Mecanique analytique

Merouani Messaoud

Université Mohamed Seddik Benyahia Jijel

Faculté des Sciences de la Technologie

Département Génie Mecanique

Email : *messaoud.merouani@univ-jijel.dz*

1.0

01-03-2024

Table des matières

Objectifs

L'enseignement de cette matière donne à l'étudiant les outils nécessaires pour analyser un

problème de mécanique, de choisir la méthode de résolution la plus appropriée par rapport à

la nature du problème, de ses données et de ses inconnues. La matière est scindée en deux

parties ; la première partie concerne la dynamique du solide par l'utilisation de la mécanique

classique, alors que la seconde partie concerne la mécanique analytique en utilisant les

principes énergétiques dans la résolution des problèmes de la mécanique.

I Chapitre 2: Element de cinetique

1. Tenseur cinetique

1.1. Moment d'inertie

Le moment d'inertie* d'un système discret et homogène par rapport à un axe (Δ), est la somme des masses mi de ce système, pondérées par leurs distances ri à l'axe au carré (1)*

$$I\,\Delta=\sum_{1}^{n} mir^2 i$$

Lorsqu'on considère un corps solide qui est constitué d'une distribution continue de matière, on peut admettre qu'il est formé d'une infinité de points matériels. Cette hypothèse de continuité nous permet de remplacer la sommation Σ par une intégration et on obtient

$$I\,\Delta=\int r^2\,dm$$

Avec

$$dm=\rho\,dv$$

On aura

$$I=\int \rho\,r^2\,dv$$

Comme pour le calcul du centre de gravité**, l'intégrale dépend de la distribution de la masse

dans le solide. Selon que le solide est linéique, surfacique ou volumique, dm devient λdl ,σds ou ρdv . Les termes l,s , v sont respectivement les éléments de longueur, de surface et de

volume et λ, σ, ρ des densités linéique, surfacique ou volumique de masse. Pour évaluer

l'inertie d'un objet non ponctuel, il faut découper l'objet en plusieurs volumes infinitésimaux

de masse dm et calculer l'inertie totale I provenant de la contribution de toutes les masses

infinitésimales en effectuant une sommation. Voici quelques formes de découpage

infinitésimal fréquemment employées (Tableaux 2.1, 2.2 et 2.3) :

Tableau 2.1

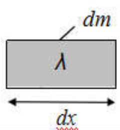
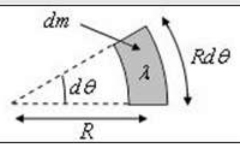
Tige : $dm = \lambda\ dx$	Tige cylindrique : $dm = \lambda\ R\ d\theta$
	

Tableau 2.2

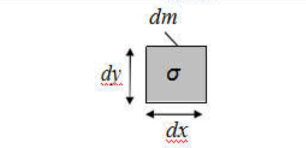
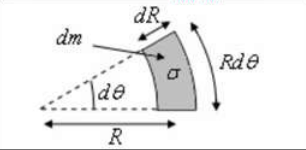
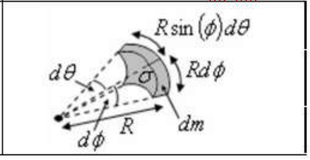
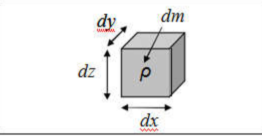
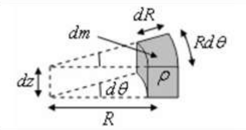
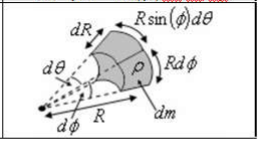
Carré : $dm = \sigma\, dx\, dy$	Carré cylindrique : $dm = \sigma\, R\, dR\, d\theta$	Carré sphérique: $dm = \sigma\, R^2 \sin(\varphi)\, d\theta\, d\varphi$
		

Tableau 2.3

Cube[1] : $dm = \rho\, dx\, dy\, dz$	Cube cylindrique[2] : $dm = \rho\, R\, dR\, d\theta\, dz$	Cube sphérique[3] : $dm = \rho\, R^2 \sin(\varphi)\, dR\, d\theta\, d\varphi$
		

