التكامل المشترك و نماذج تصحيح الخطأ.

قدم تحليل التكامل المشترك "Cointégration" من طرفGranger سنة 1983 و من طرف Engel&Granger سنة 1987، و قد اعتبره الاقتصاديون مفهوما جديدا له أهمية كبيرة في مجال القياس الاقتصادي و تحليل السلاسل الزمنية[1].

- عموميات عن التكامل المشترك.

يسمح تحليل التكامل المشترك بتحديد جيد و واضح للعلاقة الحقيقية بين المتغيرات، و هذا بالبحث عن و جود شعاع إدماج ثم إزالته.

- خصائص رتبة التكامل: نقول أن السلسلة x_t متكاملة من الرتبة " d " إذا ما تطلب جعلها مستقرة " d " من الفروق.

- لتكن السلسلة x_t مستقرة و السلسلة y_t متكاملة من الرتبة "1".

$$\left.\begin{array}{l} x_t \rightarrow I(0) \\ y_t \rightarrow I(1) \end{array}\right\} \Rightarrow x_t + y_t \rightarrow I(1)$$

- لتكن السلسلتين x_t و y_t سلسلتين متكاملتين من نفس الرتبة " d ".

$$\left.\begin{array}{l} x_t \rightarrow I(d) \\ y_t \rightarrow I(d) \end{array}\right\} \Rightarrow x_t + y_t \rightarrow I(?)$$

رتبة تكامل التوفيقة الخطية $\alpha x_t + \beta y_t$ مرتبطة بإشارة المعاملين α و β.

إذا كان α و β من نفس الإشارة، فالتوفيقة الخطية متكاملة من الرتبة " d ".

إذا كان α و β مختلفين في الإشارة، فالتوفيقة الخطية مستقرة أي $\alpha x_t + \beta y_t \rightarrow I(0)$.

- لتكن x_t و y_t سلسلتان مختلفتان في رتبة التكامل:

$$\left.\begin{array}{l} x_t \rightarrow I(d) \\ y_t \rightarrow I(d') \end{array}\right\} \Rightarrow x_t + y_t \rightarrow I(?)$$

غير ممكن جمع سلسلتين مختلفتين في الإشارة.

- لتكن السلسلتان x_t و y_t، إذا كان لهما اتجاه نمو ثابت في الفترة الأولى، ثم اتجاه نمو متباعد في الفترة الثانية، فالسلسلتين ليستا في تكامل مشترك.
- لتكن السلسلتين x_t و y_t، إذا كان لهما اتجاه نمو ثابت على طول فترة الدراسة، فالسلسلتان في تكامل مشترك.

- شروط التكامل المشترك: نقول أن السلسلتين x_t و y_t في تكامل مشترك، إذا تحقق الشرطان التاليان:

[1] - R.Bourbounnais , opcit, P277.

- السلسلتان x_t و y_t لهما اتجاه عام عشوائي من نفس رتبة التكامل " d ".
- التوفيقة الخطية لهاتين السلسلتين تعطي سلسلة ذات رتبة تكامل أقل من رتبة تكامل السلسلتين، أي إذا كان :

$$\left.\begin{array}{l} x_t \rightarrow I(d) \\ y_t \rightarrow I(d) \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha\, x_t + \beta\, y_t \rightarrow I(d-b)$$

حيث: $d \geq b \geq 0$.

و نكتب: $x_t, y_t \rightarrow CI(d.b)$ و $(\alpha.\beta)$ شعاع الإدماج " vecteur de cointégration ".

- التكامل المشترك بين k متغيرة.

إن الدراسات الحالية للاقتصاد الكلي و التي تدرس نظرية التوازن، تبين أن كل سلسلة زمنية مستقرة يمكن أن تكون نتيجة لتوفيقة بين عدد من المتغيرات غير المستقرة، و تكون دراسة التكامل المشترك بين k متغيرة معقدة جدا، و ذلك لاحتمال وجود عدة أشعة تعبر عن علاقة التكامل المشترك.

