Université de Jijel, Faculté des Sciences exactes et Informatique, Département de Physique

Contrôle de physique des particules — *Durée 2h300*

Master 1 physique théorique — *Mercredi 11/05, 2024*

(I) Exercice 1: Hadrons, mésons et quarks

(1) Donner la charge électrique, le spin, le nombre baryonique et l'étrangeté des quarks: u, $\bar{u}$, d, $\bar{d}$, s et $\bar{s}$.

(2) Pourquoi un baryon ne peut pas avoir un spin 1?

(3) Pourquoi un anti-baryon ne peut pas avoir une charge électrique +2?

(4) Pourquoi un méson ne peut pas avoir une charge électrique +1 et étrangeté -1?

(5) La relation Gell-Mann–Nishijima donne la relation entre la charge électrique Q d'un baryon et 3 autres nombres quantiques, elle s'écrit :

$$Q = I_3 + \frac{B}{2} + \frac{S}{2}. \tag{1}$$

- Nommez les nombres quantiques I_3, B et S. Indiquer quand ils sont conservés et quand ils ne le sont pas?
- Faites un tableau des valeurs de ces nombres quantiques pour les hadrons: p, $\bar{p}$, n, $\bar{n}$, π^+, π^0, π^-, K^+ et K^-.

(II) Exercice 2: Isospin et pions

Les quarks up et down sont représentés par les doublets d'isospin:

$$q = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \qquad \bar{q} = \begin{pmatrix} \bar{d} \\ -\bar{u} \end{pmatrix} \tag{2}$$

(1) Donner l'isospin et le vecteur $|I, I_3>$ pour chaque quark et anti-quark.

(2) Donner tous les vecteurs $|I, I_3>$ résultants de la composition de $q \otimes q$ et $q \otimes \bar{q}$. Exprimer ces vecteurs en fonction des états $|u>$, $|d>$, $|\bar{u}>$ et $|\bar{d}>$.

(3) Identifier les vecteurs d'état associés au pions π^+, π^0 et π^-.

(4) Considérons les réactions suivantes:

$$\pi^+ \longrightarrow \mu^+ + \nu_\mu \qquad \pi^+ \longrightarrow \mu^+ + \bar{\nu}_\mu \tag{3}$$

$$\pi^- + p \longrightarrow \pi^0 + n \qquad \pi^- + p \longrightarrow \pi^0 + \bar{n} \tag{4}$$

- Vérifier la conservation de: Q, L_μ, B, I et I_3.
- Si la réaction est interdite, dites pourquoi. Si elle est autorisée, indiquez la nature de la réaction.

(III) Problème: collision electron-positron

Considérons les deux réactions suivantes:

$$\textbf{(a)} \quad e^-(p_1) + e^+(p_2) \longrightarrow \mu^-(p_3) + \mu^+(p_4). \qquad \textbf{(b)} \quad e^-(p_1) + e^+(p_2) \longrightarrow q(p_3) + \bar{q}(p_4). \tag{5}$$

(1) Tracer les deux diagrammes de Feynman décrivant ces réactions.

(2) On suppose que les masses des particules sont nulles ($m_e = m_\mu = m_q = 0$). Montrer que les variables de MandelStam vérifient:

$$s + t + u = 0 \tag{6}$$

(3) Montrer que dans le référentiel du centre de masse (CM), les 4-impulsions s'écrivent sous la forme:

$$p_1 = \frac{\sqrt{s}}{2}(1,0,0,1), \qquad p_2 = \frac{\sqrt{s}}{2}(1,0,0,-1),$$
$$p_3 = \frac{\sqrt{s}}{2}(1,\sin(\theta),0,\cos(\theta)), \qquad p_4 = \frac{\sqrt{s}}{2}(1,-\sin(\theta),0,-\cos(\theta)) \tag{7}$$

où θ est l'angle polaire.

(4) Montrer que $t \leq 0$ et $u \leq 0$.

