

Examen: Méthodes Numériques

Exercice N⁰⁰¹. Soit à résoudre l'équation

$$f(x) = x^3 - 4x + 1 = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

I) [3pts] 1- Montrer, en étudiant les variations de la fonction f , que l'équation $f(x) = 0$ admet trois racines ($a_1 < a_2 < a_3$) dans \mathbb{R} .

2-[2pts] Tracer le graphe de la fonction $f(x)$ et déterminer grossièrement la position des racines a_1, a_2 et a_3 dans des intervalles de la forme $[k, k + 2]$, $k \in \mathbb{Z}$.

II) a)[1.5pts] En utilisant la méthode de *Dichotomie* (Bisection), estimer le nombre minimal d'itérations nécessaires pour approcher a_1 avec une tolérance $\varepsilon = 10^{-3}$ après avoir choisi un intervalle convenable.

b) [3pts] Soit la méthode de *point fixe*, Soit

$$\begin{cases} x_{k+1} = \varphi(x_k) \\ x_0 \in [0, 0.5] \end{cases}; \varphi(x) = \frac{1}{4}(x^3 + 1).$$

.Examiner la convergence de cette la méthode pour approcher a_2

c) [2.5pts] Si l'on souhaite appliquer la méthode de *Newton-Raphson* pour approcher a_3 faut-il choisir $x_0 = 2.5$ ou $x_0 = 1$? Expliquer votre choix puis calculer les deux premières valeurs (x_1, x_2) .

Exercice N⁰⁰² On considère le tableau ci-dessous généré par la fonction $y = 1 + \exp x$.

x_i	$y_i = 1 + \exp x_i$
0.1	1.9048
0.5	1.6065
0.8	1.4493

I)[4pts] Trouver le polynôme d'interpolation de Lagrange P_2 , puis donner la valeur interpolée au point $x = 0.35$.

II)[4pts] Trouver le polynôme d'interpolation dans la base de Newton (En utilisant les différences divisées), puis donner la valeur interpolée au point $x = 0.35$.