Chapitre 2 : Eléments linéaires de structures

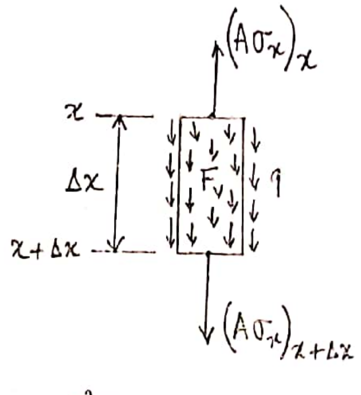
2.1. Element barre élastique

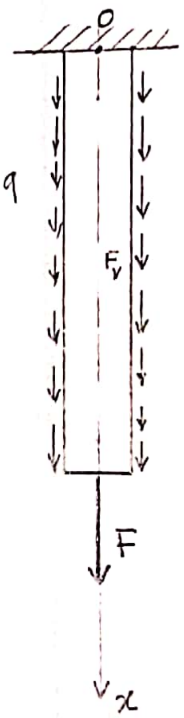
- L'élément barre est un élément unidimensionnel travail en traction ou en compression dans le domaine élastique du materiau constituant la barre.

- Soit une barre, de longueur "l" et de section "A", encastreé à une extrimité et libre à l'autre. La barre est soumise à une densité de force distribueé sur toute, ou une partie de, la longueur de la barre et une force concentreé appliqueé à l'extrimité libre.

L'objectif est de dériver l'équation differentielle gouvernant le comportement élastique linéaire de la barre et puis on cherche la solution de cette dernière par la méthode des éléments-finis.

- Considérons un troncon (découpé de la barre en question) de longueur Δx et projetons les efforts appliqués sur ce tronçon suivant l'axe ox on aura :





$$(A\sigma_x)_{x+\Delta x} + q\cdot\Delta x + F_v\cdot A\cdot\Delta x - (A\sigma_x)_{x+\Delta x} = \Delta m\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad (1)$$

où $(A\sigma_x)_x$ est l'effort normal au point d'abscisse x en N

$(A\sigma_x)_{x+\Delta x}$ est —"— —"— " ——" —— $x+\Delta x$ en N

q : densité de force linéique en N/m

$F_v = \rho g$: densité de force volumique en N/m^3 (due au poids de la barre)

A : est la section de la barre en m^2

σ_x : est la contrainte moyenne produite dans la section en $\frac{N}{m^2}$

u : est le déplacement longitudinal des points situés sur l'axe ox

t : est le temps

$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$: est l'accélération (si la barre est en mouvement)

Δm : est la masse du tronçon découpé

On a : $\Delta P = \Delta m . g$ avec $\Delta m = \rho A . \Delta x$

d'où $\Delta P = \rho g A \Delta x$ on pose $F_v = \rho g$

Alors $\Delta P = F_v A \Delta x$ et $\Delta m = \frac{\Delta P}{g} = \frac{F_v A}{g} \Delta x$

On sait que : $$(A\sigma_x)_{x+\Delta x} = (A\sigma_x)_x + \frac{d(A\sigma_x)}{dx} . \Delta x \qquad (2)$$

Remplaçons l'équation (2) dans l'équation (1), on obtient : $(\Delta x \neq 0)$

$$\frac{d(A\sigma_x)}{dx} + q + F_v A = \frac{F_v A}{g} . \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad (3)$$

La loi de Hooke, pour notre cas, est : $\sigma_x = E \varepsilon_x$ où $\varepsilon_x = \frac{du}{dx}$

avec u est le déplacement axial de la barre.

L'équation (3) devienne :

$$\frac{d}{dx}\left(EA \frac{du}{dx}\right) + q + F_v A = \frac{F_v A}{g} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad (4) \qquad 0 \leq x \leq l$$

Les conditions aux limites du problème sont :

$$u(0) = 0 \quad \text{et} \quad \left(EA \frac{du}{dx}\right)\Big|_{x=l} = F \qquad (5)$$

En régime stationnaire $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ et dans le cas où les quantités EA, q et $F_v A$ sont des constantes (indépendantes de x), l'équation (4) devienne :

$$EA \frac{d^2 u}{dx^2} + q + F_v A = 0 \qquad (6)$$

La solution analytique de cette dernière avec les C.L. (5) est :

$$u(x) = \frac{x}{2EA} \Big[(q + F_v A)(2l - x) + 2F \Big] \qquad 0 \leq x \leq l$$

