Analyse Numérique

Unité d'enseignement : Méthodologie
Crédits : 3 coefficient :2

Contenu de la matière

- Notions d'erreurs
- Approximation et interpolation polynomiale
- Dérivations et intégration numériques
- Résolution des systèmes linéaires
- Calcul des valeurs et vecteurs propres
- Résolution des équations non linéaire
- Résolution numérique des équations différentielles ordinaires

Chapitre 1

Arithmétique des ordinateurs et analyse d'erreurs
Exemple On cherche à évaluer de manière numérique l'exponentielle $Z = \exp(x)$.
Trouver $\bar{Z}$approchant numériquement Z.

$$\forall x \in \Re \quad \text{esp(x)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$$

Sur machine le calcul est limité, on en est réduit à déterminer

$$\bar{Z} = \sum_{k=0}^{P} \frac{x^k}{k!}$$

Implique pour le calcul de l'exponentielle, on commet donc une erreur.

Erreurs relatives aux données d'entrée

***Erreur de mesure** générée par la différence entre la valeur exacte x et la valeur mesurée$\bar{X}$. Elle vaut

$$\Delta X = \left| X - \bar{X} \right|$$

***Erreur d'arrondi** générée par la différence entre la valeur exacte x et la valeur arrondie x *. Elle vaut
$\Delta x = x - x^*$

Exemple :

$$X = \frac{100}{6.55957} \approx 15.24490172374$$

on arrondie vers la borne inf

$$X^* = 15.24$$

$$\Delta X = 4.901723741038 \text{ x } 10^{-2}$$

Erreurs résultantes d'un calcul

***Erreur de troncature**
Exemple : dans le calcul numérique de l'exponentielle, l'erreur de troncature vaut
* **Erreur d'arrondi** dans les étapes d'un calcul (algorithme, programme)

$$T = Z - \bar{Z} = \sum_{k=P+1}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$$

***Exemple** : on veut calculer avec une calculatrice la somme entre*
$x_1 = 6.2317 \times 10^7$ $x_2 = 2.179 \times 10^2$
La valeur exacte du calcul est $x = 6.23172179 \times 10^7$ *et la valeur calculée est* $x^* = 6.2317 \times 10^7$.
Ici la machine a utilisée un programme implémenté sur machine

Evaluation d'erreur (Notions de base)

Soit X est une quantité calculée et X* la valeur calculée, alors :
1- Erreur absolue
X – X* est l'erreur et ΔX=|X-X*| est l'erreur absolue.

Exemple :
Si X = 2.224 et X* = 2.223 alors l'erreur absolue
|E|=|X - X*|= 2.224 – 2.223 = 0.001

2-Erreur relative

$$E = \left| \frac{X - X^*}{X_r} \right| \text{ est l'erreur relative,}$$

$X_r \neq 0$. X_r est une valeur de référence pour X. En général on prend $X_r = X$.

Exemple

$$E = \left| \frac{2.224 - 2.223}{2.224} \right| = \left| \frac{0.001}{2.224} \right| = 4.496 \text{ X } 10^{-4}$$

Cependant si X =f(t) avec a ≤t≤ b, on choisie parfois une valeur de référence globale pour tous les valeurs de t.
Exemple
Si X=sin(t) avec 0≤t≤π/2, on pourra prendre

$$X_r = \frac{\sqrt{2}}{2} = \begin{matrix} \sup \sin(t) \\ 0 \le t \le\le \frac{\pi}{4} \end{matrix}$$

En général, on ne connait pas le signe de l'erreur de sorte que l'on considère les erreurs absolues et les erreurs relatives absolues.

Stockage des nombres sur ordinateur

-Les nombres sont stockés dans un ordinateur comme ENTIERS (court et long) ou REELS (simple et double).

-On utilise le mot (2 octets ou 32 bits) pour représenter ces nombres.

-un bit prenant la valeur 0 ou 1.

2^{31}	2^{30}						2^3	2^2	2^1	2^0
0	0	0	0	$\cdots$ $\cdots$	0	0	1	0	1	0

Représentation en base 2 d'un nombre entier.

Représentation d'un entier sur un mot

En valeur positif strict entre 0 et 2^{16}-1 =
[0, 65536],
ou bien pour les valeurs positif et négatif entre
[-32768, 32767]

Représentation d'un entier sur deux mot

En valeur positif strict entre 0 et 2^{32}-1 =
[0, 4294 367 296],
ou bien pour les valeurs positif et négatif entre
[-2147483648, 2147483647]

Théorème :

Soit E un entier strictement supérieur à 1. *Tout nombre réel a non nul peut se représenter sous la forme*

$$a = \mathrm{sgn}(a)\mathrm{E}^{n}\sum_{k\geq 1}\frac{d_k}{E_k} = \mathrm{sgn}(a)\mathrm{E}^{n}\sum_{k\geq 1} b_k = \pm\mathrm{E}^{n}\ \mathrm{x}\ b$$

où sgn(a) ϵ {+,-}*est le signe de a, les* d_k *sont des entiers tels que* $0 < d_1 \leq E - 1$ *et* $0 \leq d_k \leq E\text{-}1$ *pour* $k \geq 2$*, et* $n \in Z$.

E est la base du système numérique

Exemple (base E=10) les d_k sont:0,1,2,3,…,8,9

$$0.0038 = +0.38.10^{-2} = +10^{-2}\left(\frac{3}{10}+\frac{8}{10^{2}}\right)$$

$$12.153 = +0.12153.10^{2} = +10^{2}\left(\frac{1}{10}+\frac{2}{10^{2}}+\frac{1}{10^{3}}+\frac{5}{10^{4}}+\frac{3}{10^{5}}\right)$$

$$\frac{1}{7} = +\,0,1422857... \quad = +10^{0}\left(\frac{1}{10^{1}}+\frac{4}{10}+\frac{2}{10^{3}}+\frac{8}{10^{4}}+\frac{5}{10^{4}}+\frac{7}{10^{5}}+...\right)$$

Notons que le développement décimal d'un nombre rationnel est périodique (ici, 1 /7 = **0.142857** 142857 **142857**…).

$$-\sqrt{2} = -1,4142... \quad = -10^{1}\left(\frac{1}{10}+\frac{4}{10^{2}}+\frac{1}{10^{3}}+\frac{4}{10^{4}}+\frac{2}{10^{5}}+...\right)$$

$$\pi = 3.14159... = +10^{1}\left(\frac{1}{10}+\frac{4}{10^{2}}+\frac{1}{10^{3}}+\frac{5}{10^{4}}+\frac{9}{10^{5}}+...\right)$$

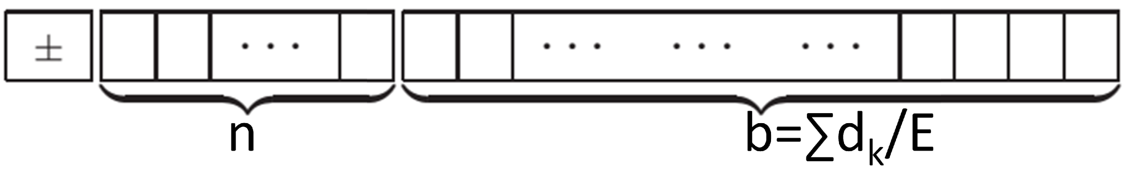
• Historiquement,

E= 10 car nous avons 10 doigts !

• Ordinateurs :

E = 2 (numération binaire),
E= 8 (numération octale),
Ou encore E = 16 (numération hexadécimale)

Pratiquement on partitionne le mot en deux parties, l'une contenant n et l'autre contenant b. (Le premier bit à gauche indique le signe).



Quelle que soit la taille du mot on ne disposera donc que d'un nombre limité de bits pour représenter les entiers b et n.

$$0 \quad \text{à} \quad \sum_{i=0}^{i=P} 2^{i} = 2^{P} - 1$$

Soit P le nombre de bits disponibles pour coder la mantisse. En base 2, on peu alors coder les entiers allant de

Exemple P = 3

$\boxed{0\,|\,0\,|\,0} = 0 \qquad \boxed{1\,|\,1\,|\,1} = 2^2 + 2^1 + 2^0 = 2^3 - 1 = 7$

$$\frac{1}{7} = +0,1422857... \quad = +10^0\left(\frac{1}{10^1} + \frac{4}{10} + \frac{2}{10^3} + \frac{8}{10^4} + \frac{5}{10^4} + \frac{7}{10^5} + ...\right)$$

Pour une représentation réel simple sur 4 mots, on divise par 2
Deux mots pour présenter b=∑dk/Ek d'où

$$\sum_{i=0}^{i=16} 2^i = 2^{16} - 1 = 65\,536 \qquad\qquad +0,1422857$$

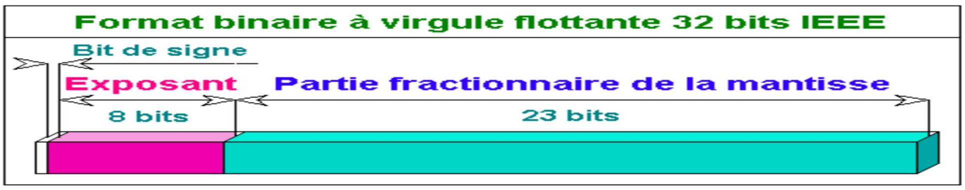
La mantisse 1422857>65536 donc il faut tronquer 57 et arrondir le chiffre 0.1422857 vers 0.14229.

Donc la mantisse devient 14229 <65536 donc on peut la codifier sur 16 bits de la façon suivante:

32 bits

+	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1	0	1	0	1

n=0 $\qquad$ $b_1b_2b_3b_4b5$=14229

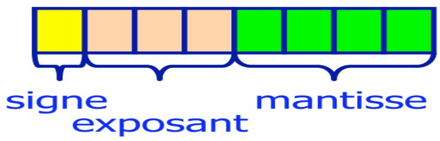


Utilisé pour le type "float" (simple précision)

- ✓ 1 bit pour le signe,
- ✓ 8 bits pour l'exposant n
  2^8-1=255 présenter en base 2 $\boxed{1\,|\,1\,|\,1\,|\,1\,|\,1\,|\,1\,|\,1\,|\,1}$
- ✓ et 23 pour la mantisse b.

L'exposant n est décalé à 127 pour représenter les exposants positifs et négatifs (-126 à 127).

Exemple:
supposons la représentation suivante:

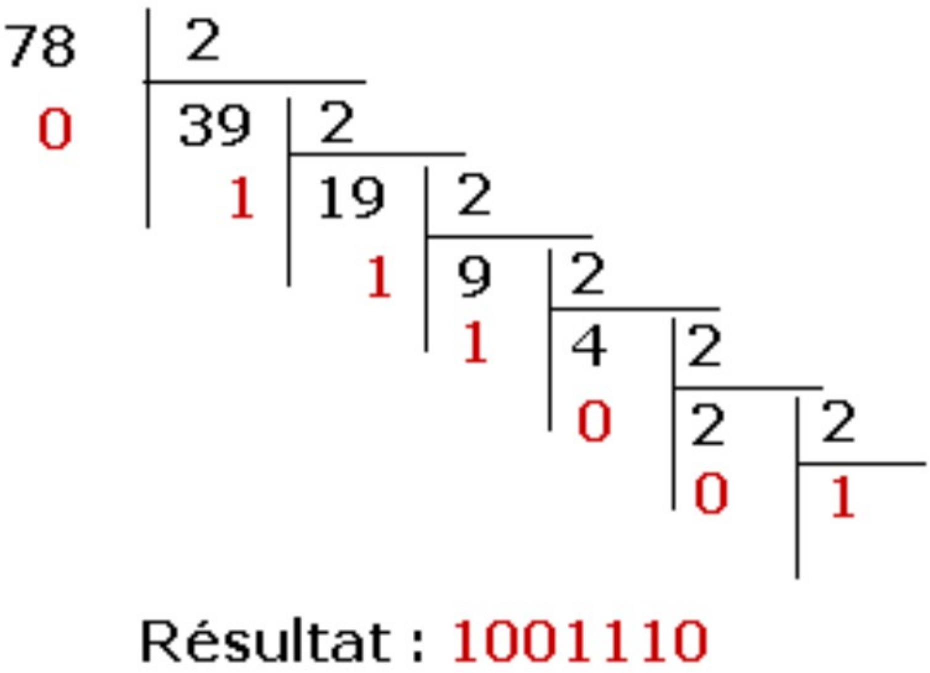


La valeur d'un nombre est donnée par l'expression:

Exemple du calcul inverse : traduire en binaire le nombre 78,347décimal

Partie entière : 78

Nous opérons une suite de divisions par 2 et retenons les divers restes. Ces restes sont repris à l'envers



Partie fractionnaire binaire du nombre 0,347

Voici comment on peut procéder pour calculer la partie fractionnaire du nombre binaire correspondant à 0,347

0,347 . 2 = 0,694 < 1 je pose 0 : 0,347 = 0,0...
0,694 . 2 = 1,388 > 1 je pose 1 : 0,347 = 0,01...
0,388 . 2 = 0,766 < 1 je pose 0 : 0,347 = 0,010...
0,766 . 2 = 1,552 > 1 je pose 1 : 0,347 = 0,0101...
0,552 . 2 = 1,104 > 1 je pose 1 : 0,347 = 0,01011...
0,104 . 2 = 0,208 < 1 je pose 0 : 0,347 = 0,010110...
0,208 . 2 = 0,416 < 1 je pose 0 : 0,347 = 0,0101100...
0,416 . 2 = 0,832 < 1 je pose 0 : 0,347 = 0,01011000...
0,832 . 2 = 1,664 > 1 je pose 1 : 0,347 = 0,010110001...
0,664 . 2 = 1,328 > 1 je pose 1 : 0,347 = 0,0101100011...

