1. Introduction

Dans un écoulement, des propriétés caractérisant le fluide en mouvement tel que la quantité de mouvement et l'énergie interne peuvent être transporté, produite ou détruite en différents point du système d'étude.

Dans ce qui suit, une équation différentielle de transport d'une variable dépendante ϕ dans l'écoulement, sera établit à partir d'un bilan local par rapport à un volume infinitésimal fixe dans l'espaces Eulérien.

2. Mécanisme de transport convectif et diffusif

La variable dépendante ϕ [unités/Kg de fluide porteur] peut être transportée par deux mécanismes convectif et diffusif.

a. Le transport convectif de ϕ

Il est réalisé par le courant du fluide en écoulement c'est-à-dire par effet convectif. La quantité de ϕ traversant un élément de surface dS par convection par unité de temps est

$$\rho v_n \phi dS \tag{1.1}$$

C'est le flux convectif traversant dS par une vitesse de composante normale U_n.

b. Le transport diffusif de ϕ

Ce type de transport de la variable dépendante ϕ se fait par l'interaction des molécules en agitation c'est-à-dire par effet diffusif. La quantité de ϕ traversant l'élément de surface dS par diffusion est

$$-\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial n} dS \tag{1.2}$$

où Γ_ϕ est la diffusivité associée à ϕ et $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ est son gradient par rapport à la normale à dS.

3. Equation générale de transport

Soit un fluide en écoulement tridimensionnel non-stationnaire dans lequel la variable dépendante ϕ peut être simultanément produite par quelques mécanismes, détruite par d'autre et/ou transporté par convection et diffusion. Le bilan de ϕ par rapport à un volume $dV = dx_1 dx_2 dx_3$ fixe dans l'espace est formulé comme suit

Le taux d'accumulation de ϕ à l'intérieur du volume dV =

Les flux convectif et diffusif entrant par les faces (1), (3) et (5)

- les flux convectif et diffusif sortant par les faces (2), (4) et (6)

+les taux de production de ϕ - les taux de destruction de ϕ.

Considérons maintenant l'expression mathématique de chacun des termes de l'équation

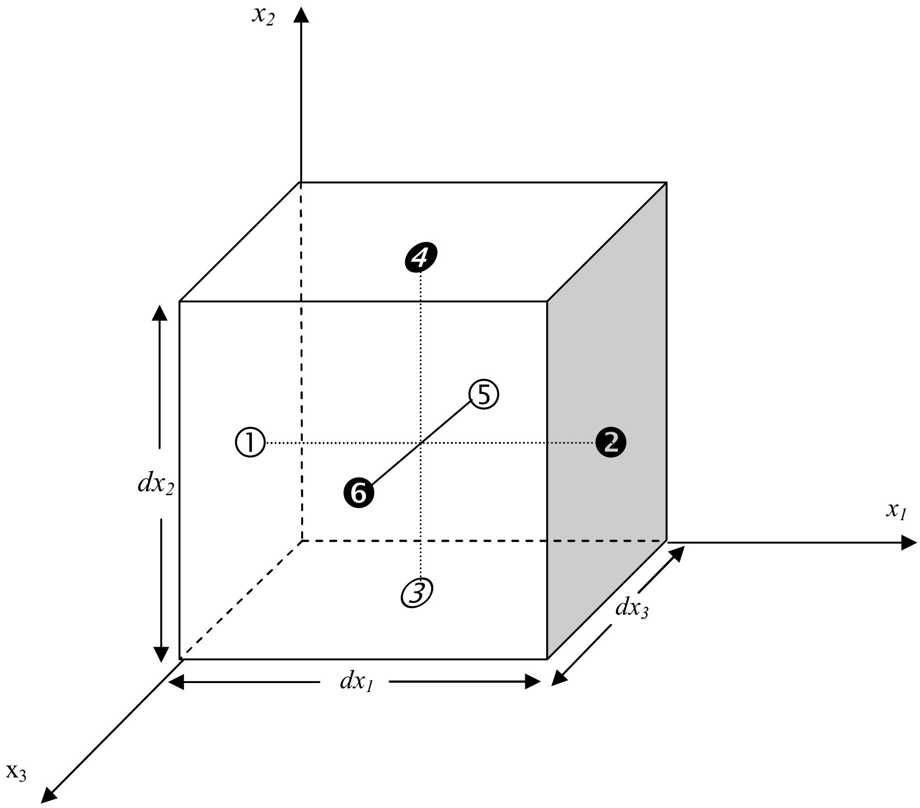

Figure 1 : Le volume de contrôle imaginaire et fixe considéré

Le taux d'accumulation de ϕ $\rho v_z v_i dxdy$

C'est la variation de la quantité de la variable dépendante dans le volume dV entre les instants t et t+δt par unité de temps.

