جامعة محمد الصديق بن يحي - جيجل
كلية العلوم الاقتصادية والعلوم التجارية وعلوم التسيير
قسم التعليم الأساسي

25 جوان 2024 المدة : 1ساعة و 30 دقيقة

الامتحان الاستدراكي في الرياضيات 2

التمرين 1 : (08 نقاط)

لتكن الدالة f المعرفة بـ :

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + xy + \frac{1}{4}x^3$$

1) عين مجموعة تعريف الدالة f .

2) عين النقاط الحرجة للدالة f وحدد طبيعتها.

التمرين 2 : (04 نقاط) لتكن المصفوفة :

$$A = \begin{pmatrix} a & -1 & 2 \\ -1 & -a & 0 \\ -a & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

1) أحسب $det(A)$.

2) عين قيم a حتى تكون A قابلة للقلب.

التمرين 3 : (08 نقاط)

لتكن جملة المعادلات التالية :

$$(S) \begin{cases} x + 3y - z = 4 \\ 2x + y + 2z = 10 \\ 3x - y + z = 4 \end{cases}$$

1) أكتب جملة المعادلات (S) على الشكل المصفوفي $AX = B$.

2) أحسب $\det(A)$ محدد المصفوفة A.

3) حل جملة المعادلات $AX = B$ باستعمال طريقة كرامر.

بالتوفيق

كلية العلوم الاقتصادية والعلوم التجارية وعلوم التسيير

قسم التعليم الأساسي

25 جوان 2024

التصحيح النموذجي للامتحان الاستدراكي في الرياضيات 2

التمرين 1: (08 نقاط)

1) f عبارة عن كثير حدود فهو معرف على $\mathbb{R}^2$ ومنه $D_f = \mathbb{R}^2$ (0.5)

2) **لدينا** (0.5)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2x + y + \frac{3}{4}x^2 = 0 \\ \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 2y + x = 0 \end{cases}$$ (0.5)

ومنه

$$\begin{cases} x = -2y \\ -4y + y + 3y^2 = 0 \end{cases}$$ (0,5)

إذن

$$\begin{cases} x = -2y \\ \wedge \\ 3y(y-1) = 0 \implies y = 0 \vee y = 1 \end{cases}$$ (0.75)

النقاط الحرجة هي $(0,0), (-2,1)$ (0,5) ولدينا المشتقات الجزئية من الرتبة الثانية :

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Big) = 2 + \frac{3}{2}x$$ (0,25)

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Big) = 1$$ (0,25)

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Big) = 1$$ (0,25)

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Big) = 2$$ (0,25)

لدينا :

$$AC - B^2 = \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x^2} \times \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x \partial y} \times \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y \partial x} = 2 \times 2 - 1 = 3 > 0$$ (0,25) (0.75) (0.5)

و لدينا $A > 0$ ومنه النقطة $(0,0)$ هي نقطة حرجة صغرى . (0,25) (0,25)

$$AC - B^2 = \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x^2} \times \frac{\partial^2 f(-2,1)}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 f(-2,1)}{\partial x \partial y} \times \frac{\partial^2 f(-2,1)}{\partial y \partial x} = (-1) \times 2 - 1 = -3 < 0$$

ومنه النقطة $(-2,1)$ هي نقطة سرج .

التمرين 2: (04 نقاط)

1)

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & -1 & 2^+ \\ -1 & -a & 0^- \\ -a & -2 & 1^+ \end{vmatrix} = 2 \times \begin{vmatrix} -1 & -a \\ -a & -2 \end{vmatrix} - 0 \times \begin{vmatrix} a & -1 \\ -a & -2 \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} a & -1 \\ -1 & -a \end{vmatrix}$$

$$= 2 \times (2 - a^2) + (-a^2 - 1) = -3a^2 + 3$$

2) A قابلة للقلب إذا كان $\det(A) \neq 0$. لدينا :

$$\det(A) = 0 \iff -3a^2 + 3 = 0 \iff a^2 = 1 \iff a = \pm 1$$

ومنه A قابلة للقلب إذا كان $a \neq -1$ و $a \neq 1$.

التمرين 3: (08 نقاط) 1) كتابة جملة المعادلات (S) على الشكل المصفوفي :

$$(S) \iff AX = B \iff \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix}$$

2) حل جملة المعادلات $AX = B$ باستعمال طريقة كرامر:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 20 \neq 0$$

ومنه جملة كرامر تقبل حلا وحيدا بحيث :

$$x = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 10 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{20} = \frac{20}{20} = 1$$

$$y = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 10 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}}{20} = \frac{40}{20} = 2$$

$$z = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 10 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix}}{20} = \frac{60}{20} = 3$$

ملاحظة : على الطالب اظهار طريقة حساب المحددات ، توضع نصف العلامة لمن يضع النتيجة مباشرة.