Résultat final
78,347 (écrit ici sous forme décimale)
est égal à 1001110,0101100011 écrit en binaire.

Exemple avec un réel positif coder 525,5 en simple précision

Sa représentation en base 2 est :
1000001101,1

en normalisant, on trouve :
$1,0000011011 \times 2^{9}$

ajout de 127 à l'exposant qui vaut 9 ce qui donne 136, soit en base 2 : 10001000

La **mantisse** est composée de la partie décimale de 525,5 en base 2 normalisée, c'est-à-dire 0000011011

codée sur 23 bits, il est nécessaire d'ajouter des zéros pour la compléter :
00000110110000000000000

La représentation du nombre 525,5 en binaire avec la ***norme IEEE 754***

0 1000 1000 00000110110000000000000

en regroupant les quartets :
0100 0100 0000 0011 0110 0000 0000 0000

Exemple avec un réel négatif coder -0,625 en simple précision

sa représentation en base 2 est :
0,101

en normalisant, on trouve :
$1,01 \times 2^{-1}$

ajout de 127 à l'exposant qui vaut -1 ce qui donne 126, soit en base 2 : 01111110

La **mantisse** sur 23 bits est
01000000000000000000000

La représentation du nombre -0,625 en binaire avec la ***norme IEEE***

1 0111 1110 01000000000000000000000

en regroupant les quartets :
1011 1111 0010 0000 0000 0000 0000 0000

Exercices :

1-Convertir le nombre décimal 8.625 en virgule flottante suivant la norme IEEE 754.

2-Quelle est la valeur, en décimal, des mantisses suivantes ? (en simple précision) m1 = $(1)10101101011111110010100_{(2)}$
m2 = $(1)10000000000000000000000_{(2)}$

3-Vérifier l'égalité entre (9; 90625)10 et (1001; 11101)2

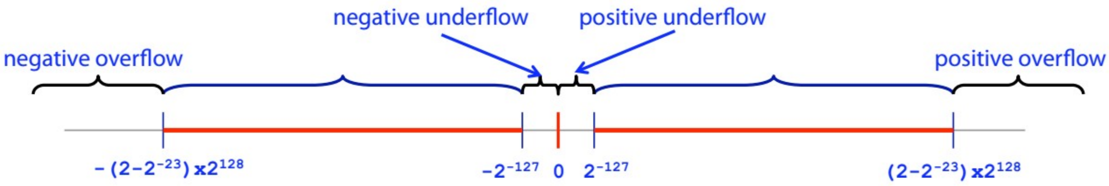
4-Coder -0.375 = ? En réel simple.

4- Faire le passage en binaire d'un nombre réel en base 10: 0.3 = ?

$$
\begin{aligned}
0.3\times 2 &= \boxed{0}.6\\
0.6\times 2 &= \boxed{1}.2\\
0.2\times 2 &= \boxed{0}.4\\
0.4\times 2 &= \boxed{0}.8\\
0.8\times 2 &= \boxed{1}.6\\
0.6\times 2 &= \boxed{1}.2\\
&\ \ \ldots
\end{aligned}
$$

$$0.3 = 0.01001[1001]$$

❖ Le rang des nombres couverts en précision simple est:



❖ Il y a toujours un compromis entre le rang et la précision: si on augmente le nombre de bits de l'exposant, on étend le rang de nombres couverts. Mais, comme il y a toujours un nombre fixe de nombres que l'on peut représenter, la précision diminue. La seule façon d'augmenter le rang et la précision est d'augmenter le nombre total de bits du format.

Les nombres spéciaux

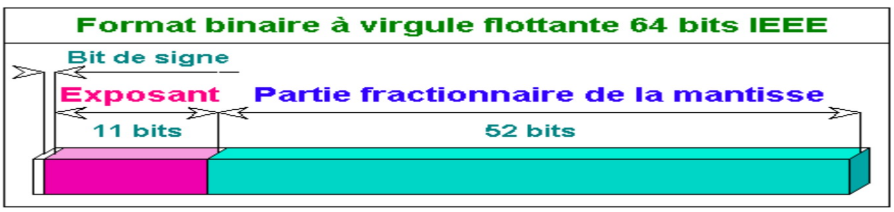
Les nombres spéciaux +Inf, -Inf et NaN définis par R font eux aussi partie de la norme IEEE 754. Tous les logiciels de calcul numérique qui se conforment à cette norme les reconnaissent aussi.
La valeur +Inf correspond à un nombre en virgule flottante dont le bit de signe vaut 0, dont les bits d'exposant décalé valent tous 1 et dont la mantisse est nulle. La valeur -Inf n'en diffère que par le bit de signe qui vaut 1. La table suivante donne les représentations en simple précision :

Valeur	*Représentation*
+Inf	0 11111111 00000000000000000000000
-Inf	1 11111111 00000000000000000000000

La valeur NaN n'est pas représentée de manière unique : tous les nombres ayant les bits d'exposant égaux à 1 et les bits de mantisse quelconques mais non tous nuls sont considérés comme des valeurs NaN. Chaque application est libre d'exploiter ces différentes possibilités. Du point de vue de l'utilisateur de R, il n'y a qu'une seule valeur NaN et on n'a pas `a connaître la manière dont elle est implémentée en interne.
Enfin, la norme permet, en principe, de distinguer deux valeurs différentes de zéro : ±0. Tous les bits sont nuls sauf celui de signe qui peut valoir 0 ou 1 :

Valeur	*Représentation*
$+0$	0 00000000 00000000000000000000000
-0	1 00000000 00000000000000000000000

La virgule flottante 64 bits



Utilisé pour le type "double" (double précision)

❑ Précision double:

- nombre de bits: 64
- mantisse sur 52 bits
- exposant sur 11 bits (biais(décalage)) = $2^{11-1} - 1 = 1023$)

❑ Dans les deux précisions il y a quelques valeurs particulières:

- deux valeurs pour 0: les deux signes, avec exposant=mantisse=0
- Infni positif: signe positif, exposant=1...1, mantisse=0
- Infni négatif: signe négatif, exposant=1...1, mantisse=0
- NaN (not a number): signe indifférent, exposant=1...1, mantisse≠0

La nouvelle norme de la virgule flottante à partir 2008

L'´evolution des architectures machine a conduit à l'élargissement de la norme IEEE754 à de nouveaux types de données.

Le principal apport de cette révision est en fait l'ajout d'un type " quadruple précision" codé sur 128 bits et qui permet donc d'implémenter des calculs avec une précision beaucoup plus importante que les nombres en double précision.

	Longueur	Signe	Mantisse	Exposant
quadruple précision	128 bits	1 bit	112 bits + 1 (bit caché)	15 bits

Le codage en quadruple précision permet d'atteindre une précision de 34 chiffres significatifs environ (en décimal)

But de ce chapitre 1

Prendre connaissance de l'impact de :

*Ces contraintes,

*Et les choix de ces méthodes.

Nous introduirons donc les notions de stabilité et d'efficacité. Et suivant les méthodes utilisées, nous aurons affaire à tel ou tel type d'erreur. Pour les systèmes linéaires par exemple nous étudierons deux types de méthodes bien distinctes :

1. **les méthodes directes** : qui consistent en des algorithmes qui permettent de calculer la solution exacte (mis à part les erreurs d'arrondis en virgule flottante) en un nombre fini d'opération,
2. **les méthodes itératives** : qui consistent en l'approche de la solution exacte x par une suite $(x_n)n\in\mathbb{N}$ de solutions approchées. Nous arrêtons alors les calculs lorsque nous atteignons un certain x_{n0}. Nous avons alors une erreur de troncature due à l'approximation de la solution exacte

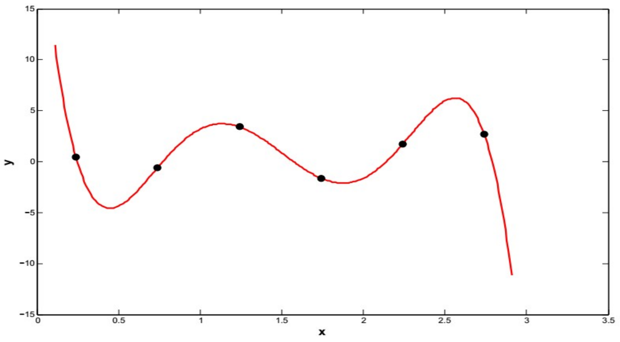
Conclusion

Dans certains cas il doit être pris en compte dans l'analyse des résultats dont une utilisation erronée pourrait être coûteuse.

Chapitre 2

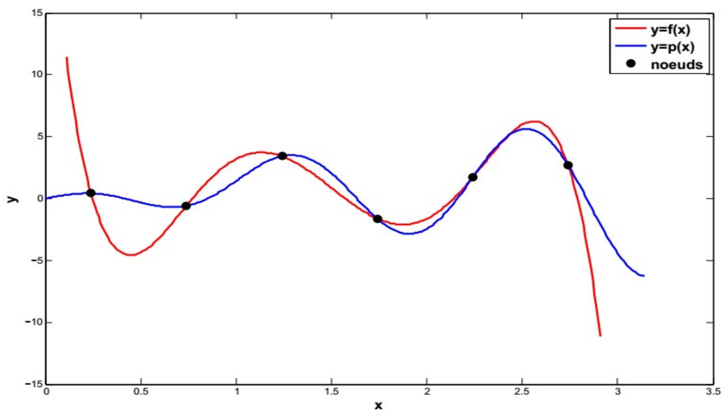
Approximation et interpolation polynomiale

Introduction



Le problème de l'*interpolation* consiste `a chercher des fonctions "simples" (polynômes, polynômes par morceaux, polynômes trigonométriques) passant par des points donnés $(x_0, y_0),(x_1, y_1), \dots ,(x_n, y_n)$, c.-à-d., on cherche $p(x)$ avec $p(x_i) = y_i$ pour $i = 0,1, \dots , n$. Si les valeurs de $y_i$ satisfont $y_i = f(x_i)$ o`u $f(x)$ est une fonction donnée, il est intéressant d'étudier l'erreur de l'*approximation* $f(x) - p(x)$ =?

Exemple 2.1.
En physique, on mesure expérimentalement la température d'un objet qui refroidit au cours du temps. On obtient une suite de valeurs à différents temps t_i. On cherche alors à tracer la courbe de refroidissement la plus proche possible des points mesurés, et ainsi à estimer des valeurs de la fonction en des points non mesurés.