3-3-4-2-1- مفهوم التكامل المشترك بين k متغيرة: ليكن لدينا نموذج قياسي يحتوي على k متغيرة مفسرة، حيث:

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_{1t} + \cdots\cdots + \beta_k x_{kt} + \varepsilon_t$$

إذا كانت المتغيرات y_t و x_{it} غير مستقرة $(i = 1...k)$، مثلا ذات رتبة تكامل من الدرجة الأولى، في هذه الحالة يكون هناك احتمال وجود تكامل مشترك بين المتغيرات، فإذا وجدت توفيقة خطية مستقرة لهذه المتغيرات، فإن هذه المتغيرات في تكامل مشترك، و بتطبيق طريقة المربعات الصغرى العادية على النموذج يمكن حساب البواقي: $e_t = y_t - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1\, x_{1t} - \cdots\cdots - \hat{\beta}_k\, x_{kt}$.

إذا كانت البواقي مستقرة، فإننا نقبل فرضية وجود التكامل المشترك بين المتغيرات، و شعاع الإدماج يعطى بالشكل التالي: $\left[1, -\hat{\beta}_0, -\hat{\beta}_1, ..., -\hat{\beta}_k\right]$.

بصفة عامة إذا كان لدينا نموذج بمتغير تابع واحد و k متغيرة تفسيرية، أي أن هناك $k+1$ متغيرة فإنه من المحتمل وجود k شعاع إدماج مستقلة خطيا تعبر عن علاقة التكامل المشترك، و عدد أشعة الإدماج تسمى: رتبة التكامل المشترك" rang de cointégration".

إذا كانت المتغيرات من نفس رتبة التكامل، في هذه الحالة احتمال وجود وشعاع إدماج وحيد أمر ممكن، أما إذا كانت السلاسل مختلفة في رتبة التكامل فمن المؤكد أن شعاع التكامل ليس وحيد.

عمليا لاختبار فرضية التكامل المشترك بين المتغيرات يجب إجراء الاختبار على $k+1$ متغيرة، بعدها في حالة وجود التكامل المشترك بينها يمكننا إجراء الاختبار على مختلف التوفيقات بين هذه المتغيرات لتعيين نوع علاقة التكامل المشترك.

تقدير نموذج تصحيح الخطأ: إذا كانت هناك علاقة تكامل مشترك بين المتغيرات، فإننا نكون أمام حالتين:

- وجود شعاع إدماج وحيد ناتج عن علاقة التكامل المشترك.

- وجود عدة أشعة إدماج.

❖ في حالة وجود شعاع إدماج وحيد نطبق طريقة Engel&Granger، و التي تتم على مرحلتين:

- المرحلة الأولى: تقدير علاقة المدى الطويل بـ: MCO و حساب البواقي.

$$e_t = y_t - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1\, x_{1t} - \cdots\cdots - \hat{\beta}_k\, x_{kt}$$

- المرحلة الثانية: تقدير علاقة المدى القصير بـ: MCO .

$$\Delta\, y_t = \alpha_1 \Delta\, x_{1t} + \alpha_2\, x_{2t} + \cdots\cdots + \alpha_k x_{kt} + \gamma_1 e_{t-1} + u_t$$

المعامل γ_1 يمثل قوة الإرجاع نحو التوازن، و يجب أن يكون سالبا.

❖ في حالة وجود عدة أشعة إدماج، تكون طريقة Engel&Granger غير مجدية والحساب بطريقة المربعات الصغرى غير فعال، وعليه نلجأ إلى التقدير باستخدام طرق أخرى لإيجاد نموذج تصحيح الخطأ الشعاعي.