Maintenant, on cherche la solution de l'équation (6) avec les conditions (5) par la méthode des éléments finis. Pour cela on utilise l'approche des résidus pondérés avec la méthode de Galerkin (Voir le chapitre 1)

$$\int_{x_i}^{x_j} N_i \left(EA \frac{d^2u}{dx^2} + q + F_v A \right) dx = 0 \qquad (7)$$

$$\int_{x_i}^{x_j} N_j \left(EA \frac{d^2u}{dx^2} + q + F_v A \right) dx = 0 \qquad (8)$$

avec $u(x) = [N_i \, , N_j] \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix}$ est la solution approchée au sein d'un élément typique "e" de longueur $l_e = x_j - x_i$

$$N_i = \frac{x_j - x}{x_j - x_i} \quad \text{et} \quad N_j = \frac{x - x_i}{x_j - x_i}$$

u_i et u_j sont les déplacements des noeuds i et j suivant l'axe ox

Après intégration par partie, le premier terme peut être mis sous la forme :

$$\int_{x_i}^{x_j} N_i \cdot \left(EA \frac{d^2u}{dx^2} \right) dx = \left[N_i \cdot EA \frac{du}{dx} \right]_{x_i}^{x_j} - \int_{x_i}^{x_j} EA \frac{du}{dx} \cdot \frac{dN_i}{dx} \cdot dx$$

les équations (7) et (8) devienne :

$$\left[N_i \cdot EA \frac{du}{dx} \right]_{x_i}^{x_j} - \int_{x_i}^{x_j} \left[EA \frac{du}{dx} \cdot \frac{dN_i}{dx} - (q + F_v A) N_i \right] dx = 0 \qquad (9)$$

$$\left[N_j \, EA \frac{du}{dx} \right]_{x_i}^{x_j} - \int_{x_i}^{x_j} \left[EA \frac{du}{dx} \cdot \frac{dN_j}{dx} - (q + F_v A) N_j \right] dx = 0 \qquad (10)$$

$$\frac{du}{dx} = \left[\frac{dN_i}{dx} \, , \frac{dN_j}{dx} \right] \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = \frac{1}{l_e} \left[-1 \, , 1 \right] \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix}$$

On sait que $N_i = \begin{cases} 1 & \text{en } x_i \\ 0 & \text{en } x_j \end{cases}$ et $N_j = \begin{cases} 0 & \text{en } x_i \\ 1 & \text{en } x_j \end{cases}$

Les équations (9) et (10) devienne :

$$-\left(EA\frac{du}{dx}\right)_{x_i} - \int_{x_i}^{x_j}\left(EA\frac{dN_i}{dx}\cdot\left[\frac{dN_i}{dx},\frac{dN_j}{dx}\right]\cdot\begin{Bmatrix}u_i\\u_j\end{Bmatrix} - (q+F_vA)N_i\right)dx = 0 \quad (11)$$

$$\left(EA\frac{du}{dx}\right)_{x_j} - \int_{x_i}^{x_j}\left(EA\frac{dN_j}{dx}\left[\frac{dN_i}{dx},\frac{dN_j}{dx}\right]\begin{Bmatrix}u_i\\u_j\end{Bmatrix} - (q+F_vA)N_j\right)dx = 0 \quad (12)$$

On pose $\left(EA\frac{du}{dx}\right)_{x_i} = F_i$ et $\left(EA\frac{du}{dx}\right)_{x_j} = F_j$

F_i et F_j sont des charges ponctuelles appliquées aux nœuds i et j de l'élément typique "e".

Les équations (11) et (12) peuvent être mise sous la forme matricielle

$$\begin{Bmatrix}-F_i\\F_j\end{Bmatrix} - \int_{x_i}^{x_j}\left(EA\begin{bmatrix}\left(\frac{dN_i}{dx}\right)^2 & \frac{dN_i}{dx}\cdot\frac{dN_j}{dx}\\ \frac{dN_j}{dx}\cdot\frac{dN_i}{dx} & \left(\frac{dN_j}{dx}\right)^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_i\\u_j\end{Bmatrix} - (q+F_vA)\begin{Bmatrix}N_i\\N_j\end{Bmatrix}\right)dx = \begin{Bmatrix}0\\0\end{Bmatrix} \quad (13)$$

ou bien

$$\frac{1}{l_e^2}\begin{bmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{bmatrix}\int_{x_i}^{x_j} EA\,dx\begin{Bmatrix}u_i\\u_j\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}-F_i\\F_j\end{Bmatrix} + \int_{x_i}^{x_j}(q+F_vA)\begin{Bmatrix}N_i\\N_j\end{Bmatrix}dx \quad (14)$$