Les 3 grandes classes d'approximation fonctionnelle

Il existe trois grandes classes de méthodes :

- L'interpolation
- L'approximation aux moindres carrés
- L'approximation uniforme

Les 3 grandes familles de fonctions approximantes

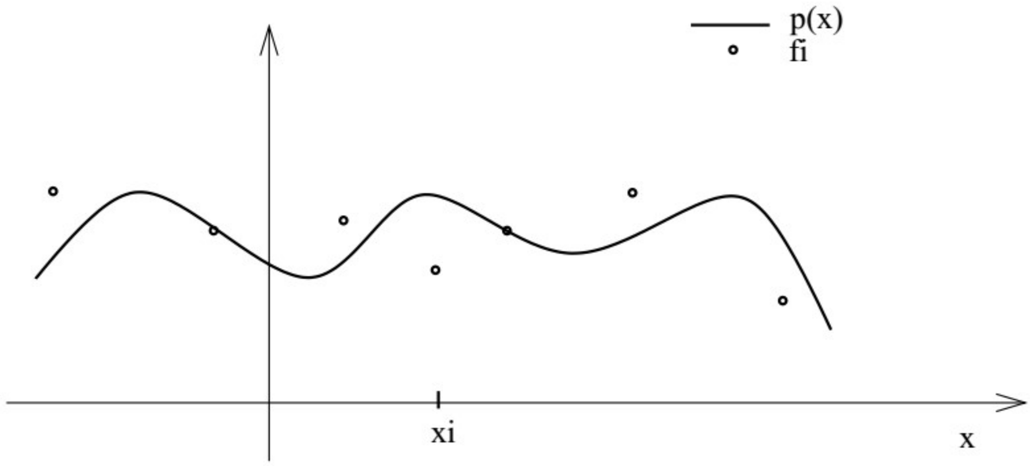
Les trois grandes familles de fonctions approximantes sont :

- Les polynômes (théorème de Stone-Weierstrass)
- Les fractions rationnelles (approximantes de Padé)
- Les fonctions trigonométriques (série de Fourrier)

Rappels sur les polynômes

Soit K = R ou C. Nous notons *P*(K) l'ensemble des fonctions polynômes. Autrement dit, pour tout $P \in P(K)$, il existe un entier $n \in N$ et des coefficients a_i, i = 0,…, n dans K tels que :

$$P(x) = a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n; \quad \text{pour tout } x \in K.$$



La complexité du polynôme de degré égal à n est coûteuse en temps de calcul.

Le théorème de Stone-Weierstrass

Théorème 1.1 (POLYNÔMES DE LAGRANGE)
Pour tout choix de nœuds $x_0, x_1, \ldots, x_n$ dans $[a,b]$, il existe un unique polynôme P_n de degré inférieur ou égal à n qui coïncide avec f aux points $x_0; x_{1,\ldots,}x_n$ (*i. e.* $P(x_j) = f(x_j)$ pour tout $j = 0,\ldots, n$). Ce polynôme s'écrit

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)L_i(x) \; avec \;\; L_i(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Exemple 1:
Soient les 3 points d'abscisse donnée par le tableau suivant :

	x	$y = f(x)$
x_0	0	y_0=1
x_1	1	y_1=2
x_2	2	y_2= 5

Solution
Le degré du polynôme est défini par le nombre de points -1
Degré $P_n(x) \leq 3-1$ donc en calcul $P_2(x)$ soit
1-Un Polynôme du deuxième degré ($P_2=ax^2+bx+c$),
2- Ou un Polynôme de premier degré ($P_1=ax+b$),
3- Ou une constante ($P_0=a$).
Donc :

$$P_2(x) = \sum_{i=0}^{2} f(x_i)L_i(x) = \sum_{i=0}^{2} y_i\, L_i(x)$$

$$P_2(x) = y_0.L_0(x) + y_1.L_1(x) + y_2.L_2(x)$$

Avec

$$L_i(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ j\neq i}}^{2} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} \frac{(x - x_2)}{(x_0 - x_2)} \; on\ remplace\ x_0, x_1, x_2$$

$$L_0(x) = \frac{(x-1)}{(0-1)}\frac{(x-2)}{(0-2)} = \frac{(x-1)}{-1}\frac{(x-2)}{-2} = \frac{(x-1)(x-2)}{2},$$

$$L_0(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 3x + 2) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 1$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)}\frac{(x - x_2)}{(x_1 - x_2)} \; on\ remplace\ x_0, x_1, x_2,$$

$$L_1(x) = \frac{(x + 0)}{(1 - 0)}\frac{(x - 2)}{(1 - 2)} = \frac{x}{1}\frac{(x - 2)}{-1} = \frac{x(x - 2)}{-1},$$

$$L_1(x) = -x^2 + 2x$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)}{(x_2 - x_0)}\frac{(x - x_1)}{(x_2 - x_1)} \; on\ remplace\ x_0, x_1, x_2,$$

$$L_2(x) = \frac{(x + 0)}{(2 - 0)}\frac{(x - 1)}{(2 - 1)} = \frac{(x - 1)}{1}\frac{x}{2} = \frac{x(x - 1)}{2},$$

$$L_2(x) = \frac{1}{2}(x^2 - x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\ x$$

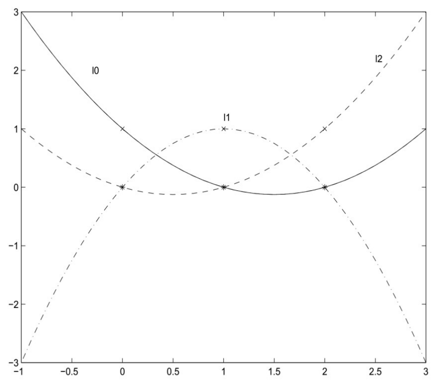


FIG. 1: Polynômes de Lagrange pour 3 points

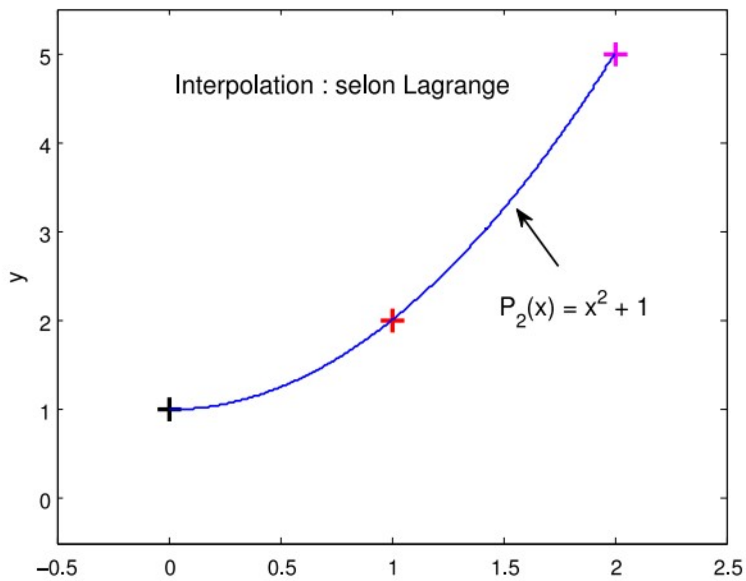
$$P_2(x) = y_0.\left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}.\frac{x - x_2}{x_0 - x_2}\right) + y_1.\left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}.\frac{x - x_2}{x_1 - x_2}\right) + y_2.\left(\frac{x - x_0}{x_2 - x_0}.\frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\right)$$

$$\Rightarrow P_2(x) = 1.\left(\frac{(x - 1)(x - 2)}{(-1)(-2)}\right) + 2.\left(\frac{(x)(x - 2)}{(1)(-1)}\right) + 5.\left(\frac{(x)(x - 1)}{(2)(1)}\right)$$

$$\Rightarrow P2(x) = \left(\frac{(x^2 - 3x + 2)}{2}\right) - 2.\left(\frac{(x^2 - 2x)}{1}\right) + 5.\left(\frac{(x^2 - x)}{2}\right)$$

$$\Longrightarrow P_2(x) = \left(\frac{x^2 - 3x + 2 - 4x^2 + 8x + 5x^2 - 5x}{2}\right) = x^2 + \mathbf{1}$$

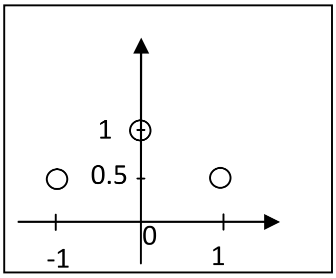
Ci-dessous, le graphique représentant le polynôme interpolant et les points d'interpolation.



Exemple 2:

Soit la fonction $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ et les données des trois points d'abscisses données par le tableau suivant

	x	$y = f(x) = \frac{1}{1+x^2}$
x_0	-1	$y_0=f(x_0)=0.5$
x_1	0	$y_1=f(x_1)=1$
x_2	1	$y_2=f(x_2)=0.5$



Question : Déterminer le polynôme de Lagrange

Solution

Le degré du polynôme est défini par le nombre de points -1

Degré $P_n(x) \leq 3\text{-}1$ donc en calcul $P_2(x)$ soit

1-Un Polynôme du deuxième degré ($P_2=ax^2+bx+c$),

2- Ou un Polynôme de premier degré ($P_1=ax+b$),

3- Ou une constante ($P_0=a$).

Donc :

$$P_2(x) = \sum_{i=0}^{2} f(x_i) L_i(x) = \sum_{i=0}^{2} y_i\, L_i(x)$$
$$P_2(x) = y_0 . L_0(x) + y_1 . L_1(x) + y_2 . L_2(x)$$

Avec Le coefficient de Lagrange qui s'écrit

$$L_i(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ j\neq i}}^{2} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} \frac{(x - x_2)}{(x_0 - x_2)} \; on\ remplace\ x_0, x_1, x_2$$
$$L_0(x) = \frac{(x - 0)}{(-1 - 0)} \frac{(x - 1)}{(-1 - 1)} = \frac{x}{-1} \frac{(x - 1)}{-2} = \frac{x(x - 1)}{2},$$
$$L_0(x) = \frac{1}{2}(x^2 - x)$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} \frac{(x - x_2)}{(x_0 - x_2)} \; on\ remplace\ x_0, x_1, x_2,$$
$$L_1(x) = \frac{(x + 1)}{(0 + 1)} \frac{(x - 1)}{(0 - 1)} = \frac{(x + 1)}{1} \frac{(x - 1)}{-1} = \frac{(x + 1)(x - 1)}{-1},$$
$$L_1(x) = -x^2 + 1$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)}{(x_2 - x_0)} \frac{(x - x_1)}{(x_2 - x_1)} \; on\ remplace\ x_0, x_1, x_2,$$
$$L_2(x) = \frac{(x + 1)}{(1 + 1)} \frac{(x - 0)}{(1 - 0)} = \frac{(x + 1)}{2} \frac{x}{1} = \frac{x(x + 1)}{2},$$
$$L_2(x) = \frac{1}{2}(x^2 + x)$$

$$P_2(x) = y_0 . L_0(x) + y_1 . L_1(x) + y_2 . L_2(x)$$
$$P_2(x) = \frac{1}{2} . L_0(x) + 1 . L_1(x) + \frac{1}{2} . L_2(x)$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}(x^2 - x) + 1.(-x^2 + 1) + \frac{1}{2}.\frac{1}{2}(x^2 + x)$$
$$= \frac{1}{4}(x^2 - x) + (-x^2 + 1) + \frac{1}{4}(x^2 + x) = -\frac{1}{2}x^2 + 1,$$

$$P_2(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 1$$

Remarque: Le polynôme P_n est appelé polynôme d'interpolation de Lagrange de la fonction f aux points $x_0, x_1, ...x_n$. Les polynômes $L_i(x)$ sont appelés polynômes de base de Lagrange associés à ces points.

Théorème 1.2— (Erreur d'interpolation de Lagrange)
Soit $f \in C^{n+1}([a, b])$ et $a \leq x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n \leq b$. Soit p le polynôme de Lagrange définit par

$$p(x_i) = f(x_i) \text{ pour } i = 0, 1, ..., n.$$

Alors

$$f(x) - p(x) = \frac{L(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$$

Avec

$$L(x) = \prod_{j=0}^{n} (x - x_j) avec\ \ a \leq \min(x_0, x) < \xi < \max(x, x_n) \leq b$$

Efficacité et inconvénients

Principal inconvénient : rajouter un nœud change complètement les interpolant de base de Lagrange et on doit donc recalculer entièrement le polynôme $P_n(x\,; f)$.

Méthode de Hermite

L'interpolation de Hermite est une généralisation de celle de Lagrange.

Soit f(x) une fonction définie et dérivable sur l'intervalle [a,b], alors Les points distincts x_0, x_1,…,x_n, (n+1) de l'intervalle [a b] avec y=f(x) une fonction définie sur le même intervalle admettant les dérivées $(y_0, y_0'), (y_1, y_1'), \dots, (y_n, y_n')$ ou $(f(x_0), f'(y_0)), (f(x_1), f'(y_1)), \dots, (f(x_n), f'(y_n))$ aux nœuds x_i, l'utilisation des valeurs de la fonction et ses dérivées augmente le degré du polynôme sans augmenter le nombre de points x_i, pour cela, nous avons (2n+2) conditions à satisfaire, Par conséquents le polynôme p_n qui approxime f(x) est de degré (2n+1).

