جامعة جيجل
كلية العلوم الدقيقة و الاعلام الالي
قسم الرياضيات

السنة الجامعية **2024/2023**
التأريخ : الخميس **2024/05/09**
مدة الامتحان : **1:15**

امتحان قصير : الجبر 2

التمرين 1 :

1) لتكن A, B مصفوفتان ذات معاملات في نفس الحقل K
ما هو الشرط الذي يجعل حساب الجداء $A \times B$ ممكنا.

2) ليكن الفضاء الشعاعي $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ للمصفوفات المربعة من الشكل $n \geq 1$ ،
لتكن A, B, C من $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
اعط الشرط الضروري و الكافي حتى يكون الاستلزام $A \times B = A \times C \Rightarrow B = C$ صحيح .
في هذه الحالة برهن الاستلزام.

3) لتكن $A \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ بحيث $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. احسب ان كان ممكنا : $A^t, A^2, 2A$

التمرين 2 :

1) ليكن $E = \mathbb{R}_3[x]$ الفضاء الشعاعي لكثيرات الحدود ذات الدرجة أقل أو تساوي 3 و ليكن

$$F = \{P \in \mathbb{R}_3[x] : P(0) = P(1) = 0\}$$

برهن أن F فضاء شعاعي جزئي من E .عين أساس لـ F و استنتج بعده.

2) ليكن $E = \mathbb{R}^3$ و $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + 2y - z = 0\}$

برهن أن G فضاء شعاعي جزئي من $\mathbb{R}^3$.عين أساس لـ G و استنتج بعده.

التمرين 3 :

ليكن $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$: تطبيق معرف بـ
$$f(x, y, z) = (-2x + y + z, x - 2y + z, x + y - 2z) \text{ ، } \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

1) برهن أن f خطي.

2) أحسب النواة $\ker(f)$ و اعط أساس له ثم استنتج بعد الصورة $Im(f)$

3) عين أساس للصورة $Im(f)$.

بالتوفيق

ملاحظة : A^t هو منقول المصفوفة A .

Corrigée type (interrogation algèbre2) jeudi 09/05/2024

Exercice 1 :

1)La condition nécessaire qui nous permet de calculer $A \times B$est que le nombre de colonnes de A est égale au nombre de lignes de **B** 0.25

2) La condition nécessaire et suffisante pour que l'implication $A \times B = A \times C \Rightarrow B = C$ soit vraie est que A soit 0.25 inversible.

si A inversible alors

$A \times B = A \times C \Rightarrow A^{-1} \times (A \times B) = A^{-1} \times (A \times C) \Rightarrow (A^{-1} \times A) \times B = (A^{-1} \times A) \times C \Rightarrow I_n \times B = I_n \times C \Rightarrow B = C$ 0.75

3) $2A = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ 0.25 , A^2 impossible de calculer car 1) n'est pas vérifiée . 0.25

$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ 0.25

Exercice 2 :

1)F sous espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X] \Leftrightarrow \begin{cases} (i) \quad 0_{\mathbb{R}_3[X]} \in F \\ (ii) \quad \forall P_1, P_2 \in F: P_1 + P_2 \in F \\ (iii) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall P \in F: \alpha.P \in F \end{cases}$ 0.25

$(i) \quad 0_{\mathbb{R}_3[X]} \in F \; car \; 0_{\mathbb{R}_3[X]}(1) = 0_{\mathbb{R}_3[X]}(0) = 0$ 0.25

$(ii) \;\forall P_1, P_2 \in F: P_1(1) = P_1(0) = 0, P_2(1) = P_2(0) = 0 \Rightarrow (P_1 + P_2)(1) = P_1(1) + P_2(1) = 0 \; et \; (P_1 + P_2)(0) = P_1(0) + P_2(0) = 0 \Rightarrow P_1 + P_2 \in F$ 0.25

$(iii) \;\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall P \in F: P(1) = P_1(0) = 0 \Rightarrow (\alpha.P)(1) = \alpha.P(1) = 0 \; et \; (\alpha.P)(0) = \alpha.P(0) = 0 \Rightarrow P \in F$ 0.25

Donc F est sous espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$.

2) $B \; base \; de \; F \; \Leftrightarrow \begin{cases} F \; engendré \; par \; B \\ B \; libre \end{cases}$ 0.25

a) $P \in F \Rightarrow P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3, P(1) = 0 \; et \; P(0) = 0 \Rightarrow a_0 = 0 \; et \; a_1 + a_2 + a_3 = 0 \Rightarrow a_3 = -a_1 - a_2 \Rightarrow P(X) = a_1(X - X^3) + a_2(X^2 - X^3)F = \langle P_1 = X - X^3, P_2 = X^2 - X^3 \rangle$

Donc $F = \langle P_1, P_2 \rangle$ 0.50

b) $B \; libre \; \Leftrightarrow \left(\forall (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2; \alpha_1P_1 + \alpha_2P_2 = 0_{\mathbb{R}_2[X]} \Longrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0\right)$ 0.25

$\alpha_1P_1 + \alpha_2P_2 = 0_{\mathbb{R}_2[X]} \Longrightarrow \alpha_1(X - X^3) + \alpha_2(X^2 - X^3) = 0_{\mathbb{R}_2[X]} \Longrightarrow \alpha_1X + \alpha_2X^2 - (\alpha_1 + \alpha_2)X^3 = 0 \Longrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0$ car $\{1, X, X^2, X^3\}$ libre 0.50

