1.1.7 Dérivation des fonctions

Définition 1.22 *La dérivée* $y^{'} = \frac{dy}{dx}$ *de la fonction* $y = f(x)$ *par rapport à la variable* x *est, par définition la limite du rapport* $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ *lorsque* $\Delta x \longrightarrow 0$ *c'est-à-dire :*

$$y^{'} = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Définition 1.23 *(Dérivée à gauche et dérivée à droite). Les expressions*

$$\begin{aligned} f_{-}^{'}(x) &= \lim_{\Delta x \longrightarrow -0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ f_{+}^{'}(x) &= \lim_{\Delta x \longrightarrow +0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \end{aligned}$$

s'appellent respectivement dérivée à gauche et dérivée à droite de la fonction $y = f(x)$ *au point* x*. Pour que* $f^{'}(x)$ *existe, il faut et il suffit que*

$$f_{-}^{'}(x) = f_{+}^{'}(x)$$

Exemple 1.12 *Calculer* $f_{-}^{'}(1)$ *et* $f_{+}^{'}(1)$ *pour la fonction* $f(x) = \sqrt{(x-1)^2}$

Définition 1.24 *Soit* f *Une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant* a*. On dit que* f *est dérivable au point* $x = a$ *s'il existe un nombre réel* l *tel que :*

$$\lim_{x \longrightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = l.$$

Le réel l*, lorsqu'il existe, est appelé le nombre dérivé de* f *en* a*, il est noté* $f^{'}(a)$*.*

Théorème 1.14 *Si* c *est une constante et* $u = \varphi(x)$, $v = \psi(x)$ *sont des fonctions qui possèdent des dérivées, alors*

$(c)^{'} = 0$

$(x)^{'} = 0$

$(u \pm v)^{'} = u^{'} \pm v^{'}$

$(cu)^{'} = cu^{'}$

$(uv)^{'} = u^{'}v + v^{'}u$

$(\frac{u}{v})^{'} = \frac{vu^{'} - v^{'}u}{v^2}, \quad (v \neq 0)$

$(\frac{c}{v})^{'} = \frac{-cv^{'}}{v^2}, \quad (v \neq 0)$

1.1.8 Dérivées des principales fonctions usuelles

$(x^n)^{'} = nx^{n-1}$

$(\sqrt{x})^{'} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad (x > 0)$

$(\sin x)^{'} = \cos x$

$(\cos x)^{'} = -\sin x$

$(\tan x)^{'} = \frac{1}{\cos^2 x}$

$(arc\sin x)^{'} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (|x| < 1)$

$(\arccos x)^{'} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (|x| < 1)$

$(\arctan x)^{'} = \frac{1}{1+x^2}, \quad (|x| < 1)$

$(a^x)^{'} = a^x \ln a$

$(e^x)^{'} = e^x$

$(\ln x)^{'} = \frac{1}{x}, \quad (x > 0)$

$(\log_a x)^{'} = \frac{1}{x \ln a} = \frac{\log_a e}{x}, \quad (x > 0, \quad a > 0)$

$(shx)^{'} = chx$

$(chx)^{'} = shx$

$(thx)^{'} = \frac{1}{ch^2 x}$

$(\arg shx)^{'} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$(\arg chx)^{'} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \quad (|x| > 1)$

$(\arg thx)^{'} = \frac{1}{1-x^2}, \quad (|x| < 1)$

1.1.9 Principales règles de dérivation

Théorème 1.15 *(Dérivée d'une fonction composée). Si $y = f(u)$ et $u = \varphi(x)$ c'est-à-dire $u = f[\varphi(x)]$, où les fonctions y et u possèdent des dérivées, alors*

$$y_x^{'} = y_u^{'} u_x^{'} \quad ou \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}.$$

Exemple 1.13 *Calculer $y_x^{'}$ si, $y = (x^3 - 4x^2 + 5)^7$ et $y = \sin^3 4x$.*

Théorème 1.16 *(Dérivée d'une fonction puissance composée). Si $y = u^v$ tel que $u = \varphi(x)$ et $v = \psi(x)$ où les fonctions u et v possèdent des dérivées, alors :*

$$y^{'} = u^v(v^{'} \ln u + v\frac{u^{'}}{u}).$$

Preuve. En prenant le logarithme de deux membres, on a, $\ln y = v \ln u$. Dérivons par rapport à x les deux membres de cette dernière égalité on a, $(\ln y)^{'} = v^{'} \ln u + v(\ln u)'$, ou $\frac{y^{'}}{y} = v^{'} \ln u + v\frac{u^{'}}{u}$, d'où $y^{'} = y(v^{'} \ln u + v\frac{u^{'}}{u})$, ou $y^{'} = u^v(v^{'} \ln u + v\frac{u^{'}}{u})$.