اختبار علاقة التكامل المشترك: لتحديد عدد علاقات التكامل المشترك $Johansen\,(1988)$ اقترح اختبارا يقوم على حساب القيم الذاتية لمصفوفة نحصل عليها بعد مرحليتن هما:

- المرحلة الأولى: حساب البواقي الانحدارين التاليين:

$$\Delta y_t = \hat{A}_0 + \hat{A}_1 \Delta y_{t-1} + \hat{A}_2 \Delta y_{t-2} + \ldots\ldots + \hat{A}_P \Delta y_{t-P} + u_t$$
$$y_{t-1} = \hat{A}_0 + \hat{A}_1 \Delta y_{t-1} + \hat{A}_2 \Delta y_{t-2} + \ldots\ldots + \hat{A}_P \Delta y_{t-P} + u_t$$

حيث: $y_t = \begin{pmatrix} y_{1.t} \\ y_{2.t} \\ \vdots \\ y_{k.t} \end{pmatrix}$

في هذين النموذجين لدينا نفس المتغيرات التفسيرية، و الاختلاف يكمن في المتغيرات التابعة فقط.

u_t و v_t: مصفوفات البواقي ذات البعد $(k \times n)$، n عدد المشاهدات و k عدد المتغيرات.

- المرحلة الثانية: حساب المصفوفة التي تمكننا من حساب القيم الذاتية.

نقوم بحساب أربع مصفوفات للتباينات والتباينات المشتركة ذات البعد $(k \times k)$ انطلاقا من البواقي u_t و v_t .

$$\hat{\Sigma}_{uu} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} u_t u_t' \;.\hat{\Sigma}_{vv} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} v_t v_t' \;.\hat{\Sigma}_{uv} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} u_t v_t' \;.\hat{\Sigma}_{vu} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} v_t u_t'$$

نقوم بحساب k قيمة ذاتية للمصفوفة M ذات البعد $(k \times k)$ و التي تعطى بالعلاقة التالية:

$$M = \hat{\Sigma}_{vv}^{-1}\, \hat{\Sigma}_{vu}\, \hat{\Sigma}_{uu}^{-1}\, \hat{\Sigma}_{uv}$$

و انطلاقا من هذه القيم الذاتية نقوم بحساب الإحصائية التالية: $\lambda_{trac} = -n \sum_{i=t+1}^{k} Ln(1-\lambda_i)$.

حيث: n : عدد المشاهدات.

λ_i : القيمة الذاتية رقم i للمصفوفة M، k : عدد المتغيرات، r : رتبة المصفوفة M .

هذه الإحصائية تتبع توزيع احتمالي (يشبه توزيع χ^2) مجدولة من طرف Johansen&Juselin(1990).

هذا الاختبار يعتمد على إقصاء الفرضيات المتناوبة.

➢ رتبة المصفوفة η تساوي الصفر" $r=0$ "، الاختبار يأخذ الشكل التالي:

$$\begin{cases} H_0 : r = 0 \\ H_1 : r > 0 \end{cases}$$

- نرفض H_0 إذا كانت $\lambda_{trac} > \chi^2$.
- نرفض H_1 إذا كانت $\lambda_{trac} < \chi^2$.

إذا رفضنا H_0 فإننا نمر للاختبار الموالي.

➢ رتبة المصفوفة η تساوي الواحد" $r=1$ "، الاختبار يأخذ الشكل التالي:

$$\begin{cases} H_0 : r = 1 \\ H_1 : r > 1 \end{cases}$$

- نرفض H_0 إذا كانت $\lambda_{trac} > \chi^2$.
- نرفض H_1 إذا كانت $\lambda_{trac} < \chi^2$.

إذا رفضنا H_0 فإننا نمر للاختبار الموالي.

➢ إذا كانت كل الاختبارات تقتضي رفض H_0 ، إننا في النهاية نجري الاختبار التالي:

$$\begin{cases} H_0 : r = k-1 \\ H_1 : r = k \end{cases}$$

- نرفض H_0 إذا كانت $\lambda_{trac} > \chi^2$.
- نرفض H_1 إذا كانت $\lambda_{trac} < \chi^2$.

إذا قبلنا الفرضية H_1 ، أي رتبة المصفوفة η تساوي k ، فلا توجد علاقة تكامل مشترك، لأن كل المتغيرات مستقرة $I(0)$ ، ومنه يمكن استعمال تقنية أشعة الانحدار الذاتي.