Variables aléatoires

Définition : Une variable aléatoire X est une application de l'ensemble fondamental Ω dans $\mathbb{R}$, $X:\Omega \to \mathbb{R}$, telle que l'inverse de chaque intervalle de $\mathbb{R}$ est un événement de Ω.

On distingue deux types de variables aléatoires :

1. Les variables aléatoires discrètes
2. Les variables aléatoires continues

Variables aléatoires discrets

Une variable aléatoire est dite discrète si elle peut prendre un nombre fini de valeurs isolées (exemple : valeurs entières).

Exemple : En lançant un dé à six faces numérotées et en observant la face supérieure, l'ensemble fini des valeurs obtenues est : 1,2, 3, 4, 5, 6.

Loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète

Soit X une variable aléatoire sur un ensemble fondamental Ω à valeurs finies, c'est-à-dire $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Si l'on définit la probabilité $P(X = x_i) = P_i$ des valeurs x_i. Cette probabilité $P(X = x_i) = P_i$, est appelée la distribution ou la loi de probabilité de X, que l'on donne habituellement sous la forme du tableau suivant

x_i	x_1	x_2	x_3	…	x_n
$P(X = x_i)$	$P(X = x_1)$	$P(X = x_2)$	$P(X = x_3)$		$P(X = x_n)$

La loi de probabilité satisfait les conditions

$$0 \leq \boldsymbol{P}(\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x_i}) \leq 1 \text{ et } \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{P}(\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x_i}) = 1$$

Exemple 1 : On jette une paire de dés bien équilibrés et on obtient l'ensemble fondamental Ω dont les éléments sont les 36 couples ordonnés des nombres allant de 1 à 6.

$$\Omega = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),\\ (2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),\\ (3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),\\ (4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),\\ (5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),\\ (6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}$$

On suppose que la v. a. X est le maximum de point (a,b) de Ω, c'est-à-dire $X(a,b) = \max(a,b)$, alors X sera définie par :

$$X(\Omega) = \{1,2,3,4,5,6\}.$$

$$p(X=1) = p(\{(1,1)\}) = \frac{1}{36},$$

$$p(X=2) = p(\{(1,2),(2,1),(2,2)\}) = \frac{3}{36},$$

$$p(X=3) = p(\{(1,3),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}) = \frac{5}{36},$$

$$p(X=4) = p(\{(1,4),(2,4),(3,4),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4)\}) = \frac{7}{36},$$

De la même façon

$p(X=5) = \frac{9}{36}$ et $p(X=6) = \frac{11}{36}$

Cette information se résume dans le tableau suivant

x_i	1	2	3	4	5	6
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

On suppose maintenant une autre variable aléatoire Y, c'est la somme de composantes des couples (a,b), c'est-à-dire $Y(a,b) = a + b$, alors Y est définie par

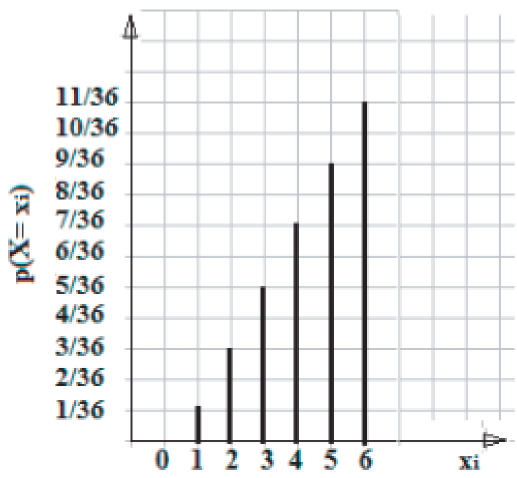
$$Y(\Omega) = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}.$$

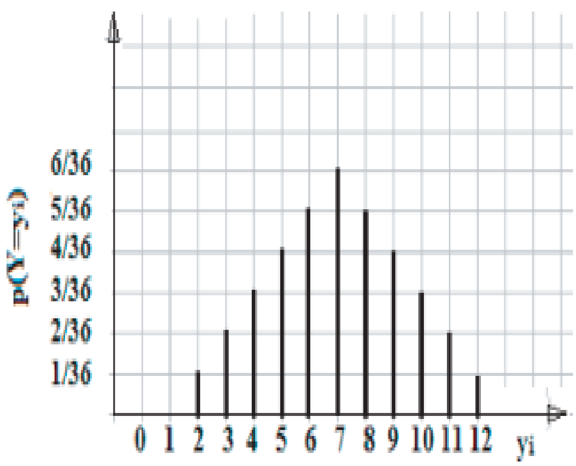
La distribution de Y est donnée dans le tableau suivant

y_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$p(Y = y_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Fonction de distribution et de répartition