Dans le cas où les quantités EA, q et F_vA sont des constantes, cette dernière devienne :

$$\underbrace{\frac{E_eA_e}{l_e}\begin{bmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_i\\u_j\end{Bmatrix}}_{\text{Efforts internes}} = \underbrace{\begin{Bmatrix}-F_i^e\\F_j^e\end{Bmatrix} + (q_e+F_v^eA_e)\frac{l_e}{2}\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix}}_{\text{Efforts externes}} \quad (15)$$

Si la barre est modélisée par 3 éléments de longueurs égales

Elément 1

$$\frac{3EA}{\ell}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1\\ u_2\end{Bmatrix} = (q+F_vA)\frac{\ell}{6}\begin{Bmatrix}1\\ 1\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}R\\ 0\end{Bmatrix}$$

R : la réaction à l'encastrement

Elément 2

$$\frac{3EA}{\ell}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_2\\ u_3\end{Bmatrix} = (q+F_vA)\frac{\ell}{6}\begin{Bmatrix}1\\ 1\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix}$$

Elément 3

$$\frac{3EA}{\ell}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_3\\ u_4\end{Bmatrix} = (q+F_vA)\frac{\ell}{6}\begin{Bmatrix}1\\ 1\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}0\\ F\end{Bmatrix}$$

Assemblage

$$\frac{3EA}{\ell}\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\ -1 & 2 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 2 & -1\\ 0 & 0 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1\\ u_2\\ u_3\\ u_4\end{Bmatrix} = (q+F_vA)\frac{\ell}{6}\begin{Bmatrix}1\\ 2\\ 2\\ 1\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}R\\ 0\\ 0\\ F\end{Bmatrix}$$

C.L. $u_1 = 0$ $(u(0)=0)$ d'où le système d'équations à résoudre est :

$$\begin{Bmatrix}u_2\\ u_3\\ u_4\end{Bmatrix} = \frac{\ell}{3EA}\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}^{-1}\left((q+F_vA)\frac{\ell}{6}\begin{Bmatrix}2\\ 2\\ 1\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}0\\ 0\\ F\end{Bmatrix}\right)$$

$$= \frac{\ell}{3EA}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 2\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix}\left((q+F_vA)\frac{\ell}{6}\begin{Bmatrix}2\\ 2\\ 1\end{Bmatrix} + F\begin{Bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{Bmatrix}\right)$$

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \frac{\ell}{3EA}\left((q+F_vA)\frac{\ell}{6}\begin{Bmatrix} 5 \\ 8 \\ 9 \end{Bmatrix} + F\begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{Bmatrix} \right)$$

$$\frac{3EA}{\ell}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = (q+F_vA)\frac{\ell}{6} + R$$

$$R = -\frac{3EA}{\ell}u_2 - (q+F_vA)\frac{\ell}{6}$$

$$= -\frac{3EA}{\ell}\cdot\frac{\ell}{3EA}\left[\frac{5\ell}{6}(q+F_vA) + F\right] - \frac{\ell}{6}(q+F_vA)$$

$$\longrightarrow \quad R = -(F + q\ell + F_vA\ell)$$

Les contraintes

$$\sigma^{(e)} = E_e\,\varepsilon^e \quad , \quad \varepsilon^e = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{l_e}\begin{bmatrix} -1, & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix}$$

$$\sigma^{(1)} = \frac{3E}{\ell}u_2 = \frac{F}{A} + \frac{5\ell}{6}\left(F_v + \frac{q}{A}\right)$$

$$\sigma^{(2)} = \frac{3E}{\ell}(u_3 - u_2) = \frac{F}{A} + \frac{\ell}{2}\left(F_v + \frac{q}{A}\right)$$

$$\sigma^{(3)} = \frac{3E}{\ell}(u_4 - u_3) = \frac{F}{A} + \frac{\ell}{6}\left(F_v + \frac{q}{A}\right)$$