Exemple 1.14 *Calculer les dérivées : $y_x^{'}$ si, $y = (\sin x)^x$ et $y = (\frac{2x+1}{x+1})^{x^2}$*

Théorème 1.17 *(Dérivée d'une fonction inverse). Si $y = f(x)$ a une dérivée $y_x^{'} \neq 0$, alors la dérivée de la fonction inverse $x = f^{-1}(y)$ est donnée par la formule :*

$$x_y^{'} = \frac{1}{y_x^{'}} \quad ou \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

Exemple 1.15 *Calculer la dérivée : $x_y^{'}$ si, $y = x + \ln x$.*

Théorème 1.18 *(Dérivée d'une fonction donnée sous forme paramétrique). Si la dépendance entre y et x est donnée par un paramètre t :*

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

alors

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} \quad ou \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

Exemple 1.16 *Calculer :* $\frac{dy}{dx}$ *si,* $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases}$, *et* $y'_{x=1}$ *si* $\begin{cases} x = t\ln t \\ y = \frac{\ln t}{t} \end{cases}$.

• **Dérivée d'une fonction implicite.** Si la dépendance entre y et x est donnée par une expression implicite $F(x, y) = 0$. Pour calculer $y'_x = y'$ il suffit de :

1- Calculer la dérivée par rapport à x du premier membre de l'équation $F(x, y) = 0$ en considérant y comme fonction de x.

2- Egaler à 0 cette dérivée, c'est-à-dire poser $\frac{d}{dx}F(x, y) = 0$,

3- Résoudre par rapport à y' l'équation ainsi trouvée.

Exemple 1.17 *Calculer :* y'_x *si,* $x^3 + y^3 - 3axy + 0$.

1.1.10 Accroissements finis

Théorème 1.19 *(Théorème de Rolle). Soit* f *une fonction continue sur un intervalle fermé* $[a, b]$ *et vérifiant* $f(a) = f(b)$. *Si* f *est dérivable sur* $]a, b[$ *alors il existe au moins un élément* c *de* $]a, b[$ *tel que :*

$$f'(c) = 0$$

Théorème 1.20 *(Théorème des accroissements finis). Soit* f *une fonction continue sur un intervalle fermé* $[a, b]$ *et dérivable sur* $]a, b[$ *il existe alors au moins un élément* c *de* $]a, b[$ *tel que :*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Exemple 1.18 *Est que les conditions du théorème de Rolle sont vérifiées sur* $]0, \pi[$ *pour la fonction :* $x \mapsto \tan x$

Exemple 1.19 *Est que les conditions du théorème des accroissements finis sont vérifiées sur* $]-2, 1[$ *pour la fonction :* $x \mapsto x^3 - x$ *et trouver la valeur intermédiaire de* c.

Exercise 1.6 *1) Démontrer que :* $\frac{b-a}{1+b^2} < \arctan b - \arctan a < \frac{b-a}{1+a^2}$ *si* $a < b$.

2) En déduire que: $\frac{\pi}{4} + \frac{3}{25} < \arctan \frac{4}{3} < \frac{\pi}{4} + \frac{1}{6}$.

1.2 Intégrale d'une fonction continue

Définition 1.25 *Soit est une fonction continue sur* $[a,b]$. *On appelle intégrale de* f *entre* a *et* b *et on note* $\int_a^b f(x)dx$ *le nombre réel défini par* $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, *où* F *est une fonction primitive de* f.

1.2.1 Propriétés d'intégration

Si $F'(x) = f(x)$, alors $\int f(x)dx = F(x) + c$ (où c est une constante arbitraire)

$\int af(x)dx = a\int f(x)dx$, (où a est une constante)

$\int [af(x) \pm bg(x)]\, dx = a\int f(x)dx \pm b\int g(x)dx$

Théorème 1.21 *Soit* $u = \varphi(x)$ *est une fonction dérivable et* c *est une constante arbitraire, alors :*

$$\int u'udx = \frac{1}{2}u^2 + c$$

$$\int u'u^n dx = \frac{1}{n+1}u^{n+1} + c$$

$$\int \frac{u'}{u^2}dx = -\frac{1}{u} + c, \quad (u \neq 0)$$

$$\int \frac{u'}{u^n}dx = -\frac{1}{(n-1)u^{n-1}} + c, \quad (u \neq 0)$$

$$\int \frac{u'}{\sqrt{u}}dx = 2\sqrt{u} + c, \quad (u > 0)$$

1.2.2 Intégrale des principales fonctions usuelles

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ (ou c est une constante arbitraire)