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \left(y_i D_i(x) + y_i'(x - x_i)\right).(L_i(x))^2$$

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \{1 - 2L_i'(x_i)(x - x_i)L_i^2(x)\}y_i + \sum_{i=0}^{n} (x - x_i)L_i^2(x)y_i'$$

Avec,

$$L_i(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \qquad c_i = \sum_{\substack{i=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{1}{x_i - x_j} \quad D_i(x) = 1 - 2(x - x_i).c_i$$

Ou bien par cette forme

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \{1 - 2L_i'(x_i)(x - x_i)L_i^2(x)\}y_i + \sum_{i=0}^{n} (x - x_i)L_i^2(x)y_i'$$

Signalons au passage que l'interpolation de Lagrange est un cas particulier de celle de Hermite (k_0=k_1=…=k_n=0).

L'erreur sur la formule est $R(x) = \frac{f^{2n+2}(\xi)}{(2n+2)!} [\, \prod(x - x_i)\,]^2$

Exemple

On utilisant la formule d'Hermite, trouver la valeur de sin(0.5) avec les données suivantes :

	x(radian)	y=f(x)=Sin(x)	y'=f'(x)=Cos(x)
x_0	-1	$y_0=f(x_0)=-0.8415$	$y_0'=f'(x_0)=0.5403$
x_1	0	$y_1=f(x_1)=0$	$y_1'=f'(x_1)=1$
x_2	1	$y_2=f(x_2)=0.8415$	$y_2'=f'(x_2)=0.5403$

Solution

On f(x)=sin(x) sa dérivée f' (x)=cos(x)

On à trois points donc le degré est égal à 2.

L'équation Polynomial d'Hermite de degré 2 s'écrit

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{2} \{1 - 2L_i'(x_i)(x - x_i)L_i^2(x)\}y_i + \sum_{i=0}^{2} (x - x_i)L_i^2(x)y_i'$$

Le coefficient de Lagrange s'écrit alors $L_i(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ j\neq i}}^{2} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}$

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)}\frac{(x - x_2)}{(x_0 - x_2)} \; on\ remplace\ x_0, x_1, x_2$$

$$L_0(x) = \frac{(x - 0)}{(-1 - 0)}\frac{(x - 1)}{(-1 - 1)} = \frac{x}{-1}\frac{(x - 1)}{-2} = \frac{x(x - 1)}{2},$$

$$L_0(x) = \frac{1}{2}(x^2 - x), L_0'(x) = x - \frac{1}{2},$$

$$L_0(0.5) = -\frac{1}{8} = -0.125\ , L_0'(0.5) = 0$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)}\frac{(x - x_2)}{(x_0 - x_2)} \; on\ remplace\ x_0, x_1, x_2,$$

$$L_1(x) = \frac{(x + 1)}{(0 + 1)}\frac{(x - 1)}{(0 - 1)} = \frac{(x + 1)}{-1}\frac{(x - 1)}{-1} = \frac{(x + 1)(x - 1)}{1},$$

$$L_1(x) = -x^2 + 1, L_1'(x) = -2x,$$

$$L_1(0.5) = \frac{3}{4} = 0.75\ , L_1'(0.5) = -1$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)}{(x_2 - x_0)} \frac{(x - x_1)}{(x_2 - x_1)} \text{ on remplace } x_0, x_1, x_2,$$

$$L_2(x) = \frac{(x + 1)}{(1 + 1)} \frac{(x - 0)}{(1 - 0)} = \frac{(x + 1)}{2} \frac{x}{1} = \frac{x(x + 1)}{2},$$

$$L_2(x) = \frac{1}{2}(x^2 + x), L_2^{'}(x) = x + \frac{1}{2},$$

$$L_2(0.5) = \frac{3}{8} == 0.375 , L_2^{'}(0.5) = 1$$

$$P_2(x) = \sum_{i=0}^{2} \{1 - 2L_i^{'}(x_i)(x - x_i)L_i^2(x)\} y_i + \sum_{i=0}^{2} (x - x_i)L_i^2(x) y_i^{'}$$

$$= \{1 - 2L_0^{'}(x_0)(x - x_0)L_0^2(x)\} y_0 + (x - x_0)L_0^2(x) y_0^{'}$$
$$+ \{1 - 2L_1^{'}(x_1)(x - x_1)L_1^2(x)\} y_1 + (x - x_1)L_1^2(x) y_1^{'}$$
$$+ \{1 - 2L_2^{'}(x_2)(x - x_2)L_2^2(x)\} y_2 + (x - x_2)L_2^2(x) y_0^{'},$$

$$\Rightarrow P_2(0.5) =$$
$$\{1 - 2L_0^{'}(x_0)(0.5 - x_0)L_0^2(0.5)\} y_0 + (0.5 - x_0)L_0^2(0.5) y_0^{'}$$
$$+\{1 - 2L_1^{'}(x_1)(0.5 - x_1)L_1^2(0.5)\} y_1 + (0.5 - x_1)L_1^2(0.5) y_1^{'}$$
$$+\{1 - 2L_2^{'}(x_2)(0.5 - x_2)L_2^2(0.5)\} y_2 + (0.5 - x_2)L_2^2(0.5) y_0^{'}$$

$$\Rightarrow P_2(0.5) =$$
$$\{1 - 2L_0^{'}(-1)(0.5 + 1)L_0^2(0.5)\}(0.8415) + (0.5 + 1)L_0^2(0.5)(0.5403)$$
$$+\{1 - 2L_1^{'}(0)(0.5 - 0)L_1^2(0.5)\}(0) + (0.5 - 0)L_1^2(0.5)(1)$$
$$+\{1 - 2L_2^{'}(1)(0.5 - 1)L_2^2(0.5)\}(0.8415)$$
$$+(0.5 - 1)L_2^2(0.5)(0.5403)$$

$$\Rightarrow P_2(0.5) =$$
$$\{1 - 2 * 0 * (0.5 + 1)\} \left(\frac{-1}{8}\right)^2 (-0.8415) + (0.5 + 1)(\frac{-1}{8})^2(0.5403)$$
$$+ \left\{1 - 2 * 1 * (0.5 - 0) \left(\frac{3}{4}\right)^2\right\}(0) + (0.5 - 0) \left(\frac{3}{4}\right)^2 (-1)$$
$$+ \left\{1 - 2 * 1 * (0.5 - 1) \left(\frac{3}{8}\right)^2\right\}(0.8415)$$

$$+(0.5-1)\left(\frac{3}{8}\right)^2(0.5403)$$

L'interpolation d'Hermite $\Rightarrow \boldsymbol{P_2(0.5)=0.3743}$ et la valeur exacte **sin(0.5)=0.4794**

Remarque : si on utilise **l'interpolation de Lagrange** pour la même fonction et même données on obtient $\boldsymbol{P_2(0.5)=0.4207}$ qui est proche de la valeur exacte de sin(0.5), ce qui nous permet de dire l'augmentation du degré du polynôme par Hermite nous donne pas nécessairement de meilleur résultat.

Erreur au point d'abscisse 0.5 est :

$e_{Hermite}$=sin(0.5)-P_2(0.5)(Hermite)=(0.4794-0.3743)=0.1051

$e_{Lagrange}$=sin(0.5)- P_2(0.5)(Lagrange)=(0.4794-0.4207)=0.0587

Interpolation de Newton

	x	$y = f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$f'''(x)$
x_0	-5	$y_0=-2$	$a = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = 2$	$d = \dfrac{b - a}{x_2 - x_0} = \dfrac{-7}{5}$	$f = \dfrac{d - e}{x_3 - x_0} = \dfrac{-17}{35}$
x_1	-1	$y_1=6$	$b = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = -5$		
x_2	0	$y_2=1$	$c = \dfrac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} = 1$	$e = \dfrac{c - b}{x_3 - x_1} = \dfrac{6}{3} = 2$	
X_3	2	$y_3= 3$			

$$P_3(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + c_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

$$P_3(x) = -2 + 2(x - x_0) - \frac{7}{5}(x - x_0)(x - x_1) - \frac{17}{35}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

$$P_3(x) = -2 + 2(x + 5) - \frac{7}{5}(x + 5)(x + 1) - \frac{17}{35}(x + 5)(x + 1)(x - 0)$$

$$= -2 + 2x + 10 - \frac{7}{5}(x^2 + 6x + 5) - \frac{17}{35}(x^3 + 6x^2 + 5x)$$

Le polynôme d'interpolation de Newton obtenu pour (n + 1) points x_0; x_1, …, x_n prend la forme :

$$P_n(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + c_n(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1})$$

Avec

$$\begin{cases} P_n(x_0) = c_0 = y_0 \\ P_n(x_1) = c_0 + c_1(x_1 - x_0) = y_1 \\ P_n(x_2) = c_0 + c_1(x_2 - x_0) + c_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = y_2 \\ \dots \\ P_n(x_n) = c_0 + c_1(x_n - x_0) + c_2(x_n - x_0)(x_n - x_1) + \dots + c_n(x_n - x_0)(x_n - x_1)\dots(x_n - x_{n-1}) = y_n \end{cases}$$

Remarquons d'abord que le terme c_i ne dépend que des x_k avec ($k = 0, \dots, i$):

$c_0 = y_0$……………………………….1

$$c_0 + c_1(x_1 - x_0) = y_1 \Rightarrow c_1 = \frac{y_1 - c_0}{x_1 - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..2$$

$$c_0 + c_1(x_1 - x_0) + c_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = y_2 \Rightarrow$$

$$c_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = y_2 - c_0 - c_1(x_1 - x_0) \Rightarrow$$

$$c_2 = \frac{y_2 - c_0 - c_1(x_1 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \Rightarrow \frac{y_2 - y_0}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} - \frac{\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

$$c_2 = \frac{\frac{(y_2 - y_0)(x_1 - x_0) - (y_1 - y_0)(x_2 - x_0)}{x_1 - x_0}}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

$$c_2 = \frac{(y_2 - y_0)(x_1 - x_0) - (y_1 - y_0)(x_2 - x_0)}{(x_1 - x_0)(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{\frac{(y_1 - y_0)}{(x_1 - x_0)} - \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}}{(x_2 - x_0)}$$

La formule précédente se généralise sans difficulté, le polynôme d'interpolation de Newton peut donc calculer comme suit en construisant le tableau :

x_0	$f(x_0)$						
		$f[x_0,x_1]$					
x_1	$f(x_1)$		$f[x_0,x_1,x_2]$				
		$f[x_1,x_2]$		$f[x_0,x_1,x_2,x_3]$			
x_2	$f(x_2)$		$f[x_1,x_2,x_3]$	.	.		
		$f[x_2,x_3]$	.	.	.	.	
x_3	$f(x_3)$		.	.	.	.	$f[x_0,\ldots,x_n]$
.	.	.	.	.	.	.	
.	.	.	.	.	.		
.	.	.	.	$f[x_{n-3},x_{n-2},x_{n-1},x_n]$			
x_{n-1}	$f(x_{n-1})$		$f[x_{n-2},x_{n-1},x_n]$				
		$f[x_{n-1},x_n]$					
x_n	$f(x_n)$						

Avec

$$c_0 = f(x_0), c_1 = f[x_0, x_1], c_2 = f[x_0, x_1, x_2], \ldots, c_n = f[x_0, x_1, \ldots, x_n]$$

$$f(x_i) = y_i,$$
$$c_i = f[x_0, x_1, \ldots, x_i]$$

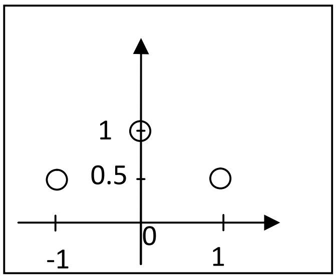
$$f[x_i, x_j] = \frac{f(x_j) - f(x_i)}{x_j - x_i}$$

$$f[x_i, x_j, x_k] = \frac{f[x_j, x_k] - f[x_i, x_j]}{x_k - x_i}$$

Exercice 1:

Soit la fonction $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ et les données des trois points d'abscisses données par le tableau suivant

	x	$y = f(x) = \frac{1}{1+x^2}$
x_0	-1	$y_0 = f(x_0) = 0.5$
x_1	0	$y_1 = f(x_1) = 1$
x_2	1	$y_2 = f(x_2) = 0.5$



