) + k_2 \sin(\beta x)) e^{\alpha x} \quad \text{avec } k_1, k_2 \in \mathbb{R}$$

Résumé.

Δ	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
Racines	$r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ $(r_1 \neq r_2)$	$r_0 \in \mathbb{R}$	$r_1 = \alpha + i\beta$, $r_2 = \alpha - i\beta$
Solution	$y(x) = k_1 e^{r_1 x} + k_2 e^{r_2 x}$	$y(x) = (k_1 + k_2 x) e^{r_0 x}$	$y(x) = (k_1 \cos(\beta x) + k_2 \sin(\beta x)) e^{\alpha x}$

R. BELHADEF

Exemples.

1) Soit l'équation différentielle sans second membre : $2y" - 3y' + y = 0$. L'équation caractéristique admet deux racines réelles $r_1 = 1$, $r_2 = 2$. Alors la solution est donnée par

$$y(x) = k_1 e^x + k_2 e^{2x} \quad \text{avec } k_1, k_2 \in \mathbb{R}$$

2) Soit l'équation différentielle sans second membre : $y" - 2y' + y = 0$. L'équation caractéristique admet une racine double $r_0 = 1$. Alors la solution est donnée par

$$y(x) = (k_1 + k_2 x)e^x \quad \text{avec } k_1, k_2 \in \mathbb{R}$$

3) Soit l'équation différentielle sans second membre : $y" - 2y' + 5y = 0$. L'équation caractéristique admet deux racines complexes conjuguées $r_1 = 1 + 2\mathrm{i}, r_2 = 1 - 2\mathrm{i}$. Alors la solution est

$$y(x) = (k_1 \cos(2x) + k_2 \sin(2x))e^x \quad \text{avec } k_1, k_2 \in \mathbb{R}$$

Résolution de l'équation $(\boldsymbol{E_s})$.

Théorème.

Si y_p est une solution particulière de l'équation $(\boldsymbol{E_s})$ et y_h est une solution de l'équation $(\boldsymbol{E_h})$ **,** alors les solutions générales de $(\boldsymbol{E_s})$ sont données par :

$$y_g = y_p + y_h$$

Proposition1. Si le second membre de l'équation $(\boldsymbol{E_s})$ s'écrit : $\varphi(x) = e^{\alpha x} P(x)$ où P est un polynôme et $\alpha \in \mathbb{C}$. Alors la solution particulière est donnée par l'une des formes suivantes :

- $y_p = e^{\alpha x} Q(x)$, si α n'est pas une racine de l'équation $(\boldsymbol{E_c})$.
- $y_p = x e^{\alpha x} Q(x)$, si α est une racine simple de l'équation $(\boldsymbol{E_c})$.
- $y_p = x^2 e^{\alpha x} Q(x)$, si α est une racine double de l'équation $(\boldsymbol{E_c})$.

où Q est un polynôme tel que $\deg(Q) = \deg(P)$

Exemple. Soit l'équation différentielle suivante

$$y'' \;-\; 5y' \;+\; 6y \;=\; (x-3)\, e^{2x}$$

L'équation caractéristique admet les racines $r_1 = 3$ et $r_2 = 2$. Donc la solution de l'équation homogène est

$$y(x) = k_1 e^{3x} + k_2 e^{2x} \quad \text{avec } k_1, k_2 \in \mathbb{R}$$

Pour chercher une solution particulière de l'équation avec second membre, on remarque que $\alpha = 2$ est une racine simple de l'équation caractéristique. Donc on cherche la solution sous la forme :

$$y_p = x e^{2x} Q(x)$$

R. BELHADEF

où Q est un polynôme tel que $\deg(Q) = \deg(P) = 1$ (ici $P(x) = x - 3$). C'est-à-dire $Q(x) = ax + b$, d'où :

$$y_p = e^{2x}(ax^2 + bx)$$

On dérive, on trouve

$$y'_p = e^{2x}(2ax^2 + 2(a+b)x + b) \quad , \quad y''_p = e^{2x}(4ax^2 + 4(2a+b)x + 2(a+b))$$

On remplace dans l'équation différentielle, on trouve

$$\begin{cases} a = -\dfrac{1}{2} \\ b = \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

Alors $y_p = e^{2x}(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x)$

Enfin, la solution générale de l'équation avec second membre est

$$y_g = y_p + y_h = e^{2x}\left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x\right) + k_1 e^{3x} + k_2 e^{2x} \quad \text{avec } k_1, k_2 \in \mathbb{R}$$

Proposition2.

Si le second membre de l'équation $(\boldsymbol{E_s})$ s'écrit

$$\varphi(x) = e^{\alpha x}(P_1(x)\cos(\beta x) + P_2(x)\sin(\beta x))$$

où P_1, P_2 sont des polynômes et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Alors la solution particulière est donnée par l'une des formes suivantes :

- $y_p = e^{\alpha x}(Q_1(x)\cos(\beta x) + Q_2(x)\sin(\beta x))$, si $\alpha + i\beta$ n'est pas une racine de l'équation $(\boldsymbol{E_c})$.
- $y_p = xe^{\alpha x}(Q_1(x)\cos(\beta x) + Q_2(x)\sin(\beta x))$, si $\alpha + i\beta$ est une racine de l'équation $(\boldsymbol{E_c})$.

où Q_1, Q_2 sont des polynômes tel que

$$\deg(Q_1) = \deg(Q_2) = \max\{\deg(P_1), \deg(P_2)\}$$

Méthode de variation des constantes.

On suppose que les constantes k_1 et k_2 sont des fonctions inconnues, et on cherche la solution générale de l'équation $(\boldsymbol{E_s})$ sous la forme :

$$y(x) = k_1(x)y_1(x) + k_2 y_2(x)$$

R. BELHADEF

Avec $y_1(x), y_2(x)$ sont les fonctions données par l'équation homogène $(\boldsymbol{E_h})$. Dans ce cas nous avons le système suivant

$$\begin{cases} k'_1(x)y_1(x) + k'_2y_2(x) = 0 \\ k'_1(x)y'_1(x) + k'_2y'_2(x) = \dfrac{\varphi(x)}{a} \end{cases}$$

Exemple. Déterminer les solutions de l'équation différentielle ordinaire d'ordre 2

$$y" - y = \frac{1}{e^x + 2}$$

L'équation homogène $y" - y = 0$ admet pour solution

$$y_h = k_1e^{-x} + k_2e^x \quad \text{avec } k_1, k_2 \in \mathbb{R}$$

On cherche la solution particulière sous la forme $y_p = u(x)e^{-x} + v(x)e^x$, telle que $u\ et\ v$ sont des fonctions à déterminer vérifiant :

$$\begin{cases} u'e^{-x} + v'e^x = 0 \\ -u'e^{-x} + v'e^x = \dfrac{1}{e^x + 2} \end{cases}$$

Alors, on trouve : $u'(x) = \frac{e^x}{2(e^x+2)}$, $v'(x) = \frac{e^{-x}}{2(e^x+2)}$

En utilisant le changement de variable $= e^x$, on aura

$$u(x) = \int \frac{e^x}{2(e^x + 2)} \mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\ln(e^x + 2)$$

$$v(x) = \int \frac{e^{-x}}{2(e^x + 2)} \mathrm{d}x = \frac{1}{4}(-x + \ln(e^x + 2) - 2e^{-x})$$

Finalement, la solution générale

$$y_g = k_1e^{-x} + k_2e^x + \ln(e^x + 2)\left(\frac{e^x}{4} - \frac{e^{-x}}{2}\right) - \frac{xe^x}{4} - \frac{1}{2}$$

R. BELHADEF