(5) Les carrés des amplitudes des réactions (a) et (b) sont donnés par:

$$\overline{\sum}|M_a|^2 = 128\,\pi^2\,\alpha^2\,\frac{p_1 \cdot p_3\, p_2 \cdot p_4 + p_1 \cdot p_4\, p_2 \cdot p_3}{(p_1+p_2)^4} \tag{8}$$
$$\overline{\sum}|M_b^q|^2 = 128\,\pi^2\,\alpha^2\,N_c\,Q_q^2\,\frac{p_1 \cdot p_3\, p_2 \cdot p_4 + p_1 \cdot p_4\, p_2 \cdot p_3}{(p_1+p_2)^4} \tag{9}$$

où α est le couplage électromagnétique, Q_q est la fraction de charge des quarks et N_c est le nombre de couleur.
- Exprimer $\overline{\sum}|M_a|^2$ et $\overline{\sum}|M_b^q|^2$ en fonction des variables de MandelStam.
- Exprimer $\overline{\sum}|M_a|^2$ et $\overline{\sum}|M_b^q|^2$ en fonction de l'angle θ.

(6) Calculer les sections efficaces des réactions (a) et (b) et montrer que:

$$\sigma_a = \frac{4}{3}\pi\frac{\alpha^2}{s}, \qquad \sigma_b^q = \frac{4}{3}N_c Q_q^2 \pi \frac{\alpha^2}{s}. \tag{10}$$

(7) On suppose que les quarks u, d et s sont produits dans la réaction (b) et que le rapport $\sum_q \sigma_b^q/\sigma_a \approx 2$. Calculez N_c, commentez le résultat.

(IV) Appendices

- Classification des hadrons en multiplets:

$$\begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \bar{n} \\ -\bar{p} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \pi^+ \\ \pi^0 \\ \pi^- \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} K^+ \\ K^- \end{pmatrix} \tag{11}$$

- Composition des hadrons:

$$p \equiv uud \qquad n \equiv udd \qquad \pi^+ \equiv u\bar{d} \qquad \pi^- \equiv \bar{u}d \qquad \pi^0 \equiv u\bar{u}, d\bar{d} \qquad K^+ \equiv u\bar{s} \qquad K^- \equiv \bar{u}s \tag{12}$$

- Coefficients de Clebsch-Gordan:

$$|jm> = \sum_{j_1,j_2} C^{j j_1 j_2}_{m m_1 m_2} |j_1 m_1> |j_2 m_2> . \tag{13}$$

avec

$$C^{1\,1/2\,1/2}_{1\,1/2\,1/2} = 1, \qquad C^{1\,1/2\,1/2}_{-1\,-1/2\,-1/2} = 1.$$
$$C^{0\,1/2\,1/2}_{0\,1/2\,-1/2} = 1/\sqrt{2}, \qquad C^{0\,1/2\,1/2}_{0\,-1/2\,1/2} = -1/\sqrt{2}.$$
$$C^{1\,1/2\,1/2}_{0\,1/2\,-1/2} = 1/\sqrt{2}, \qquad C^{1\,1/2\,1/2}_{0\,-1/2\,1/2} = 1/\sqrt{2}.$$

- Variables de MandelStam:

$$s = (p_1+p_2)^2, \qquad t = (p_1-p_3)^2, \qquad u = (p_1-p_4)^2. \tag{14}$$

- Section efficace (masses nulles):

$$\sigma = \frac{1}{4\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2}} \int \overline{\sum}|M|^2 \frac{d^3\vec{p}_3}{(2\pi)^3 2E_3} \frac{d^3\vec{p}_4}{(2\pi)^3 2E_4} (2\pi)^4 \delta^4(p_3+p_4-p_1-p_2). \tag{15}$$

M. S. ZIDI
Bon courage, بالتّوفيق

Université de Jijel, Faculté des Sciences exactes et Informatique, Département de Physique

Correction du contrôle de physique des particules — *Durée 2h300*

Master 1 physique théorique — *Mercredi 11/05, 2024*

(I) Exercice 1: Hadrons, mésons et quarks (6 Pts)

(1) Charge électrique, spin, nombre baryonique et l'étrangeté des quarks: u, $\bar{u}$, d, $\bar{d}$, s et $\bar{s}$ **(1.5 Pts)**.

Nq \ Par	u	$\bar{u}$	d	$\bar{d}$	s	$\bar{s}$
Q	$+\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$+\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$+\frac{1}{3}$
J	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
B	$+\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$+\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$+\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
S	0	0	0	0	-1	$+1$

donc le spin d'un baryon peut avoir un spin 1/2 ou 3/2.