La quantité de la variable ϕ à l'instant t est : $\phi\ dm$

La quantité de la variable ϕ à l'instant t est : $\phi\ dm + \frac{\partial(\phi\ dm)}{\partial t}\delta t$

où dm est la masse du fluide dans le volume dV. Ainsi le taux d'accumulation est

$$\frac{\phi\ dm + \frac{\partial(\phi\ dm)}{\partial t}\delta t - \phi\ dm}{\delta t} = \frac{\partial(\phi\ dm)}{\partial t} = \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t}dx_1dx_2dx_3$$

dx_1, dx_2 et dx_3 sont des variables indépendantes du temps (volume fixe).

Le flux convectif de ϕ entrant net

Le flux convectif de ϕ entrant par la face (1) : $\rho v_1 \phi dx_2 dx_3$

Le flux convectif de ϕ sortant par la face (2) : $\rho v_1 \phi dx_2 dx_3 + \frac{\partial(\rho v_1 \phi dx_2 dx_3)}{\partial x_1}dx_1$

Le flux convectif de ϕ entrant par la face (3) : $\rho v_2 \phi dx_1 dx_3$

Le flux convectif de ϕ sortant par la face (4) : $\rho v_2 \phi dx_1 dx_3 + \frac{\partial(\rho v_2 \phi dx_1 dx_3)}{\partial x_2} dx_2$

Le flux convectif de ϕ entrant par la face (5) : $\rho v_3 \phi dx_1 dx_2$

Le flux convectif de ϕ sortant par la face (6) : $\rho v_3 \phi dx_1 dx_2 + \frac{\partial(\rho v_3 \phi dx_1 dx_2)}{\partial x_3} dx_3$

le flux convectif de ϕ net $= -\frac{\partial(\rho v_1 \phi dx_2 dx_3)}{\partial x_1} dx_1 - \frac{\partial(\rho v_2 \phi dx_1 dx_3)}{\partial x_2} dx_2 - \frac{\partial(\rho v_3 \phi dx_1 dx_2)}{\partial x_3} dx_3$

$$\text{le flux convectif de } \phi \text{ net } = \left[-\frac{\partial(\rho v_1 \phi)}{\partial x_1} - \frac{\partial(\rho v_2 \phi)}{\partial x_2} - \frac{(\rho v_3 \phi)}{\partial x_3}\right] dx_1 dx_2 dx_3$$

Le flux diffusif de ϕ entrant net

Le flux diffusif de ϕ entrant par la face (1) : $-\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x_1} dx_2 dx_3$

Le flux diffusif de ϕ sortant par la face (2) : $-\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x_1} dx_2 dx_3 + \frac{\partial\left(-\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x_1} dx_2 dx_3\right)}{\partial x_1} dx_1$

Ainsi, le flux diffusif de ϕ net entrant par la face (1) est

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x_1}\right) dx_1 dx_2 dx_3$$

Les flux diffusifs nets de ϕ à travers les faces (3) et (5) s'obtiennent de manière similaire. On obtient alors

$$\text{le flux diffusif de } \phi \text{ net } = \left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x_3}\right)\right] dx_1 dx_2 dx_3$$

Le taux de production net de ϕ

Si $\dot{S}_\phi$ et $\dot{P}_\phi$ représentent les taux de production et de destruction de ϕ par unité de masse du fluide par, le taux de production net est

$$dm(\dot{S}_\phi - \dot{P}_\phi) = \rho dx_1 dx_2 dx_3 (\dot{S}_\phi - \dot{P}_\phi)$$

En substituant les taux d'accumulation et de production et les flux nets convectif et diffusif dans l'équation du bilan de ϕ, on aboutit à l'équation de transport générale s'écrivant

Sous forme développée

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho v_1\phi)}{\partial x_1}+\frac{\partial(\rho v_2\phi)}{\partial x_2}+\frac{\partial(\rho v_3\phi)}{\partial x_3} = \left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\Gamma_\phi\frac{\partial\phi}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\Gamma_\phi\frac{\partial\phi}{\partial x_2}\right)+\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\Gamma_\phi\frac{\partial\phi}{\partial x_3}\right)\right]+\rho\left(\dot{S}_\phi-\dot{P}_\phi\right)$$

Sous forme tensorielle

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t}+\frac{\partial\left(\rho v_j\phi\right)}{\partial x_j}=\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\Gamma_\phi\frac{\partial\phi}{\partial x_j}\right)+\rho\left(\dot{S}_\phi-\dot{P}_\phi\right)$$

Sous forme vectorielle

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t}+div(\rho\vec{v}\phi)=div\left(\Gamma_\phi\overrightarrow{\mathrm{grad}}\phi\right)+\rho\left(\dot{S}_\phi-\dot{P}_\phi\right)$$