Question : Déterminer le polynôme de Newton

Solution:

	x	$y = f(x) = \frac{1}{1+x^2}$		
x_0	-1	$c_0 = y_0 = f(x_0) = 0.5$	$c_1 = \frac{1-0.5}{0+1} = 0.5$	$c_2 = \frac{a - c_1}{x_2 - x_0}$ $c_2 = \frac{-0.5-0.5}{1+1}$=-0.5
x_1	0	$y_1 = f(x_1) = 1$		
x_2	1	$y_2 = f(x_2) = 0.5$	$a = \frac{0.5-1}{1-0}$ $a = -0.5$	

$$P_2 = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1)$$

Avec

$$c_0 = y_0 = f(x_0) = 0.5, \quad c_1 = 0.5, \quad c_2 = -0.5$$

$$P_2 = 0.5 + 0.5(x+1) - 0.5(x+1)(x)$$

$$P_2 = 0.5 + 0.5x + 0.5 - 0.5x^2 - 0.5x$$

$$P_2 = 1 - \frac{1}{2}x^2$$

Exercice 2:

On se donne le graphe suivant

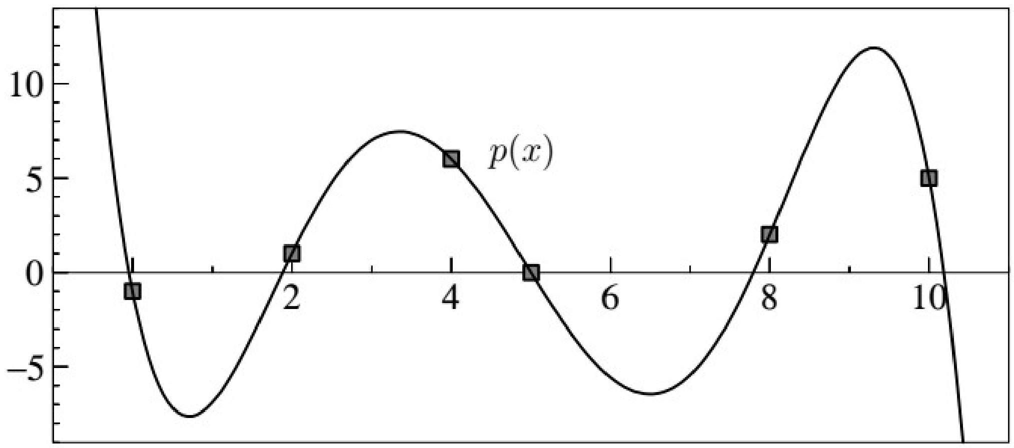


FIG. II.1: Polynôme d'interpolation de degré 5

1) A partir du graphe, déterminer les coordonnées du graphe.
2) En appliquant l'interpolation de Newton déterminé le polynôme associé.

S olution

TAB. II.1: Différences divisées pour les données de la fig. II.1

x_i	y_i	δy	$\delta^2 y$	$\delta^3 y$	$\delta^4 y$	$\delta^5 y$
0	-1					
		1				
2	1		$3/8$			
		$5/2$		$-77/120$		
4	6		$-17/6$		$167/960$	
		-6		$3/4$		$-287/9600$
5	0		$5/3$		$-1/8$	
		$2/3$		$-1/4$		
8	2		$1/6$			
		$3/2$				
10	5					

	x	$y = f(x) = \frac{1}{1+x^2}$		
x_0	-1	$c_0 = y_0 = f(x_0) = 0.5$	$c_1 = \frac{1-0.5}{0+1} = 0.5$	$c_2 = \frac{a-c_1}{x_2-x_0}$ $c_2 = \frac{-0.5-0.5}{1+1}$=-0.5
x_1	0	$y_1 = f(x_1) = 1$		
x_2	1	$y_2 = f(x_2) = 0.5$	$a = \frac{0.5-1}{1-0}$ $a = -0.5$	

Le polynôme d'interpolation est alors donné par

$$P_5 = -1 + x + x(x-2)\frac{3}{8} - x(x-2)(x-4)\frac{77}{120} + x(x-2)(x-4)(x-5)\frac{197}{960} - x(x-2)(x-4)(x-5)(x-8)\frac{287}{9600}$$

Ou mieux encore

$$P_5(x) = -1 + x\left(1 + (x-2)\left(\frac{3}{8} + (x-4)\left(-\frac{77}{120} + (x-5)\left(\frac{167}{960} - (x-8)\frac{287}{9600}\right)\right)\right)\right)$$

Remarque : L'ordre des $\{x_i\}$ n'a aucune importance pour la formule de Newton. Si l'on permute les données (xi, yi), on obtient évidemment le même polynôme l'exemple. Pour ci-dessus et pour les $\{x_i\}$ choisis dans l'ordre {4, 5, 2, 8, 0, 10}, on obtient ainsi

$$P_5(x) = 6 + (-4)\left(-6 + (x-5)\left(-\frac{17}{6} + (x-2)\left(\frac{3}{4} + (x-8)\left(\frac{157}{960} - x\frac{287}{9600}\right)\right)\right)\right)$$

Chapitre 3

Dérivations et intégration numériques

Développement limité

Définition

En physique et en mathématiques, un développement limité d'une fonction en un point est une approximation polynomiale de cette fonction au voisinage de ce point, s'écrit comme suit

- $P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_n x^n + R_n(x)$ dont le degré est appelé l'*ordre* du développement ;
- Ou $R(x)$ qui peut être négligé lorsque la variable est suffisamment proche du point considéré.

En physique, il est fréquent de *confondre* la fonction avec son développement limité, à condition que l'erreur ($R(x)$) ainsi faite soit inférieure à l'erreur autorisée.

Remarque : Si l'on se contente d'un développement d'ordre un, on parle **d'approximation linéaire** ou **d'approximation affine**.

Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur un intervalle I, et $x_0 \in I$. On dit que f admet un développement limité d'ordre n en x_0, s'il $\exists(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n) \in R^{n+1}$ tels que la fonction définie par :

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + R(x)$$
$$= \sum_{i=0}^{n} a_i(x - x_0)^i + R_n(x)$$

Les fonctions R_n vérifiant ceci sont notées$O((x - x_0)^n)$. On écrit donc :

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i(x - x_0)^i + O((x - x_0)^n)$$

Il est fréquent d'écrire un développement limité en posant $x = x_0 + h$:

$$f(x_0 + h) = \sum_{i=0}^{n} a_i h^i + O(h^n).$$

Une condition nécessaire et suffisante pour que f admette un développement limité en x_0 est l'existence d'un polynôme P_n tel que $f(x) = P_n(x) + O((x - x_0)^n)$. S'il existe un tel polynôme P_n, alors il en existe une infinité d'autres, mais un seul d'entre eux est de degré inférieur ou égal à n.

Intégration

Si f admet un développement limité n en x_0, $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i(x-x_0)^i + O((x-x_0)^n)$, alors$F(x) = \int f(x)$ admet un développement de degré (n+1) en x_0, qui est

$$F(x) = F(x_0) + \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{i+1}(x-x_0)^{i+1} + O((x-x_0)^{n+1})$$

Dérivation

Il n'existe pas de théorème général sur l'existence d'un développement limité en x_0 pour la dérivée d'une fonction admettant un développent limité $n + 1$ en x_0.

Exemple

En $x_0 = 0, f(x) = x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ ou $f(0)=0$(prolongé par $0 \mapsto 0$) admet un développement limité de degré 2 (il s'agit de $0 + O(x^2)$) mais sa dérivée n'admet pas de développement limité de degré 1.

$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + O(x^2))$

Formule de Taylor-Young

Si la fonction f à valeurs réelles ou complexes ou même dans un espace normé) est dérivable en x_0 jusqu'à l'ordre $n \geq 1$ alors la fonction est $R_n(x)$ négligeable devant $O((x-x_0)^n$:

$$R^n = O((x-x_0)^n$$

La formulation suivante est équivalente :

Avec $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0$

Théorème (Taylor-Young). Supposons que f soit de classe C^n sur I. Alors, pour $x \in I$ on peut écrire :

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f^{(2)}(x_0) + \cdots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + (x-x_0)^n \varepsilon(x-x_0)$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \frac{(x-x_0)^i}{i!} f^{(i)}(x_0) + (x-x_0)^n \varepsilon(x-x_0) =$$

Ou $\varepsilon(x-x_0)$est une fonction qui tend vers 0 quant $x \to x_0$

Autre formulation

Pour tout h ∈ R tel que $x_0 + h$ appartienne à I on peut écrire

$$f(x_0+h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f^{(2)}(x_0) + \cdots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + h^n \varepsilon(h)$$

$$= \sum_{l=0}^{n} \frac{h^i}{i!} f^{(i)}(x_0) + h^n \varepsilon(h)$$

Ou ε(h) est une fonction qui tend vers 0 quand h tend vers 0.

Définition. La somme

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{h^i}{i!} f^{(i)}(x_0)$$

S'appelle le polynôme de Taylor de f `a l'ordre n au point x0. Par convention, 0! = 1! = 1.

Expressions et estimations du reste

En présentant cette formule en 1715, Taylor propose une méthode de développement en série, mais sans se préoccuper du reste *Rn*(*x*). En effet, pendant tout le 18 siècle, les mathématiciens n'établissent pas encore de différence entre développement limité et développement en série entière. C'est Joseph-Louis Lagrange qui, en 1799, soulignera le premier la nécessité de définir rigoureusement ce reste. Les propriétés de celui-ci s'énoncent différemment selon les hypothèses sur la fonction.

Formule de Taylor-Lagrange

Si la fonction f est à valeurs réelles et est dérivable sur *I* jusqu'à l'ordre *n* + 1 alors, pour tout $x \in I \backslash \{x_0\}$, il existe un nombre réel ξ strictement compris entre x_0 et *x* tel que

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

Inégalité de Taylor-Lagrange

S'il existe *M* tel que

$$\forall y \in I \left| f^{(n+1)}(y) \right| \leq M.$$

Alors pour tout $x \in I$:

$$|R_n(x)| \leq \frac{M|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Développement limité de Taylor-Young

Si la fonction f (à valeurs réelles ou complexes ou même dans un espace normé) est dérivable en x_0 jusqu'à l'ordre $n \geq 1$, alors la fonction$R_n(x)$ Est négligeable devant $(x - x_0)^n$:

$$R_n(x) = O((x - x_0)^n)$$

La formule suivante est équivalente :

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0$$

Formule de Taylor-Cauchy

C'est une variante de la formule de Taylor- Lagrange. Si la fonction f est à valeurs réelles et qu'elle est dérivable sur I jusqu'à l'ordre $n + 1$ alors, pour tout $x \in I \backslash \{x_0\}$, il existe un nombre ξ strictement compris entre x_0 et x tel que

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}()}{n!}(x - x_0)(x - \xi)^n$$

Formule de Taylor avec reste intégral de Laplace

Si la fonction est de classe C^{n+1} sur et à valeurs dans un espace de Banach réel, alors, pour tout $x \in I$:

$$R_n(x) = \int_0^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x - t)^n dt.$$

Remarques

- *Formule de Taylor-Maclaurin* : lorsque $x_0 = 0$, la formule s'écrit

$$f(x) = f(0) + (x)f'(0) + \frac{x^2}{2!}f^{(2)}(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + R_n(x)$$

- *Contrairement à la formule de Taylor-Lagrange, les théorèmes de Taylor-Young et de Taylor-Laplace sont vrais pour des fonctions f à valeurs complexes ou dans un espace vectoriel normé.*
- *Pour une fonction à valeurs réelles, l'inégalité de Taylor-Lagrange est un corollaire immédiat de la formule de Taylor-Lagrange. Pour une fonction à valeurs dans un espace vectoriel normé, on ne dispose pas de cette formule mais on peut déduire l'inégalité de Taylor-Lagrange de l'inégalité des accroissements finis pour les fonctions à valeurs vectorielles.*
- La *formule de Taylor-Lagrange* pour $n = 0$ est le théorème des accroissements finis.

- La *formule de Taylor avec reste de Laplace* est une généralisation du second théorème fondamental de l'analyse.
- Pour certaines fonctions *f*, le reste $Rn(x)$ tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini ; ces fonctions peuvent ainsi être développées en série de Taylor dans un voisinage du point a. Si cette propriété se vérifie en tout point du domaine de définition, la fonction est dite *analytique*.