(2) Un baryon ne peut pas avoir un spin 1 car les baryons sont des hadrons constitués de 3 quarks, chaque quark possède un spin 1/2. La composition de 3 états de spin 1/2 donne forcément un état de spin demi-entier. On a: **(1 Pts)**

$$\frac{1}{2}\otimes\frac{1}{2}\otimes\frac{1}{2}\equiv[0\oplus 1]\otimes\frac{1}{2}\equiv\frac{1}{2}\oplus\frac{3}{2}. \tag{1}$$

(3) Un anti-baryon ne peut pas avoir une charge électrique +2 mais il peut avoir des charges éléctriques -2, 1, +1 ou 0. L'anti-baryon est constitués de 3 anti-quarks, chaque ant-quark peut avoir une charge électrique $-2/3$ ou $+1/3$. L'anti-baryon peut être composer de 3 anti-quark down, 3 up, 2 up et 1 down, 1 up et 2 down. Voici les charges possible pour l'anti-baryon: **(1 Pts)**

$$\begin{aligned}
Q(\bar{q}_u\,\bar{q}_u\,\bar{q}_u) &= -\frac{2}{3}-\frac{2}{3}-\frac{2}{3}=-2\\
Q(\bar{q}_d\,\bar{q}_d\,\bar{q}_d) &= +\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=+1\\
Q(\bar{q}_u\,\bar{q}_u\,\bar{q}_d) &= -\frac{2}{3}-\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=-1\\
Q(\bar{q}_u\,\bar{q}_d\,\bar{q}_d) &= -\frac{2}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=0
\end{aligned} \tag{2}$$

(4) Un méson ne peut pas avoir une charge électrique +1 et étrangeté -1 mais il peut etre neutre ou possédant une charge -1. Le méson est composé d'un quark et d'un anti-quark. Si on suppose que le méson possède une étrangeté -1, donc il contient forcément un quark étrange de charge -1/3. La composante qui reste peut être un anti-quark up ou down, donc les charge possible sont: **(1 Pts)**

$$\begin{aligned}
Q(\bar{q}_u\,s) &= -\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=-1\\
Q(\bar{q}_d\,s) &= +\frac{1}{3}-\frac{1}{3}=-1
\end{aligned} \tag{3}$$

(5) Nombre quantique I_3, B et S: (1.5 Pts)

- I_3 est 3ème composante de l'isospin, B est le nombre baryonique et S est l'étrangeté.
- Nombres quantiques des hadrons: p, $\bar{p}$, n, $\bar{n}$, π^+, π^0, π^-, K^+ et K^-.

Nq \ Par	p	$\bar{p}$	n	$\bar{n}$	π^+	π^0	π^-	K^+	K^-
I_3	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$+1$	0	-1	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
B	$+1$	-1	$+1$	-1	0	0	0	0	0
S	0	0	0	0	0	0	0	$+1$	-1

(II) Exercice 2: Isospin et pions (6 Pts)

Les quarks up et down sont représentés par les doublets d'isospin:

$$q = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \qquad \bar{q} = \begin{pmatrix} \bar{d} \\ -\bar{u} \end{pmatrix} \tag{4}$$

(1) Isospin et vecteur d'état $|I, I_3>$: l'isospin des doublets q et $\bar{q}$ est $1/2$. Voici les vecteurs d'état de chaque fermion **(1 Pts)**:

$$\begin{aligned} u &= \left|\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right\rangle & d &= \left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle \\ \bar{u} &= \left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle & \bar{d} &= \left|\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right\rangle. \end{aligned} \tag{5}$$

(2) Composition de $q \otimes q$ et $q \otimes \bar{q}$ (2 Pts):
Les quarks sont des particules d'isospin $1/2$, on utilise la relation suivante:

$$|jm> = \sum_{j_1, j_2} C^{jj_1j_2}_{mm_1m_2} |j_1 m_1> |j_2 m_2> . \tag{6}$$

où $C^{jj_1j_2}_{mm_1m_2}$ sont les coefficients de Clebsch-Gordan, $j = j_1 + j_2, j_1 - j_2$ et $m = m_1 + m_2$.