1. **Fonction de distribution**
   Cette fonction indique la loi de probabilité de la v. a. X. Elle est représentée par un diagramme en bâtons.
   Exemple 2 : Les diagrammes qui suivant, donnent une description graphique des distributions des variables aléatoires X et Y de l'exemple précédent





2. **Fonction de répartition**

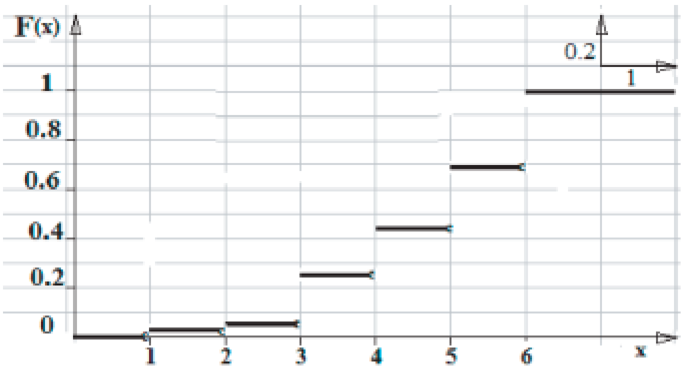
La fonction de répartition donne la probabilité que la variable aléatoire X prenne une valeur inférieure à x. La fonction de répartition est définie par :

$$F(x) = p(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p(X = x_i).$$

Remarque : La représentation graphique de la fonction de répartition dans le cas discret prend la forme d'un diagramme en escaliers.

F est monotone croissante et prend ses valeurs dans $[0,1]$.

Exemple 3 : La fonction de répartition de la variable aléatoire X est donnée par :



Courbe de la fonction de répartition de la v. a. X.

Espérance mathématique d'une variable aléatoire discrète

Définition : on appelle espérance mathématique d'une variable aléatoire discrète X et on note $E(X)$ la quantité :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{+\infty} x_i P(X = x_i)$$

Exemple 4 : On reprend l'exemple 1.

- L'espérance mathématique de la variable aléatoire X est

$$E(X) = \sum_{i=1}^{+\infty} x_i P(X = x_i)$$
$$= 1.\frac{1}{36} + 2.\frac{3}{36} + 3.\frac{5}{36} + 4.\frac{7}{36} + 5.\frac{9}{36} + 6.\frac{11}{36}$$
$$= \frac{161}{36} = 4{,}47$$

- L'espérance mathématique de la variable aléatoire Y est

$$E(Y) = \sum_{i=1}^{+\infty} y_i P(Y = y_i)$$
$$= 2.\frac{1}{36} + 3.\frac{2}{36} + 4.\frac{3}{36} + 5.\frac{4}{36} + 7.\frac{6}{36} + 8.\frac{5}{36} + 9.\frac{4}{36} + 10.\frac{3}{36} + 11.\frac{2}{36} + 12.\frac{1}{36}$$
$$= \frac{252}{36} = 7.$$

Propriétés de $E(X)$: Désignons par X et Y deux variables aléatoires définies sur Ω, α et β deux constantes réelles.

1. $E(\alpha.X) = \alpha.E(X), \forall\alpha \in \mathbb{R}$
2. $E(\alpha.X + \beta) = \alpha.E(X) + \beta,\ \forall\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
3. $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$
4. $E(\alpha.X + \beta.Y) = \alpha\, E(X) + \beta\, E(Y),\ \forall\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Variance et écart type d'une variable aléatoire discrète

Définition: on appelle variance d'une variable aléatoire discrète X et l'on note $V(X)$ la quantité:

$$V(X) = \sum_{i=1}^{+\infty} \left(x_i - E(X)\right)^2 P(X = x_i)$$

L'écart type d'une v. a., que l'on note $\sigma(X)$ est la racine carrée de $V(X)$:

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

Exemple 5 : Considérons les variables aléatoires X et Y de l'exemple 1, avec leurs moyennes $E(X) = 4{,}47$ et $E(Y) = 7$.