Donc $B \; libre$ alors c'est une base de F et $dim \; F = card \; B = 2$ 0.25

2)G sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3 \Leftrightarrow \begin{cases} (i) \quad 0_{\mathbb{R}^3} \in G \\ (ii) \quad \forall (x,y,z), (x',y',z') \in G: (x,y,z) + (x',y',z') \in G \\ (iii) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall (x,y,z) \in G: \alpha.(x,y,z) \in G \end{cases}$

$(i) \quad 0_{\mathbb{R}^3} \in G \; car \; 0_{\mathbb{R}^3} = (0,0,0) \; evident$ 0.25

$(ii) \;\forall (x,y,z), (x',y',z') \in G \Rightarrow \begin{cases} (x,y,z) + (x',y',z') = (x+x', y+y', z+z') \\ , 2x + 2y - z = 0 \; et \; 2x' + 2y' - z' = 0 \end{cases} \Rightarrow 2(x+x') + 2(y+y') - (z+z') = 0 \Rightarrow (x,y,z) + (x',y',z') \in G$ 0.25

$(iii) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall (x,y,z) \in G: 2x + 2y - z = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha.(x,y,z) = (\alpha x, \alpha y, \alpha z) \\ \alpha.(2x + 2y - z) = \alpha.0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(\alpha x) + 2(\alpha y) - \alpha z = 0 \\ et \; (\alpha x, \alpha y, \alpha z) \in G \end{cases}$

Donc G sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. 0.25

2) $B' \; base \; de \; G \; \Leftrightarrow \begin{cases} G \; engendré \; par \; B' \\ B' \; libre \end{cases}$

a) $(x,y,z) \in G: 2x + 2y - z = 0 \Rightarrow z = 2x + 2y \Rightarrow (x,y,z) = (x, y, 2x + 2y) = x(1,0,2) + y(0,1,2) \Rightarrow G = \langle V_1 = (1,0,2), V_2 = (0,1,2) \rangle$

Donc $G = \langle V_1, V_2 \rangle$ 0.50

b) $B\ libre \Leftrightarrow \left(\forall(\alpha_1,\alpha_2) \in \mathbb{R}^2; \alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 = 0_{\mathbb{R}^3} \Longrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0\right)$ 0.25

$\alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 = 0_{\mathbb{R}^3} \Longrightarrow \alpha_1(1,0,2) + \alpha_2(0,1,2) = (\alpha_1, \alpha_2, 2\alpha_1 + 2\alpha_2) = (0,0,0) \Longrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0$ 0.25

Donc $B\ libre$ alors c'est une base de G et $dim\ G = card\ B' = 2$

Exercice 3 :

1) $f\ linéaire \Leftrightarrow \begin{cases} i)\forall(x,y,z),(x',y',z') \in \mathbb{R}^3: f\left((x,y,z)+(x',y',z')\right) = f\ (x,y,z) + f\ (x',y',z') \\ ii)\forall\alpha \in \mathbb{R}, \forall(x,y,z) \in \mathbb{R}^3: f\big(\alpha.(x,y,z)\big) = \alpha.f(x,y,z) \end{cases}$ 0.25

$i)\forall(x,y,z),(x',y',z') \in \mathbb{R}^3: f\left((x,y,z)+(x',y',z')\right) = f(x+x', y+y', z+z') = \big(-2(x+x') + (y+y') + (z+z'), (x+x') - 2(y+y') + (z+z'), (x+x') - 2(y+y') + (z+z')\big) = (-2x+y+z, x-2y+z, x+y-2z) + (-2x'+y'+z', x'-2y'+z', x'+y'-2z') = f\ (x,y,z) + f\ (x',y',z')$ 0.50

$ii)\forall\alpha \in \mathbb{R}, \forall(x,y,z) \in G: f\big(\alpha.(x,y,z)\big) = f(\alpha x, \alpha y, \alpha z) = (-2\alpha x + \alpha y + \alpha z, \alpha x - 2\alpha y + \alpha z, \alpha x + \alpha y - 2\alpha z) = \alpha.f(x,y,z)$ 0.25

Donc $f\ linéaire$

2) $(x,y,z) \in \ker(f) \Leftrightarrow f\ (x,y,z) = (0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} 1) -2x+y+z=0 \\ 2)\quad x-2y+z=0 \\ 3)\ x+y-2z=0 \end{cases} \Longrightarrow x = y = z \Longrightarrow (x,y,z) = x(1,1,1)$ donc

$\ker(f) = \langle V = (1,1,1) \rangle$ 0.50

Puisque $V \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ alors $\{V\}$ libre alors elle est base de $\ker(f)$. $\boldsymbol{dim}\ker(f) = 1$ 0.50

On a $\boldsymbol{dim}\ker(f) + \dim Im(f) = \dim\mathbb{R}^3 \Longrightarrow \dim Im(f) = 2$ 0.25

3) Alors toute base de $Im(f)$ contient deux vecteurs linéairement indépendant. 0.25

$f\ (1,0,0) = (-2,1,1), f\ (0,1,0) = (1,-2,1), f\ (0,0,1) = (1,1,-2)$ et $Im(f) = \langle f(e_1), f(e_2), f(e_3) \rangle$ 0.50

Il suffit de montrer que $\{f(e_1), f(e_2)\}$ libre.

$$\forall(\alpha_1,\alpha_2) \in \mathbb{R}^2; \alpha_1 f(e_1) + \alpha_2 f(e_2) = 0_{\mathbb{R}^3} \Longrightarrow \alpha_1(-2,1,1) + \alpha_2(1,-2,1)$$

$$\Longrightarrow (-2\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 - 2\alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2) \Longrightarrow \begin{cases} -2\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 - 2\alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0$$

Alors $\{f(e_1), f(e_2)\}$ est une base de $Im(f)$ 0.50