On trouve:

$$|1/2, m_1> \otimes |1/2, m_2> = \begin{cases} |1, +1> = |\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}> |\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}> \\ |1, 0> = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}> |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}> + |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}> |\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}>) \\ |1, -1> = |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}> |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}> \\ \\ |0, 0> = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}> |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}> - |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}> |\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}>) \end{cases} \tag{7}$$

Les coefficients de Clebsch-Gordan dans ce cas sont donnés par

$$\begin{aligned} C^{1\,1/2\,1/2}_{1\,1/2\,1/2} &= 1, & C^{1\,1/2\,1/2}_{-1\,-1/2\,-1/2} &= 1. \\ C^{0\,1/2\,1/2}_{0\,1/2\,-1/2} &= 1/\sqrt{2}, & C^{0\,1/2\,1/2}_{0\,-1/2\,1/2} &= -1/\sqrt{2}. \\ C^{1\,1/2\,1/2}_{0\,1/2\,-1/2} &= 1/\sqrt{2}, & C^{1\,1/2\,1/2}_{0\,-1/2\,1/2} &= 1/\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Donc,

- Système $q \otimes q$:

$$|1/2, I_3^{(1)}> \otimes |1/2, I_3^{(2)}> = \begin{cases} |11> = uu \\ |10> = (ud + du)/\sqrt{2} \\ |1-1> = dd \\ \\ |00> = (ud - du)/\sqrt{2} \end{cases} \tag{8}$$

- Système $q \otimes \bar{q}$:

$$|1/2, I_3^{(1)}> \otimes |1/2, I_3^{(2)}> = \begin{cases} |11> = u\bar{d} \\ |10> = (d\bar{d} - u\bar{u})/\sqrt{2} \\ |1-1> = -d\bar{u} \\ \\ |00> = -(u\bar{u} + d\bar{d})/\sqrt{2} \end{cases} \tag{9}$$

(3) Les pions π^+, π^0 et π^- sont des mésons constitués de quarks u $(\bar{u})$ et d $(\bar{d})$. En plus l'isospin de ces mésons égale à 1. Donc, **(1 Pts)**

$$\begin{cases} \pi^+ \equiv |11>= u\bar{d} \\ \pi^0 \equiv |10>= (d\bar{d} - u\bar{u})/\sqrt{2} \\ \pi^- \equiv |1-1>= -d\bar{u} \end{cases} \tag{10}$$

(4) Réactions autorisées et interdites **(2 Pts)**:

$$\begin{array}{ll} \begin{array}{rl} & \pi^+ \longrightarrow \mu^+ + \nu_\mu \\ Q: & 1 = 1 + 0 ✓ \\ L_\mu: & 0 = -1 + 1 ✓ \\ B: & 0 = 0 ✓ \\ I: & 1 \neq 0 ✗ \\ I_3: & +1 \neq 0 ✗ \\ & \boxed{\text{Autorisée. Nature de interaction: faible}} \end{array} & \begin{array}{rl} & \pi^+ \longrightarrow \mu^+ + \bar{\nu}_\mu \\ Q: & 1 = 1 + 0 ✓ \\ L_\mu: & 0 \neq -1 - 1 ✗ \\ B: & 0 = 0 ✓ \\ I: & 1 \neq 0 ✗ \\ I_3: & +1 \neq 0 ✗ \\ & \boxed{\text{Interdite, car } L_\mu \text{ n'est pas conservé}} \end{array} \end{array} \tag{11}$$

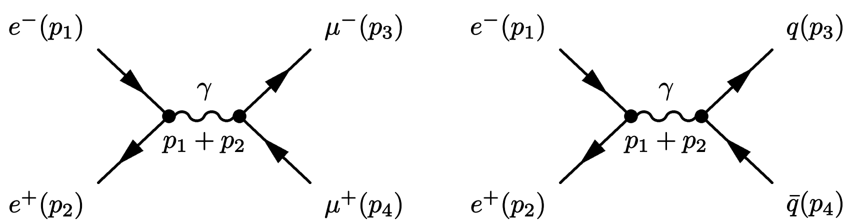
$$\begin{array}{ll} \begin{array}{rl} & \pi^- + p \longrightarrow \pi^0 + n \\ Q: & -1 + 1 = 0 + 0 ✓ \\ L_\mu: & 0 + 0 = 0 + 0 ✓ \\ B: & 0 + 1 = 0 + 1 ✓ \\ I: & 1 \otimes 1/2 = 1 \otimes 1/2 ✓ \\ I_3: & -1 + 1/2 = 0 - 1/2 ✓ \\ & \boxed{\text{Autorisée. Nature de interaction: forte}} \end{array} & \begin{array}{rl} & \pi^- + p \longrightarrow \pi^0 + \bar{n} \\ Q: & -1 + 1 = 0 + 0 ✓ \\ L_\mu: & 0 + 0 = 0 + 0 ✓ \\ B: & 0 + 1 \neq 0 - 1 ✗ \\ I: & 1 \otimes 1/2 = 1 \otimes 1/2 ✓ \\ I_3: & -1 + 1/2 \neq 0 + 1/2 ✗ \\ & \boxed{\text{Interdite, car } B \text{ n'est pas conservé}} \end{array} \end{array} \tag{12}$$