- La variance de la variable aléatoire X est donnée par $V(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2$, avec

$$E(X^2) = \sum_{i=1}^{+\infty} {x_i}^2 P(X = x_i)$$
$$= 1^2.\frac{1}{36} + 2^2.\frac{3}{36} + 3^2.\frac{5}{36} + 4^2.\frac{7}{36} + 5^2.\frac{9}{36} + 6^2.\frac{11}{36}$$
$$= \frac{191}{36} = 21{,}97$$

Par conséquent $V(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2 = 21{,}97 - (4{,}47)^2 = 1{,}99$
et $\sigma(X) = \sqrt{1{,}99} = 1{,}4$.

- La variance de la variable aléatoire Y est donnée par $V(Y) = E(Y^2) - \left(E(Y)\right)^2$, avec

$$E(Y^2) = \sum_{i=1}^{+\infty} {y_i}^2 P(Y = y_i)$$
$$= 2^2.\frac{1}{36} + 3^2.\frac{2}{36} + 4^2.\frac{3}{36} + 5^2.\frac{4}{36} + 7^2.\frac{6}{36} + 8^2.\frac{5}{36} + 9^2.\frac{4}{36} + 10^2.\frac{3}{36} + 11^2.\frac{2}{36} + 12^2.\frac{1}{36}$$
$$= 54{,}8.$$

Par conséquent $V(Y) = E(Y^2) - \left(E(Y)\right)^2 = 54{,}8 - (7)^2 = 5{,}8$ et $\sigma(X) = \sqrt{5{,}8} = 2{,}4$.

Propriétés de $V(X)$ et $\sigma(X)$: Désignons par X et Y deux variables aléatoires définies sur Ω, α et β deux constantes réelles.

1. $V(\alpha.X) = \alpha^2.V(X), \forall\alpha \in \mathbb{R}$
2. La variance d'une constante est nulle : $V(\alpha) = 0, \forall\alpha \in \mathbb{R}$
3. $V(\alpha.X + \beta) = \alpha^2.V(X),\ \forall\alpha,\beta \in \mathbb{R}$
   d'où
4. $\sigma(X + \alpha) = \sigma(X),\ \forall\alpha \in \mathbb{R}$
5. $\sigma(\alpha.X) = |\alpha|\sigma(X), \forall\alpha \in \mathbb{R}$

Variables aléatoires continues

Une variable aléatoire est dite continue si elle peut prendre toutes valeurs comprises dans un intervalle $]a, b]$.

Exemple 6 : Le poids d'un enfant à la naissance est compris entre 2,7 kg et 5,6 kg.

Fonction de répartition

La fonction de répartition d'une variable continue X est définie par

$$F_X(x) = p(X \leq x).$$

La fonction F_X indique la probabilité que X soit strictement inférieure à tout x de l'intervalle de définition.

Propriétés

1. F_X est positive et : $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0,\quad \lim_{x\to+\infty} F_X(x) = 1.$
2. Si la fonction F_X est continue et admet une dérivée, la variable aléatoire est dite absolument continue.
3. La représentation graphique de F_X prend la forme d'une courbe cumulative.

Densité de probabilité

Soit X une variable aléatoire dont l'ensemble de valeurs $X(\Omega)$ est l'intervalle $[a, b]$.

Rappelons que par définition

$$p(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

La fonction f est la distribution (densité de probabilité) de la variable aléatoire continue X. Cette fonction satisfait les conditions suivantes :

1. $f(x) \geq 0$ et $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

Espérance mathématique et variance d'une variable aléatoire continue

Définition:

On appelle espérance mathématique d'une variable aléatoire continue X dont la loi de probabilité f la quantité :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

Définition:

On appelle variance d'une variable aléatoire continue X dont la loi de probabilité est f la quantité:

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x_i - E(X)\right)^2 f(x)dx$$

Remarque: bien entendu, les propriétés énoncés dans le cas discret restent applicable à la variable continue

Par définition, l'écart type est donné par $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Exemple 7 : Soit X une variable aléatoire ayant une densité de probabilité (fonction de distribution) :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(2-x), & si\ 0 \leq x \leq 2, \\ 0, & si\ x \in]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[\end{cases}$$

1. La densité de probabilité vérifie :

$$f(x) \geq 0, \forall x \in [0,2] \text{ et } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$$

En effet

$\forall x \in [0,2]$, on a $0 \leq f(x) \leq 1$ et $f(x) = 0$ ailleurs :

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx &= \int_0^2 f(x)dx \\ &= \int_0^2 \frac{1}{2}(2-x)dx \\ &= 1\end{aligned}$$

2. La fonction de répartition F est :

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \begin{cases} 0, & si \quad x < 0 \\ x - \frac{1}{4}x^2, & si \quad 0 \leq x \leq 2, \\ 1, & si \quad x > 2. \end{cases}$$