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + c, \quad (x > 0)$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

$$\int \frac{1}{\cos x^2}dx = \tan x + c$$

$$\int shx dx = chx + c$$

$$\int chx dx = shx + c$$

$$\int \frac{1}{ch^2 x}dx = thx + c$$

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + c, \quad (a \neq 0)$$

$$\int \frac{1}{x^2-a^2}dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c, \quad (a \neq 0)$$

$$\int \frac{1}{a^2-x^2}dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + c, \quad (a \neq 0)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a^2}\right| + c, \quad (a \neq 0)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \arcsin\frac{x}{a} + c, \quad (a > 0)$$

Exemple 1.20 *Calculer les intégrales :* $I_1 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^2 x dx, \quad I_2 = \int\limits_0^1 \frac{e^t}{e^t+1}dt.$

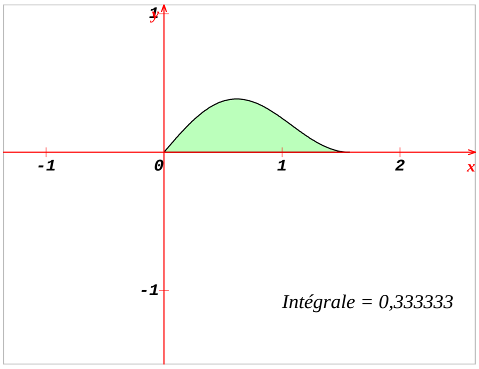

FIG. 1-6* - La valeur de I_1.

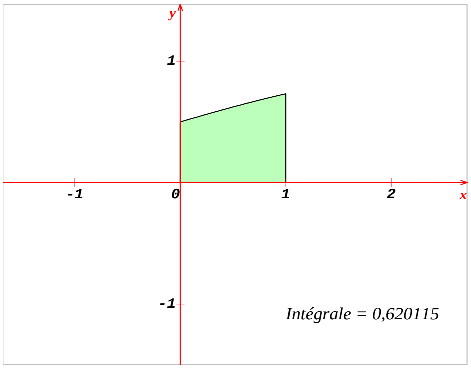

FIG. 1-6** -La valeur de I_2.

1.2.3 Méthodes particulières d'intégration

1- Changement de variable

Pour calculer $\int f(x)dx$, en posant $x = \varphi(t)$, t est une nouvelle variable et φ une fonction continue dérivable, on a :

$$\int f(x)dx = \int f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)dt.$$

Exemple 1.21 *Calculer les intégrales :* $\int x\sqrt{x-1}dx$ *et* $\int \frac{1}{\sqrt{5x-2}}dx$

2- Intégration par parties

Si $u = \varphi(x)$ et $v = \psi(x)$ sont des fonctions dérivables, on a :

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Exemple 1.22 *Calculer les intégrales :* $\int e^x \cos x dx$ *et* $\int x \ln x dx$

3- Intégration des fonctions rationnelles

Soient $P(x)$ et $Q(x)$ deux polynômes, tel que $deg(P) < deg(Q)$. Si $Q(x) = (x -$

$a)^\alpha ... (x-l)^\delta$, avec $a, ..., l$ sont les racines réelles du $Q(x)$ et $\alpha, ..., \delta$ des nombres entiers (multiplicités des racines), on alors la décomposition de la fraction $\frac{P(x)}{Q(x)}$ en éléments simples:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x-a)^1} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + ... \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} + ... + \frac{L_1}{(x-l)^1} + \frac{L_2}{(x-l)^2} + ... + \frac{L_\delta}{(x-l)^\delta}.$$

Exemple 1.23 *Calculer les intégrales :* $\int \frac{1}{x^2-1} dx$ *et* $\int \frac{x dx}{(x-1)(x+1)^2}$.

1.2.4 Aires et Volumes

1- Aires des figures planes

Définition 1.26 *(Aires des figures planes)***.** *Soit f une fonction continue positive sur le segment $a \leq x \leq b$. On appelle l'aire de la figure limitée par la courbe $y = f(x)$, l'axe x et les droites $x = a$ et $x = b$, le nombre positif défini par :*

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Exemple 1.24 *Calculer l'aire de la figure limitée par les deux courbes $y = 2 - x^2$ et $y = x^2$.*

2- Volumes des corps

Définition 1.27 *(Volumes des corps). Le volume du corps obtenu par la rotation d'un trapèze curviligne limitée par la courbe $y = f(x)$, l'axe OX et les deux droites verticales $x = a$ et $x = b$ autour des axes OX ou OY est donné respectivement par les formules*

$$V_X = \pi \int_a^b y^2 dx, \quad et \quad V_Y = 2\pi \int_a^b xy dx.$$