(III) Problème: collision electron-positron (8 Pts)

Considérons les deux réactions suivantes:

$$\textbf{(a)} \quad e^-(p_1) + e^+(p_2) \longrightarrow \mu^-(p_3) + \mu^+(p_4). \qquad \textbf{(b)} \quad e^-(p_1) + e^+(p_2) \longrightarrow q(p_3) + \bar{q}(p_4). \tag{13}$$

(1) Diagrammes de Feynman décrivant ces réactions **(1 Pts)**:



(14)

(2) Variables de MandelStam **(0.5 Pts)**:
On rappelle que:

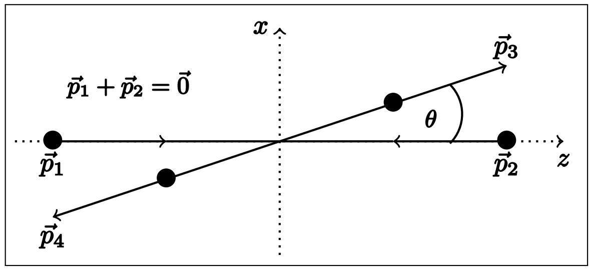
$$p_1^2 = p_2^2 = p_3^2 = p_4^2 = 0 \qquad\qquad p_2 - p_3 - p_4 = -p_1. \tag{15}$$

Donc

$$\begin{aligned} s + t + u &= (p_1 + p_2)^2 + (p_1 - p_3)^2 + (p_1 - p_4)^2 \\ &= 3\,p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 + 2\,p_1 \cdot p_2 - 2\,p_1 \cdot p_3 - 2\,p_1 \cdot p_4 \\ &= 2\,p_1 \cdot (p_2 - p_3 - p_4) = -2\,p_1^2 \equiv 0 \end{aligned} \tag{16}$$

(3) Référentiel du centre de masse (CM) **(1 Pts)**:
Dans le référentiel du centre de masse on a:

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{0} \qquad \text{donc} \qquad \vec{p}_3 + \vec{p}_4 = \vec{0}$$



Selon le schéma, les 4-impulsions prennent les formes suivantes:

$$p_1 = \begin{pmatrix} E_1 \\ 0 \\ 0 \\ |\vec{p}_1| \end{pmatrix} \qquad p_2 = \begin{pmatrix} E_2 \\ 0 \\ 0 \\ -|\vec{p}_1| \end{pmatrix} \qquad p_3 = \begin{pmatrix} E_3 \\ |\vec{p}_3|\sin(\theta) \\ 0 \\ |\vec{p}_3|\cos(\theta) \end{pmatrix} \qquad p_3 = \begin{pmatrix} E_4 \\ -|\vec{p}_3|\sin(\theta) \\ 0 \\ -|\vec{p}_3|\cos(\theta) \end{pmatrix} \tag{17}$$