Exemples

Développement limités des fonctions suivantes pour $x_0 = 0$

- $(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{a(a-1)(a-2)\ldots(a-(n-1))}{n!}x^n + o(x^n)$
- $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + o(x^n)$
- $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$
- $\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^n}{n} + o(x^n)$
- $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{(n-1)}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$
- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$
- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$
- $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$
- $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \cdots + \frac{B_{2n}(-4)^n(1-4^n)}{(2n)!}x^{2n-1} + o(x^{2n})$, où les B_n sont les nombres de Bernoulli.
- $\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$
- $\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$
- $\tanh x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)$
- $\arcsin x = x + \frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{1\cdot 3\cdot x^5}{2\cdot 4\cdot 5} + \cdots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)x^{2n+1}}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)\cdot(2n+1)} + o(x^{2n+2})$
- $\arccos x = \frac{\pi}{2} - x - \frac{x^3}{2\cdot 3} - \frac{1\cdot 3\cdot x^5}{2\cdot 4\cdot 5} - \cdots - \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)x^{2n+1}}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)\cdot(2n+1)} + o(x^{2n+2})$
- $\operatorname{arsinh} x = x - \frac{x^3}{2\cdot 3} - \cdots + (-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)x^{2n+1}}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)\cdot(2n+1)} + o(x^{2n+2})$
- $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$
- $\operatorname{artanh} x = x + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$

Approximations affines : développements limités d'ordre 1

On utilise fréquemment des développements limités d'ordre 1 (encore appelés « approximations affines », ou « approximations affines tangentes »), qui permettent de faciliter les calculs, lorsqu'on n'exige pas une trop grande précision ; ils sont donnés, au point x_0, par :

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + O(x - x_0)$$

(on retrouve l'équation de la tangente au graphe de f.

En particulier, on a, au point 0 :

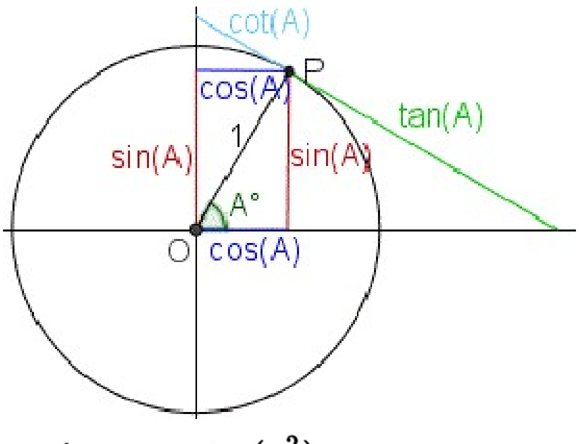
Développements usuels en 0 de fonctions trigonométriques Développements usuels en 0 de fonctions trigonométriques

Développements usuels en 0 de fonctions trigonométriques

- $(1+x)^a = 1 + ax + o(x)$ et donc
  - $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + o(x)$ et
  - $\sqrt{1+x} = 1 + \dfrac{x}{2} + o(x)$;
- $\ln(1+x) = x + o(x)$;
- $e^x = 1 + x + o(x)$.

Développements usuels en 0 de fonctions trigonométriques

À l'ordre 2 :



- $\sin x = x + o(x^2)$, $\arcsin x = x + o(x^2)$,
- $\tan x = x + o(x^2)$, $\arctan x = x + o(x^2)$,

Ces formules étant souvent connues sous le nom d'approximations des petits angles, et

À l'ordre 2 :

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3).$$

Formule de Taylor pour les fonctions de plusieurs variables

-Formule de Taylor-Young dans les espaces vectoriels normés

Soient E et F deux espaces vectoriels normés.
Si une fonction $f: E \to F$ est n fois différentielle en un point $x_0 \in E$ alors admet en ce point un développement limité à l'ordre n, donné par

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + df_{x_0}(h) + \frac{1}{2!} d^2 f_{x_0}(h^2) + \cdots + \frac{1}{n!} d^n f_{x_0}(h^n) + O(\|h\|^n)$$

Ou h^ndésigne n-uplet $(h, h, \dots, h) \in E^n$.

Exemple

Pour une fonction $f: R^P \to R$deux fois différentielle en $x_0 \in R^P$

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \nabla f(x_0).h + \frac{1}{2} H(x_0)h + O(\|h\|^2)$$

Ou ∇fest le gradient de f et $H(x_0)$est sa matrice Hessienne évaluée en x_0.
Ceci se réécrit « en coordonnées » : par exemple pour une fonction $f: R^2 \to R$ deux fois différentielle en $(x_0, x_1) \in R^2$.

$$f(x_0 + h, x_1 + k) = f(x_0, x_1) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, x_1)h + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, x_1)k + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\theta x^2}(x_0, x_1)h^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\theta x^2}(x_0, x_1)k^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, x_1)hk + O(h^2 + k^2)$$

On peut de même développer « en coordonnées » la formule de Taylor-Young globale ci-dessus, pour des fonctions *n* fois différentiables en un point x_0 de R^P et à valeurs dans $\mathbb{R}$ (ou dans n'importe quel espace vectoriel normé). On voit apparaître des coefficients multinomiaux.
On a également une inégalité de Taylor-Lagrange dans les espaces vectoriels normés qui, développée « en coordonnées » dans le cas particulier $E = R^P$ et $F = R$, donne :
Soient O un ouvert de R^P et f une fonction $n + 1$ fois différentiable de O dans $\mathbb{R}$. Alors pour tout $[x_0, x[\subset O$:

$$f(x) = \sum_{|\alpha|=0}^{n} \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^\alpha f(x_0)}{\partial x^\alpha}(x - x_0)^\alpha + \sum_{|\alpha|=n+1} R_\alpha(x)\,(x - x_0)^\alpha$$

Où les sommes portent sur les multi-indices α, et où le reste vérifie l'inégalité.

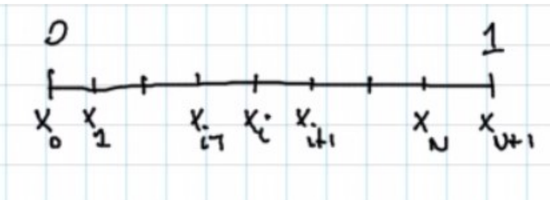
$$|R_{\propto}(x)| \leq \underbrace{sup}_{y\in[x_0,x]} \left|\frac{1}{\propto !}\frac{\partial^{\alpha} f(y)}{\theta x^{\alpha}}\right|$$

Pour tous les α tels que |α| = n + 1 (si f est de classeC^{n+1}, le majorant ci-dessus est fini).

Méthode de différences finies

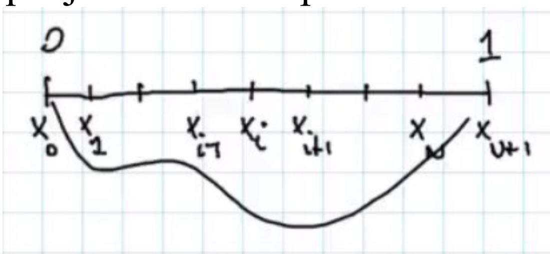
Présentation de la méthode de différences finies qui permet d'approchés la solution du problème de la corde élastique.

On va modéliser la corde en sous intervalle en coupant en N>0 points l'intervalle [0,1](voir le schéma), avec N destiné à être grand et on note $h = \frac{1}{N+1}$ le pas d'espace qui est destiné à être petit quand est N est grand $N \to \infty, h \to 0$ au milieu on a un pointx_i à sa gauche x_{i-1} qui correspond $x_i - h$et à sa droite x_{i+1} qui correspond $x_i + h$, $x_0$coïncide avec 0 et x_{N+1}coïncide avec 1

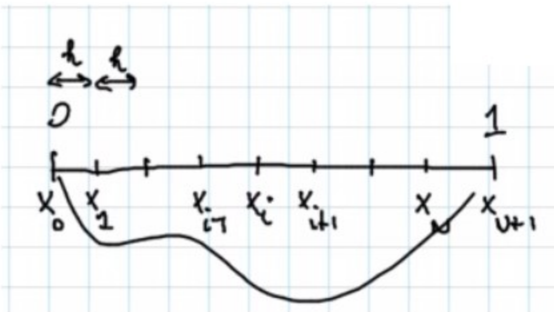


$x_i = ih \quad i = 0,1,\dots,N,N+1$

Le but de la méthode numérique c'est de proposer un schéma qui permet de calculer des valeurs qu'on note f_i qui sont des approximations de$f(x_i)$aux point x_i que je ne connais pas donc



$f(x)$ est la déformation de la corde élastique et que on ne connais pas $f_i$je vais l'approché aux points x_i par f_i pour tous i=1,2,…,N, tous les points sont tous équidistant h étant la distance entre deux points consécutifs



Pour écrire un schéma numérique, on écrit l'équation différentielle $f^{''}(x_i) = g(x_i)\ pour\ i = 1,2,3,\dots,N$ Ensuite j'utilise une formule de différence finie centré pour approché la dérivé $f^{''}(x_i)$

$$-\frac{f(x_{i-1})-2f(x_i)+f(x_{i+1})}{h^2}=g(x_i)+O(h^2)$$

Je vais remplacer $f(x_{i-1})$que je ne connais pas par f_i que je vais calculer par l'ordinateur, j'obtiens le schéma suivant :

$-\frac{f_{i-1}-2f_i+f_{i+1}}{h^2}=g(x_i)$en oublions $O(h^2)$ pour tous les points de i=1,2,3,…,N

Si je prends i=1 la formule est $-\frac{f_0-2f_1+f_2}{h^2}=g(x_1)$ la déformation aux points zéro donne $f_0=0$ de même à droite la déformation $f_{N+1}=0$donc voila le schéma numérique :

$$\begin{cases} -\dfrac{f_{i-1}-2f_i+f_{i+1}}{h^2}=g(x_i) \quad i=1,2,\dots,N \\ f_0=0 \\ f_{N+1}=0 \end{cases}$$

Qui me permet de calculer $f_i$des approximations de $f(x_i)$

Ce schéma correspond à la résolution d'un système linéaire

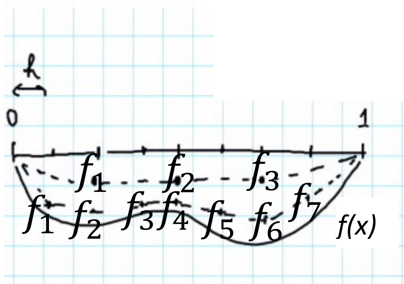
$$\frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & & \dots & \\ -1 & 2 & -1 & \dots & \\ . & -1 & 2 & -1 & \dots \\ & & . & & \\ & & . & & \\ & & . & & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & \dots & \dots & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ . \\ . \\ . \\ f_N \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} g(x_1) \\ g(x_2) \\ g(x_3) \\ . \\ . \\ . \\ g(x_N) \end{pmatrix}$$

$$A \quad . \quad \overrightarrow{f} \quad = \quad \vec{g}$$

A est symétrique défini positif je peux utiliser la décomposition de Cholesky $A=LL^T$pour résoudre le système $A\,.\overrightarrow{f}=\vec{g}$ pour trouve le vecteur

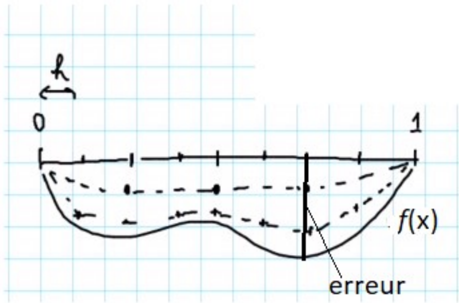
$$(f_1,f_2,f_3,\dots,f_N)$$

Je vais approximé par trois points une déformation pour approcher$f(x_i)$, ensuite par sept points



La question qui se pose est ce que la quantité

$$\left(f_i \overset{converge\ vers}{\rightarrow} f(x_i)\ \ lorsque\ \ h \overset{tend\ vers}{\rightarrow} 0\right)$$



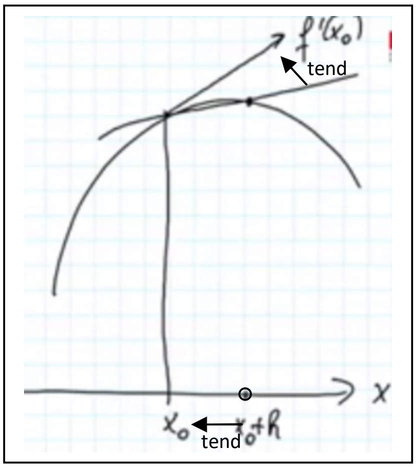
L'erreur est divisée par $2^2=4$ si h est divisé par 2. Cette méthode converge en $O(h^2)$

Théorème : soit $f \in C^4\ dans\ l'interval[0,1], !\exists a > 0\ \forall\ 0 < h < 1$
L'erreur au point x_i c'est $\max_{1\leq i\leq N}|f_i - f(x_i)| \leq ah^2$.

