lorsque $\Re\lambda \to \infty$, uniformément par rapport à $s \in [0, t]$, d'où

$$\begin{aligned} G(t)x - x &= \lim_{\Re\lambda\to\infty} [G_\lambda(t)s - x] \\ &= \lim_{\Re\lambda\to\infty} \int_0^t G_\lambda(s)A_\lambda x ds \\ &= \int_0^t G(s)Axds, \end{aligned}$$

quelque soient $x \in \mathrm{D}(A)$ et $t \geq 0$.

Soit B le générateur infinitésimal du $\mathcal{C}_0$-semi groupe $(G(t))_{t\geq 0}$. Si $x \in \mathrm{D}(A)$, alors

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0} \frac{G(t)x - x}{t} &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \int_0^t G(s)Axsd \\ &= Ax, \end{aligned}$$

et nous avons $x \in \mathrm{D}(B)$ et $B_{|_{\mathrm{D}(A)}} = A$.
D'autre part, nous avons l'inégalité suivante

$$\|G(t)\| \leq Me^{\omega t}, \ \forall t \geq 0,$$

si $\lambda \in \Lambda_\omega$, alors $\lambda \in \rho(A) \cap \rho(B)$.
Soit $x \in \mathrm{D}(B)$, on a donc $(\lambda I - B)x \in E$ et comme $(\lambda I - A)$ est bijectif, il existe $x' \in \mathrm{D}(A)$ tel que $(\lambda I - A)x' = (\lambda I - B)x$, puisque $B_{|_{\mathrm{D}(A)}} = A$, alors $(\lambda I - B)x' = (\lambda I - B)x$, comme $\lambda \in \rho(B)$ il en résulte que $x' = x$ et par suite $x \in \mathrm{D}(A)$, donc $\mathrm{D}(B) \subset \mathrm{D}(A)$, finalement on voit bien que $\mathrm{D}(B) = \mathrm{D}(A)$ et $A = B$.
Nous avons donc démontrer que A est le générateur infinitésimal du $\mathcal{C}_0$-semi groupe $(G(t))_{t\geq 0}$, et d'après le Théorème ?? on trouve que $(G(t))_{t\geq 0}$ est l'unique $\mathcal{C}_0$-semi groupe engendré par A.■

Exemple 0.9 ***(Le Laplacien dans $\mathbb{R}^n$)***
On considère $X = L^2(\mathbb{R}^n)$. Considérons l'opérateur Δ de domaine

$$\mathrm{D}(\Delta) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^n), \Delta u \in L^2(\mathbb{R}^n)\},$$

Δ est le générateur infinitésimal d'un $\mathcal{C}_0$-semi groupe de contraction dans $L^2(\mathbb{R}^n)$. En effet, tout d'abord, Δ est un opérateur fermé de domaine dense dans $L^2(\mathbb{R}^n)$.
Montrons maintenant que $\Lambda_0 = \{\lambda \in \mathbb{C}, \Re\lambda > 0\} \subset \rho(\Delta)$ et qu'on a pour tout $\lambda \in \Lambda_0$

$$\|R(\lambda, \Delta)\| \leq \frac{1}{\Re\lambda}.$$

Pour ce but, on doit démontrer que l'équation

$$(\lambda I - \Delta)u = f,$$

admet une solution unique.
En utilisant la transformée de Fourier pour l'equation on obtient

$$(|y|^2 + \lambda)\mathcal{F}u(y) = \mathcal{F}f(y),$$

de sorte que $\Re\lambda > 0$, *et par conséquent*

$$\mathcal{F}u(y) = \frac{\mathcal{F}f(y)}{|y|^2 + \Re\lambda + i\Im\lambda},$$

ce qui montre que, pour $\Re\lambda > 0$, *on a* $\mathcal{F}u \in L^2(\mathbb{R}^n)$, *en effet,*

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{F}u(y)|^2 dy &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\mathcal{F}f(y)|^2}{||y|^2 + \Re\lambda + i\Im\lambda|^2} dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\mathcal{F}f(y)|^2}{(|y|^2 + \Re\lambda)^2 + (\Im\lambda)} dy,\end{aligned}$$

puisque $\Re\lambda > 0$, *alors*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{F}u(y)|^2 dy \leq \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\mathcal{F}f(y)|^2}{(|y|^2 + \Re\lambda)^2} dy,$$

donc

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{F}u(y)|^2 dy \leq \frac{1}{(Re\lambda)^2} \int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{F}f(y)|^2 dy,$$

comme $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, *alors d'après le théorème de Plancherel* $\mathcal{F}f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ *et par suite* $\mathcal{F}u \in L^2(\mathbb{R}^n)$, *en utilisant une deuxieme fois le théorème de Plancherel on en déduit que* $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$. *Puisque* $\Delta u = \lambda u + f$ *on trouve que* $\Delta u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ *et donc l'existence d'une solution unique* $u \in \mathrm{D}(\Delta)$ *de l'équation*

$$(\lambda I - \Delta)u = f.$$

D'autre part,

$$\|\mathcal{F}u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{1}{(\Re\lambda)} \|\mathcal{F}f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

alors

$$\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{1}{(\Re\lambda)} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

d'où

$$\|R(\lambda, \Delta)f\| \leq \frac{1}{(\Re\lambda)} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

par conséquent

$$\|R(\lambda, \Delta)\| \leq \frac{1}{(\Re\lambda)},$$

ce qui montre, d'après le théorème de Hille-Yosida, que Δ *est le générateur infinitésimal d'un* $\mathcal{C}_0$*-semi groupe de contraction.*