Dr. BEKKOUCHE FATIHA

Analyse combinatoire

L'analyse combinatoire est une branche des mathématiques qui étudie comment compter les objets. Elle fournit des méthodes de dénombrements particulièrement utile en théorie des probabilités.

1. Introduction

L'analyse combinatoire a pour but de compter les dispositions qui peuvent être formées à partir des éléments d'un ensemble fini d'objets. Un objet est caractérisé par :

- La place qu'il occupe dans la disposition,
- Le nombre de fois où il peut apparaître.

Notion de répétition :

Si un élément apparait plus d'une fois dans une disposition, on dit que la disposition est avec répétition, sinon, la disposition est dite sans répétition.

Notion d'ordre :

Une disposition est dite ordonnée, si lorsqu'à chaque fois qu'un élément change de place

Exemple : On considère un ensemble E ayant trois éléments $E = \{a, b, c\}$. Choisir deux éléments dans cet ensemble peut se faire de plusieurs façons différentes. Le tableau suivant, nous donne tous les cas possibles :

Disposition	Avec répétition	Sans répétition
Avec ordre(ordonnée)	Aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc	ab, ac, ba, bc, ca, cb
Sans ordre(non ordonée)	aa, ab, ac, bb, bc,cc	ab, ac, bc

Notation factorielle :

On définit pour tout nombre entier positif « n » la factorielle de n notée $n!$, par:

$$n! = \mathrm{n}(\mathrm{n}-1)(\mathrm{n}-2)\ldots 3.2.1$$

Par convention, on a 0 !=1.

3. Permutations

3.1.Permutation sans répétition

Définition: on appelle permutation sans répétition de « n » objets discernables toute disposition (ensemble d'éléments) ordonnée de ces « n » objets

Formule:

Le nombre de permutation de « n » objets est égale à $n!$ Et on écrit

$$P_n = n!$$

Exemple:

1/ Soient les 3 lettres a,b,c . On a les permutations suivantes

abc,acb,bac,bca,cab,cba

$$P_3 = 3! = 3.2.1 = 6\, permutations$$

2/ 8 personnes déjeunent autour d'une table

Combien de façon y a-t-il de les placer autour de cette table si celle-ci est en U?

Réponse:$P_8 = 8! = 40320$

Remarque: (permutation circulaire)

Nombre de permutations = $(n-1)!$

Exemple:

Si la table est ronde, il suffit de placer une première personne à un endroit précis $P_{(8-1)} = 7! = 5040$

3.2.Permutation avec répétition

Considérons un ensemble de « n » objets décomposable en $n_1$objets de type e_1, n_2 objets de type e_2 …., n_k objets de type e_k

Le nombre de permutations avec répétition a pour expression

$Pr_n(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}$ Avec $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$

Exemple:

Soit les 4 chiffres 2,2,4,4,7

Combien peut on former de nombres à 5 chiffres avec ceux-ci?

$$Pr_5(2,2,1) = \frac{5!}{2!\,2!\,1!} = 30$$

Combien de mots différents peut on former par les lettres de mot « MISSISSIPPI »

$$Pr_{11}(1,4,4,2) = \frac{11!}{1!\,4!\,4!\,2!}$$

4. Arrangement

4.1.Arrangement sans répétition

Définition: on appelle arrangement sans répétitions de « p » éléments pris parmi « n », toute disposition ordonnée sans répétition de « p » objets pris parmi «n » objets discernable, chaque objet n'intervenant qu'une fois au plus dans un même arrangement.

Formule:

le nombre d'arrangements sans répétition de « p » objets pris parmi n est donnée par:

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}, \qquad 1 \le p \le n.$$

Propriètés

$$A_n^p = \mathrm{n}A_{n-1}^{p-1}$$

$$A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = n! = P_n$$

Exemple: de combien de manière peut-on placer 3 dossiers différents dans 15 casiers vides, à condition d'un dossier par casier?

$$A_{15}^3 = \frac{15!}{12!} = 15.14.13 = 2730$$

4.2.Arrangement avec répétition

Définition: On appelle arrangement avec répétition de « p » éléments pris parmi « n », toute disposition ordonnées, avec répétition éventuelle de « p » éléments parmi les « n »

Formule: Le nombre d'arrangement avec répétition de « p » objets pris parmi « n » objets est donné par:

$$Ar_n^p = n^p \quad ,1 \le p \le n$$

Exemple: soit a,b,c

Les arrangements de ces 3 objets pris 2 à 2 avec répétition sont:

aa,bb,cc,ab,ac,bc,ba,ca,cb

$$Ar_n^p = Ar_3^2 = 3^2 = 9$$

5.Combinaisons

5.1.Combinaison sans répétition

Définition: on appelle combinaison sans répétition de « p » éléments pris parmi « n », toute disposition non ordonnée sans répétition de « p » objets extraits parmi « n » objets discernables, chaque objet n'intervenant qu'une fois au plus dans une même combinaison

Formule: Le nombre de combinaisons sans répétition de « p » objets pris parmi « n » objets est:

$$C_n^p = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

Propriétés

- $C_n^p . p! = A_n^p$
- $C_n^p = \frac{A_n^p}{p!}$
- $C_n^p = C_n^{n-p}$
- $C_n^0 = 1$
- $C_n^n = 1$
- $C_n^{n-1} = 1.$

Exemple:

A l'oral d'un examen, un étudiant doit répondre à 5 questions sur 8

1/ Combien a-t-il de choix possibles

2/ Même question si les 3 premières sont imposées

3/ Même question s'il doit répondre au moins à 4 des 5 premiers

Réponses

1. $C_8^5 = \frac{8!}{5!(8-5)!} = 56$
2. $C_3^3 . C_5^2 = C_5^2 = 10$
3. $C_5^4 . C_3^1 + C_5^5 . C_3^0 = 16$

5.2.Combinaison avec répétition

Définition: on appelle combinaison avec répétition de « p » éléments pris parmi « n », toute disposition non ordonnée avec répétition de « p » objets extraits parmi « n »

Formule: Le nombre de combinaisons avec répétition de « p » objets pris parmi « n » objets est

$$Cr_n^p = C_{n+p-1}^p = \frac{(n+p-1)!}{p!\,(n-1)!}$$

Exemple:

Soit les objets a,b et c. Les combinaisons avec répétitions de ces 3 objets pris 2 à 2 sont:

ab,ac,bc,aa,bb,cc

Réponse

$$Cr_3^2 = C_4^2 = \frac{4!}{2!\,2!} = 6$$

Combinaisons composées ou Formule de Pascal

Si $0 \leq p \leq n-1$

$$C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p = C_n^p$$

Le binôme de Newton : Le théorème du binôme de Newton donne l'expression générale du développement de $(a+b)^n$.

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^p b^{n-p} \\ &= C_n^0 a^0 b^{n-0} + C_n^1 a^1 b^{n-1} + \cdots + C_n^n a^0 b^n \\ &= a^n + n\,a^{n-1}\,b + \cdots + b^n.\end{aligned}$$

Exemple : Pour $n = 4$, on a

$$\begin{aligned}(a+b)^4 &= \sum_{p=0}^{4} C_n^p a^p b^{n-p} \\ &= C_n^0 a^0 b^4 + C_n^1 a^1 b^3 + \cdots + C_4^4 a^0 b^4 \\ &= a^4 + 4\,a^3\,b + 6\,a^2 b^2 + 4\,a\,b^3 + b^4.\end{aligned}$$

Remarque : Lorsque $a = b = 1$, on a $(1+1)^n = 2^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p$. Alors

$$2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n.$$