Dérivation numérique d’ordre 1

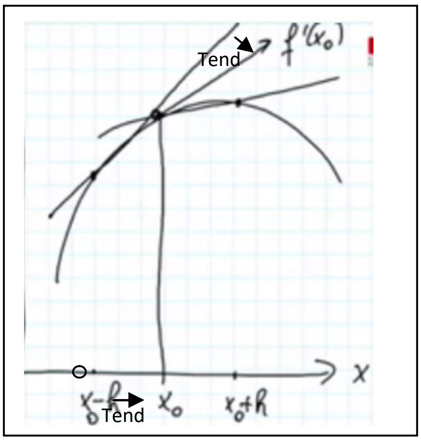
Dérivé progressive

Soit $f: R \mapsto R$ de type C^1et soit $x_0 \in R$la dérivé du 1[er] ordre est défini par :



$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(h)}{h}$$

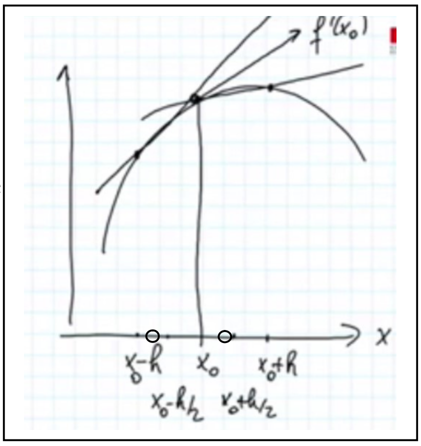
Sur le dessin correspondant, si on tend *h → 0*
La droite $x_0 + h$ va tendre vers la droite de la
Pente $f'(x_0)$.



Dérivé régressive

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h}$$

Lorsque *h → 0*, la droite du point $x_0 - h$ tend
Vers La droite de pente $f'(x_0)$.



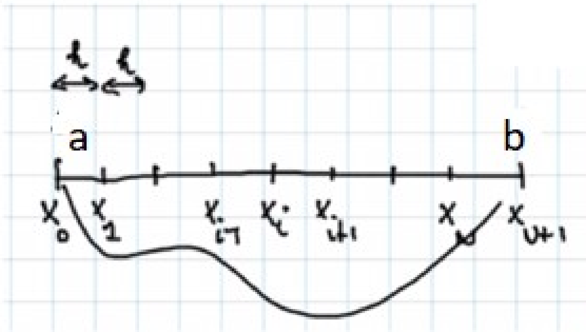
Dérivé centrale

Enfin on prend les deux points d’abscisses
$x_0 - h$ et $x_0 + h$ la dérivé centrale est donnée
Par l’équation suivante :

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) - f(x_0 - \frac{h}{2})}{h}$$

Lorsque *h → 0*, les droites de points $x_0 - h$ et $x_0 + h$ tendent
Vers La droite de pente $f'(x_0)$.

Maintenant j'approche la dérivée $f'(x_0)$. par une petite valeur fixé $h > 0$ et je m'intéresse à l'erreur suivante, pour cela on utilise les méthodes de différences finies pour modéliser la corde en sous intervalle en coupant en N>0 points l'intervalle [a,b](voir le schéma), avec N destiné à être grand et on note $h = \frac{1}{N+1}$ le pas d'espace qui est destiné à être petit quand est N est grand $N \to \infty, h \to 0$ au milieu on a un pointx_i à sa gauche x_{i-1} qui correspond $x_i - h$et à sa droite x_{i+1} qui correspond $x_i + h$, $x_0$coïncide avec a et x_{N+1}coïncide avec b.



On suppose connue la valeur de la fonction en x_{i-1}, $x_i$et x_{i+1}; on pose $f(x_{i-1}) = y_{i-1},\ f(x_i) = y_i$ et $f(x_{i+1}) = y_{i+1}$. Alors les formules standards en deux points sont :

Formule de différence progressive

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_i + h) - f(h)}{h} = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}$$

L'erreur suivante :

$$\left| f'(x_0) - \frac{f(x_i + h) - f(h)}{h} \right| = |f'(x_0) - \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}| = O(h)$$

Ce grand $\boldsymbol{O(h)}$ est une formule de différence finie **progressive** d'ordre 1.

Formule de différence régressive

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_i) - f(x_i - h)}{h} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}$$

L'erreur suivante :

$$\left|f'(x_0) - \frac{f(x_i) - f(x_i - h)}{h}\right| = |f'(x_0) - \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}| = O(h)$$

Ce grand $\boldsymbol{O(h)}$ est une formule de différence finie **rétrograde ou régressive** d'ordre 1.

Formule de différence centrale

$$f'(x_0) \approx \frac{f\left(x_i + \frac{h}{2}\right) - f\left(x_i - \frac{h}{2}\right)}{h}$$

$$f'(x) \approx \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{x_{i+1} - x_{i-1}} = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}}$$

L'erreur suivante :

$$\left|f'(x_0) - \frac{f\left(x_i + \frac{h}{2}\right) - f\left(x_i - \frac{h}{2}\right)}{h}\right| = O(h^2)$$

$$|f'(x_0) - \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{x_{i+1} - x_{i-1}}| = O(h^2)$$

$\boldsymbol{O(h^2)}$ Appelé formule de différence finie **centré** d'ordre 2.

Exemple :

Pour illustrer les trois formules, considérons les données suivantes : ′
$(x_0, y_0) = (1, 2)$; $(x_1, y_1) = (2, 4)$; $(x_2, y_2) = (3, 8)$; $(x_3, y_3) = (4, 16)$ et $(x_4, y_4) = (5, 32)$.
Nous voulons estimer la valeur de $f'(2)$en utilisant la fonction$f(x) = 2^x$.

Solution

1) Formule de différence progressive

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_i+h)-f(h)}{h} = \frac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{x_{i+1}-x_i} = \frac{y_{i+1}-y_i}{x_{i+1}-x_i} = \frac{16-8}{4-3} = 8$$

1) **Formule de différence régressive**

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_i)-f(x_i-h)}{h} = \frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}} = \frac{y_i-y_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}\frac{8-4}{3-2} = 4$$

2) **Formule de différence centrale**

$$f'(x) \approx \frac{f(x_{i+1})-f(x_{i-1})}{x_{i+1}-x_{i-1}} = \frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{x_{i+1}-x_{i-1}} = \frac{16-4}{4-2} = 6$$

La dérivée de la fonction $f(x) = 2^x$ est $f'(x) = 2^x \ln(2)$
On remplace la coordonnée $x_2 = 3$ et on obtient :

$$f'(3) = 2^3 \ln(2) = 5.544.$$

Formule de différence progressive

L'erreur suivante :

$$\left| f'(x_0) - \frac{f(x_i+h)-f(h)}{h} \right| = O(h)?$$

Démontrer que cette différence est d'ordre $O(h)$
Soit $f: R \mapsto R$ de type C^2et soit$x_0 \in R$, d'après l'approximation affine(le développement limité de Taylor d'ordre 1)

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2} f''(\xi)$$

Ou

$$f(x_0+h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(\xi) avec\ x_0 \leq \xi \leq x_0+h$$

On ramène le terme $f(x_0)$ de l'autre côté de l'équation

$$f(x_0+h) - f(x_0) = +hf'(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(\xi) \qquad avec\ x_0 \leq \xi \leq x_0+h$$

On divise l'équation par h

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0) + \frac{h^2}{2h} f''(\xi) \qquad avec\ x_0 \leq \xi \leq x_0+h$$

On ramène de l'autre égalité, l'équation devient

$$-f'(x_0) + \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = +\frac{h}{2} f''(\xi) \quad avec\ x_0 \leq \xi \leq x_0 + h$$

On prend la valeur absolue de l'équation

$$|f'(x_0) - \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}| = \frac{h}{2} f''(\xi) \quad avec\ x_0 \leq \xi \leq x_0 + h$$

Théorème on prétend que l'affirmation suivante est vraie
$\forall f \in c^2\ \forall x_0 \in R, \exists c > 0\ \forall\ 0 < h < 1$ On a

$$\left|f'(x_0) - \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right| \leq C.h$$

Remarque : d'après l'énoncé du théorème c dépend de f et x_0 mais pas de h.

Interprétation numérique On choisit f, x_0 on observe l'erreur suivante en faisant varié h.

Donc je prétends que l'erreur est divisé par 2 chaque fois que h est divisé par 2,

Ou alors l'erreur est divisé par 10 lorsque h est divisé par 10.

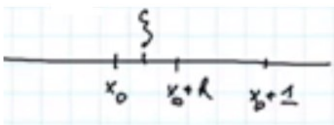
Démonstration

On ne peut choisir $c = \frac{1}{2}\left|f''(\xi)\right|$ car ξ dépend de h

Car $x_0 \leq \xi \leq x_0 + h$, mais on majore la dérivé second

En un point ξ par quelque chose qui ne dépend pas de h (voir le schéma)

On prend l'hypothèse que $0 < h < 1$ et donc ajoute à l'inéquation sui devient
$x_0 < h + x_0 < 1 + x_0$



Je vais majorer la dérivée seconde en point ξ en

Par le maximum des dérivées Seconds sur l'intervalle $[x_0, x_0 + 1]$

Donc $\left|f'(x_0) - \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right| \leq \frac{h}{2} \max_{x_0 \leq x \leq x_0+1}\left|f''(x)\right|$

Alors $c = \frac{1}{2} \max_{x_0 \leq x \leq x_0+1}\left|f''(x)\right|$ qui dépend de f et x_0 et ne dépend pas de h.

*On vérifie numériquement cette prédiction

$$\left|f'(x_0) - \frac{f(x_i + h) - f(h)}{h}\right| = O(h)?$$

En utilisant la fonction $f(x) = sinx$, $x_0 = 1$ et avec un program Matlab

```
function  err=dfprog(x0,h)
%formule de différences finies
diff=(f(x0+h)-f(x0))/h;
err=abs(diff-df(x0));
fprintf('x0= %e h= %e erreur= %e \n', x0,h,err)

%la fonction f
function funct=f(x)
funct=sin(x);

% la dérivée de f
function dfunct=df(x)
   dfunct=cos(x);
```

Exécution

```
>> dfprog(-1,10^-1)
x0= -1.000000e+00 h= 1.000000e-01 erreur= 4.113845e-02
>> dfprog(-1,10^-2)
x0= -1.000000e+00 h= 1.000000e-02 erreur= 4.198315e-03
>> dfprog(-1,10^-3)
x0= -1.000000e+00 h= 1.000000e-03 erreur= 4.206454e-04
>> dfprog(-1,10^-4)
x0= -1.000000e+00 h= 1.000000e-04 erreur= 4.207265e-05
>> dfprog(-1,10^-5)
x0= -1.000000e+00 h= 1.000000e-05 erreur= 4.207340e-06
>> dfprog(-1,10^-6)
x0= -1.000000e+00 h= 1.000000e-06 erreur= 4.208022e-07
>> dfprog(-1,10^-7)
x0= -1.000000e+00 h= 1.000000e-07 erreur= 4.143904e-08
>> dfprog(-1,10^-8)
x0= -1.000000e+00 h= 1.000000e-08 erreur= 8.132345e-09
>> dfprog(-1,10^-9)
x0= -1.000000e+00 h= 1.000000e-09 erreur= 5.848104e-08
>> dfprog(-1,10^-11)
x0= -1.000000e+00 h= 1.000000e-11 erreur= 1.168704e-06
```

Interprétation des résultats

On voit d'après le résultat du programme lorsqu'on divise h par $10^{-1}, 10^{-2}, \ldots, 10^{-7}$.l'erreur démunie, c'est l'effet de troncature de Taylor.
Par contre à partir de $10^{-9}, \ldots, 10^{-11}, \ldots$ l'erreur augmente, ici c'est les erreurs d'arrondi

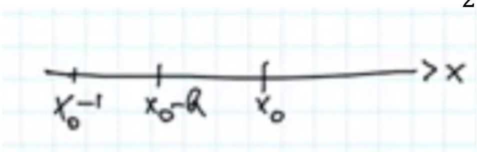
Remarque
Pour h<10-7 on a l'effet de troncature de Taylor.