Car les masses sont nulles on a,

$$p_1^2 = E_1^2 - |\vec{p}_1|^2 = 0 p_2^2 = E_2^2 - |\vec{p}_1|^2 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad E_1 = E_2 \equiv E \tag{18}$$

$$p_3^2 = E_3^2 - |\vec{p}_3|^2 = 0 p_4^2 = E_4^2 - |\vec{p}_4|^2 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad E_3 = E_4 \equiv E' \tag{19}$$

mais

$$s = (p_1 + p_2)^2 = \begin{pmatrix} E_1 + E_2 \\ \vec{0} \end{pmatrix}^2 = (E_1 + E_2)^2 = 4E^2 \qquad \Longrightarrow \qquad E = E_1 = E_2 = |\vec{p}_1| = |\vec{p}_2| = \frac{\sqrt{s}}{2} \tag{20}$$

$$s = (p_3 + p_4)^2 = \begin{pmatrix} E_3 + E_4 \\ \vec{0} \end{pmatrix}^2 = (E_3 + E_3)^2 = 4E'^2 \qquad \Longrightarrow \qquad E' = E_3 = E_4 = |\vec{p}_3| = |\vec{p}_4| = \frac{\sqrt{s}}{2} \tag{21}$$

On substitue (20) et (21) dans (17), on trouve:

$$p_1 = \frac{\sqrt{s}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad p_2 = \frac{\sqrt{s}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$p_3 = \frac{\sqrt{s}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \sin(\theta) \\ 0 \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}, \qquad p_4 = \frac{\sqrt{s}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sin(\theta) \\ 0 \\ -\cos(\theta) \end{pmatrix} \tag{22}$$

où θ est l'angle polaire.

(4) Démonstration que $t \leq 0$ et $u \leq 0$ **(0.5 Pts)**:

$$t = -\frac{s}{2}(1 - \cos(\theta)) \qquad u = -\frac{s}{2}(1 + \cos(\theta)) \tag{23}$$

Car $|\cos(\theta)| \leq 1$, on a:

$$-\frac{s}{2}(1 - \cos(\pi)) \leq t \leq -\frac{s}{2}(1 - \cos(0)) \qquad \Longrightarrow \qquad -s \leq t \leq 0 \tag{24}$$

$$-\frac{s}{2}(1 + \cos(0)) \leq u \leq -\frac{s}{2}(1 + \cos(\pi)) \qquad \Longrightarrow \qquad -s \leq u \leq 0 \tag{25}$$

Car $s > 0$, on a toujours:

$$t \leq 0 \qquad u \leq 0. \tag{26}$$

(5) Les carrés des amplitudes des réactions (a) et (b) sont donnés par **(1.5 Pts)**:

$$\overline{\sum}|M_a|^2 = 128\,\pi^2\,\alpha^2\,\frac{p_1\cdot p_3\,p_2\cdot p_4 + p_1\cdot p_4\,p_2\cdot p_3}{(p_1+p_2)^4} \tag{27}$$

$$\overline{\sum}|M_b^q|^2 = 128\,\pi^2\,\alpha^2\,N_c\,Q_q^2\,\frac{p_1\cdot p_3\,p_2\cdot p_4 + p_1\cdot p_4\,p_2\cdot p_3}{(p_1+p_2)^4} \tag{28}$$

Car les masses sont nulles, on a:

$$p_1\cdot p_3 = p_2\cdot p_4 = -\frac{t}{2} \tag{29}$$

$$p_1\cdot p_4 = p_2\cdot p_3 = -\frac{u}{2} \tag{30}$$

Donc,

$$\overline{\sum}|M_a|^2 = 32\,\pi^2\,\alpha^2\,\frac{t^2+u^2}{s^2} \tag{31}$$

$$\overline{\sum}|M_b^q|^2 = 32\,\pi^2\,\alpha^2\,N_c\,Q_q^2\,\frac{t^2+u^2}{s^2} \tag{32}$$

On substitue

$$t = -\frac{s}{2}(1-\cos(\theta)) \qquad\qquad u = -\frac{s}{2}(1+\cos(\theta)) \tag{33}$$

on trouve

$$\overline{\sum}|M_a|^2 = 16\,\pi^2\,\alpha^2\,[1+\cos(\theta)^2] \tag{34}$$

$$\overline{\sum}|M_b^q|^2 = 16\,\pi^2\,\alpha^2\,N_c\,Q_q^2\,[1+\cos(\theta)^2] \tag{35}$$

(6) Calcul des sections efficaces des réactions (a) et (b) **(3 Pts)**:

$$\sigma = \frac{1}{4\sqrt{(p_1.p_2)^2}}\,\frac{1}{(2\,\pi)^2}\int \delta^4(p_1+p_2-p_3-p_4)\,\frac{d^3\vec{p}_3}{2\,E_3}\,\frac{d^3\vec{p}_4}{2\,E_4}|\overline{M}|^2$$