Exemple :

Le moment d'inertie d'un anneau. Un anneau mince et homogène de masse m et de rayon R tourne autour d'un axe, perpendiculaire à son plan, qui passe par son centre (voir figure 2.1). determiner le moment d'inertie de l'anneau

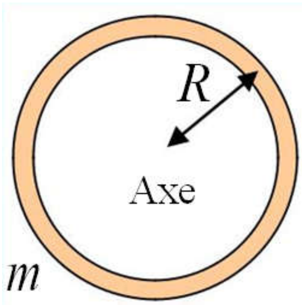


Fig. 2.1 Anneau mince

$$\lambda = \frac{m}{l} = \frac{m}{2\pi R} \; et \; dl = r^2\, dm \; avec \; dm = \lambda\, dl = \lambda\, R d\theta$$

$$I = \lambda \int_0^{2\pi} (x^2 + y^2) R d\theta = \lambda \int_0^{2\pi} R^3 d\theta = \lambda\, 2\pi R^3 = \frac{m 2\pi R^3}{2\pi R} = mR^2$$

pour voir la video cliquer *ici*

1.2. Enoncé du théorème de Huygens

Le moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe Δ' qui ne passe pas par son centre de masse est égal au moment d'inertie de ce solide par rapport à un axe parallèle Δ qui passe par son centre de masse augmenté au produit de la masse de ce solide par le carré de la distance du centre de masse à l'axe Δ' (Fig. 2.3).

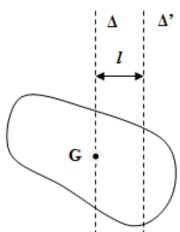


Fig. 2.2 Le moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe qui ne passe pas par son centre de masse

2. Energie cinétique d'un solide

Soit O un point quelconque d'un référentiel inertiel (R). Soit S un solide de masse m, de volume V et de masse volumique ρ. On considère un élément du solide S, de masse dm, de volume dV situe´ au point M. Soient v sa vitesse en translation dans (R), et ω sa vitesse de

rotation. Sonénergie cinétique* s'´ecrit (5)* :

$$dEc = \frac{1}{2} v^2 \, dm$$

$$dEc = \frac{1}{2} v^2 \rho \, dv$$

On décompose la vitesse v en vitesse de translation et une vitesse de rotation ω, donc

$$dEc = \frac{1}{2} (Vt + Wr)^2 \rho \, dv$$

Par intégration sur le volume on obtient

$$EC = \frac{1}{2} vt^2 m + \frac{1}{2} \iiint \omega^2 r^2 \rho \, dv + \iiint vt \, \omega \, r \, \rho \, dv$$

Le premier terme est l'´energie cinétique de translation

$$ECt = \frac{1}{2} vt^2 m$$

Le deuxième terme est l'énergie cinétique de rotation

$$ECr = \frac{1}{2} \iiint \omega^2 r^2 \rho \, dv = \frac{1}{2} \omega^2 \iiint \rho r^2 \, dv = \frac{1}{2} I \omega^2$$

Le troisième terme est nul

$$\iiint vt \, \omega \, r \, \rho \, dv = 0$$

Alors, dans un référentiel inertiel, l'énergie cinétique d' un solide est la somme de l'énergie

cinétique de translation et l'énergie cinétique de rotation.

$$Ec = Ect + Ecr$$

Cf. "video3"

Glossaire

centre de gravite

Le centre de gravite d'un objet, ou centre de masse, est le point de l'espace où l'on applique les effets d'inertie,

l'énergie cinétique

En physique, l'énergie cinétique est l'énergie que possède un corps du fait de son mouvement dans un référentiel donné. Dans le Système international, son unité de mesure est le joule (J).

moment d'inertie

Le moment d'inertie d'un système physique est une grandeur qui caractérise son inertie vis-à-vis des mouvements de rotation, comme sa masse caractérise son inertie vis-à-vis des mouvements de translation.

Abréviations

CIR : Centre instantané de rotation

Bibliographie

1- S. Targ, Éléments De Mécanique Rationnelle, éditions Mir, Moscou.

5- V. I. Arnold, Les méthodes mathématiques de la mécanique classique, Editions Mir, Moscou.