On utilise:

$$\int\frac{d^3\vec{p}_4}{2E_4} = \int d^4p_4\delta^+(p_4^2)$$

On intègre sur p_4:

$$\sigma = \frac{1}{4\sqrt{(p_1.p_2)^2}}\,\frac{1}{(2\,\pi)^2}\int\frac{|\vec{p}_3|^2\,d|\vec{p}_3|}{2\,E_3}d\Omega_3\,\delta^+((p_1+p_2-p_3)^2)|\overline{M}|^2$$

On se place dans le référentiel CM: $\vec{p}_1+\vec{p}_2 = \vec{p}_3+\vec{p}_4 = \vec{0}$ et

$$p_1 = \frac{\sqrt{s}}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} \qquad\qquad p_2 = \frac{\sqrt{s}}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}$$

$$p_3 = \frac{\sqrt{s}}{2}\begin{pmatrix}1\\\sin(\theta)\\0\\\cos(\theta)\end{pmatrix} \qquad\qquad p_4 = \frac{\sqrt{s}}{2}\begin{pmatrix}1\\-\sin(\theta)\\0\\-\cos(\theta)\end{pmatrix}$$

Pour linéariser l'argument de la fonction δ, on utilise:

$$\delta(g(x)) = \sum_i \delta(x-x_i)/|g'(x_i)|$$

alors:

$$\delta^+((p_1+p_2-p_3)^2) = \delta^+(s-2\sqrt{s}|\vec{p}_3|) = \frac{\delta(|\vec{p}_3|-\sqrt{s}/2)}{2\sqrt{s}}$$

Donc:

$$\sigma = \frac{1}{32\pi^2 s^{3/2}} \int |\vec{p}_3|\, d|\vec{p}_3| d\Omega_3\, \delta(|\vec{p}_3|-\sqrt{s}/2)|\overline{M}|^2$$

L'intégration sur $|\vec{p}_3|$ (grâce à la fonction δ):

$$\sigma = \frac{1}{64\pi^2 s} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin(\theta) d\theta |\overline{M}|^2$$

avec

$$d\Omega_3 = \sin(\theta) d\theta d\phi$$

Intégrant sur ϕ:

$$\sigma = \frac{1}{32\pi s} \int_0^{\pi} \sin(\theta) d\theta |\overline{M}|^2$$

On a:

$$t = -s(1-\cos(\theta))/2 \qquad\qquad u = -s(1+\cos(\theta))/2$$

donc

$$|M|^2 = e^4(1+\cos(\theta)^2) = 16\pi^2\alpha^2(1+\cos(\theta)^2)$$

avec $\alpha = e^2/(4\pi)$.

La section efficace différentielle est donnée par:

$$\frac{d\sigma}{d\cos(\theta)} = \frac{\pi}{2s}\alpha^2(1+\cos(\theta)^2) \tag{36}$$

La section efficace totale:

$$\sigma = \frac{\pi}{2s}\alpha^2 \int_{-1}^{+1} d\cos(\theta)(1+\cos(\theta)^2)$$

Pour intégrer sur θ, on effectue le changement de variable: $X = \cos(\theta)$. Alors,

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{\pi}{2s}\alpha^2 \int_{-1}^{+1} dX(1+X^2) \\ &= \frac{\pi}{2s}\alpha^2 \left[X + \frac{X^3}{3}\right]_{-1}^{+1} \\ &= \frac{4\pi}{3s}\alpha^2 \end{aligned} \tag{37}$$

Donc,

$$\sigma_a = \frac{4}{3}\pi\frac{\alpha^2}{s}, \qquad\qquad \sigma_b^q = \frac{4}{3}N_c Q_q^2 \pi \frac{\alpha^2}{s}. \tag{38}$$

(7) Calcul de N_c **(0.5 Pts)**:
On a

$$\begin{aligned}\frac{\sum_q \sigma_b^q}{\sigma_a} &= N_c\, \left[Q_u^2+Q_d^2+Q_s^2\right] \\ &= N_c\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2\right] \\ &= N_c\frac{6}{9} \approx 2 \qquad \Longrightarrow \qquad N_c = 3. \end{aligned} \tag{39}$$

ce qui montre que les quarks se trouvent dans 3 états de couleur.