Formule de différence rétrograde

L'erreur suivante :

$$\left|f'(x_0) - \frac{f(x_i) - f(x_i - h)}{h}\right| = |f'(x_0) - \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}| = O(h)$$

Même démonstration que précédemment seulement $c = \frac{1}{2}\max_{x_0-1\le x\le x_0}\left|f''(x)\right|$



Formule de différence centrée

L'erreur suivante :

$$\left|f'(x_0) - \frac{f\left(x_i + \frac{h}{2}\right) - f\left(x_i - \frac{h}{2}\right)}{h}\right| = O(h^2)$$

Démonstration

Soit $f: R \mapsto R$ de type C^2et soit$x_0 \in R$,
Le développement de Taylor s'écrit cette fois –ci :

$$f\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) = f(x_0) + \frac{h}{2}f'(x_0) + \frac{h^2}{4.2}f''(x_0) + \frac{h^3}{8.6}f'''(\xi) avec\ x_0 \le \xi \le x_0 + \frac{h}{2}$$

Même chose pour

$$f\left(x_0 - \frac{h}{2}\right) = f(x_0) - \frac{h}{2}f'(x_0) + \frac{h^2}{4.2}f''(x_0) - \frac{h^3}{8.6}f'''(\eta) avec\ x_0 - \frac{h}{2} \le \eta \le x_0$$

On fait la différence entre les deux équations

$$f\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) - f\left(x_0 - \frac{h}{2}\right) = hf'(x_0) + \frac{h^3}{8.6}(f'''(\xi) + f'''(\eta))$$

Théorème

$$\forall f \in c^3\ \forall x_0 \in R, \exists c > 0\ \forall\ 0 < h < 1 \left| f'(x_0) - \frac{f(x_i + h_1) - f(x_i - h_2)}{h} \right| \le c.h^3$$

Remarque : d'après l'énoncé du théorème c dépend de f et x_0 mais pas de h.

Interprétation numérique On choisit f, x_0 on observe l'erreur suivante en faisant varié h.

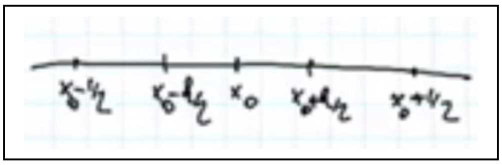
Donc je prétends que l'erreur est divisé par 2^2=4 chaque fois que h est divisé par 2,

Ou alors l'erreur est divisé par 10^2=100 lorsque h est divisé par 10.

Démonstration

On ne peut pas choisir $c = |\frac{1}{8.6}\left(f'''(\xi) + f'''(\eta)\right)|$ car ξ et η dépendent de h par contre on peut majorer ces dérivée par

Je vais majorer ces dérivées troisièmes aux points ξ , η par le maximum des dérivées troisièmes sur l'intervalle $\left[x_0 - \frac{1}{2}, x_0 + \frac{1}{2}\right]$(voir le schéma)



J'obtiens $c = \frac{1}{24} \max_{x_0 - \frac{1}{2} \le x \le x_0 + \frac{1}{2}} |f'''(x)|$qui ne dépend pas de h.

On vérifie numériquement cette prédiction

$$\left| f'(x_0) - \frac{f\left(x_i + \frac{h}{2}\right) - f\left(x_i - \frac{h}{2}\right)}{h} \right| = O(h^2)$$

```
function err=dfcentre(x0,h)
%formule de différences finies
diff=(f(x0+h/2)-f(x0-h/2))/h;
err=abs(diff-df(x0));
fprintf('x0= %e h= %e erreur= %e \n', x0,h,err)

%la fonction f
function funct=f(x)
funct=sin(x);
```

```
% la dérivée de f
function dfunct=df(x)
   dfunct=cos(x);
>> dfcentre(-1,10^-1)
x0= -1.000000e+00 h= 1.000000e-01 erreur= 2.250978e-04
>> dfcentre(-1,10^-2)
x0= -1.000000e+00 h= 1.000000e-02 erreur= 2.251257e-06
>> dfcentre(-1,10^-3)
x0= -1.000000e+00 h= 1.000000e-03 erreur= 2.251259e-08
>> dfcentre(-1,10^-4)
x0= -1.000000e+00 h= 1.000000e-04 erreur= 2.243037e-10
>> dfcentre(-1,10^-5)
x0= -1.000000e+00 h= 1.000000e-05 erreur= 5.512479e-12
>> dfcentre(-1,10^-6)
x0= -1.000000e+00 h= 1.000000e-06 erreur= 2.771694e-11
>> dfcentre(-1,10^-7)
x0= -1.000000e+00 h= 1.000000e-07 erreur= 3.607838e-10
>> dfcentre(-1,10^-8)
x0= -1.000000e+00 h= 1.000000e-08 erreur= 1.407212e-08
>> dfcentre(-1,10^-9)
x0= -1.000000e+00 h= 1.000000e-09 erreur= 5.254127e-08
>> dfcentre(-1,10^-10)
x0= -1.000000e+00 h= 1.000000e-10 erreur= 1.051742e-06
>> dfcentre(-1,10^-11)
x0= -1.000000e+00 h= 1.000000e-11 erreur= 1.168704e-06
```

Interprétation des résultats

La formule de différence finie centré est plus précise que la différence finie progressive ou rétrograde parc qu'elle est en h^2 au lieu d'être en h

Pour 10^{-1},10^{-2},…10^{-4}, l'erreur est divisé par 100 , mais à partir de 10^{-5},…,10^{-7}, l'erreur augmente.

Explication :

On observe ici l'erreur de troncature qui domine pour les valeurs 10^{-1},10^{-2},…10^{-4} car h modérément petit, et l'erreur d'arrondi lorsque est très petit (si $h<10^{-5}$ on observe l'effet d'arrondis)

On explique l'origine d'arrondi

En règle général dérivé un signal bruité augmente le bruit, intégré le signal bruité diminue le bruit, pour expliqué ce phénomène prenant une fonction

$f(x) = 0 + \varepsilon.\sin(k\pi x)\ ou\ k \gg (trégrand) et \ll (\ un\ bruit\ trés\ petit)$

Ici l'amplitude du bruit c'est ε sur la fonction.

Calculons le dérivé de f (x) , $f'(x) = \varepsilon.k\pi.\cos(k\pi x)$, donc le bruit sur a dérivé est $\varepsilon.k\pi$ avec k>> alors le bruit augmente.

$$g(x) = \int f(x)dx) = \int (0 + \ \varepsilon.\sin(k\pi x) = -\frac{\varepsilon}{k\pi}\cos\,(k\pi)$$

Cette fois le bruit ε est divisé par $k\pi$, avec k>>, donc le bruit diminue

En général lorsqu' on résout une équation différentielle $g'(t) = f(t)$, on intègre $g(t) = g(0) + \int_0^t f(s)ds$, donc l'intégration diminue le bruit, le sens contraire lorsqu'on dérive.

Formalisons le problème :

En langage c

`double c` donc $c = \frac{1}{3}$ et son approximation sur un ordinateur à 16 chiffres significatifs $\bar{c} = \underbrace{0.333\ldots3}_{16\ chiffres\ significatifs}$,l'erreur $|c - \bar{c}| = \frac{1}{3}10^{-1}\ . = |c|^{-N}$ avec un ordinateur à N chiffre significatifs.

- -L'erreur d'arrondi lorsque j'utilise une formule différence finie par exemple $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ pour approcher $f'(x_0)$,
- L'erreur d'arrondi pour évaluer $f(x_0)$ c'est $|f(x_0)|10^{-N}$ pour un ordinateur à N chiffres significatifs,
- Maintenant si je veux évaluer $f(x_0 + h)$c'est $|f(x_0 + h)|10^{-N} \approx |f(x_0)|10^{-N}$donc l'erreur d'arrondi pour évaluer $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ c'st $2.\frac{|f(x_0)|}{2}10^{-N}$
- Alors l'effet d'erreur d'arrondi si $h \gg 2.\frac{|f(x_0)|}{2}10^{-N}$ on n'observe pas les effets d'erreurs d'arrondis.
- Par contre si h et de cette ordre $2.\frac{|f(x_0)|}{2}10^{-N}$on observe les erreurs d'arrondis.

La formule de différence centrale en 3 points

La formule de différence centrale peut aussi être trouvée à partir du polynôme d'interpolation de Lagrange en 3 points. On peut interpoler les données par un polynôme au lieu d'utiliser la droite, nous obtenons alors les formules de différence qui utilisent plus de deux points. On suppose que le pas *h* est constant.

Formule de différence progressive utilisant trois points :

$$f'(x_i) \approx \frac{-f(x_{i+2}) + 4f(x_{i+1}) - 3f(x_i)}{x_{i+2} - x_i}$$

Formule de différence régressive utilisant trois points :

$$f'(x_i) \approx \frac{3f(x_i) - 4f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{x_i - x_{i-2}}$$

Exemple : Formules de différence en trois points :
Pour illustrer la formule de différence progressive et la formule de différence régressive en trois points, considérons les données suivantes : $(x_{i-2}, y_{i-2}) = (1, 2)$; $(x_{i-1}, y_{i-1}) = (2, 4)$; $(x_i, y_i) = (3, 8)$; $(x_{i+1}, y_{i+1}) = (4, 16)$ et $(x_{i+2}, y_{i+2}) = (5, 32)$.

Solution

$f'(x_i) \approx \frac{-32+4.16-3.8}{5-3} = \frac{8}{2} = 4$ ……………….Progressive

$f'(x_i) \approx \frac{3.8-4.4+2}{3-1} = \frac{10}{2} = 5$ ………………….Rétrograde

Formule générale en trois points

La formule d'approximation en 3 points de la dérivée première, basée sur le polynôme d'interpolation de Lagrange, n'utilise pas des points équidistants.
Etant donne trois points $(x1, y1)$, $(x2, y2)$ et $(x3, y3)$ avec $x1 < x2 < x3$, la formule suivante permet d'approcher la dérivée en un point $x \in [x1, x3]$.
Les dérivées aux points x_i sont les suivantes :

$$f'(x_1) = \frac{2x_1 - x_2 - x_3}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}y_1 + \frac{x_1 - x_3}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}y_2 + \frac{x_1 - x_2}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}y_3$$

$$f'(x_2) = \frac{x_2 - x_3}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}y_1 + \frac{2x_2 - x_1 - x_3}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}y_2 + \frac{x_2 - x_1}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}y_3$$

$$f'(x_3) = \frac{x_3 - x_2}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}y_1 + \frac{x_3 - x_1}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}y_2 + \frac{2x_3 - x_2 - x_1}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}y_3$$

Le polynôme de Lagrange est donnée par

$$P_2(x) = L_0(x)y_0 + L_1(x)y_1 + L_2(x)y_2$$

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} \frac{(x - x_2)}{(x_0 - x_2)}$$
$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} \frac{(x - x_2)}{(x_1 - x_2)}$$
$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)}{(x_2 - x_0)} \frac{(x - x_1)}{(x_2 - x_1)}$$

L’approximation de la dérivée première est donnée par $f'(x) \approx P'(x)$, qui peut s’écrire

$$P_2'(x) = L_0'(x)y_0 + L_1'(x)y_1 + L_2'(x)y_2$$

$$L_0'(x) = \frac{2x - x_1 - x_2}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}$$
$$L_1^{'}(x) = \frac{2x - x_0 - x_2}{\big((x_1 - x_0)(x_1 - x_2)\big)}$$
$$L_2^{'}(x) = \frac{2x - x_0 - x_1}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$
$$P_2'(x) = \frac{2x - x_1 - x_2}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} y_0 + \frac{2x - x_0 - x_2}{\big((x_1 - x_0)(x_1 - x_2)\big)} y_1 + \frac{2x - x_0 - x_1}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} y_2$$

Dérivée second

Soit $f: R \mapsto R$ C^2 $x_0 \epsilon R$ qui deux fois continument dérivable et on veut approcher la dérivée seconde $f''(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f'\left(x_0+\frac{h}{2}\right)-f'(x_0-\frac{h}{2})}{h}$, maintenant on approche $f'\left(x_0+\frac{h}{2}\right)$ par la formule différence finie centré

$$f'\left(x_0+\frac{h}{2}\right) \approx \frac{f\left(x_0+\frac{h}{2}+\frac{h}{2}\right)-f(x_0+\frac{h}{2}-\frac{h}{2})}{h}$$

$$f'\left(x_0-\frac{h}{2}\right) \approx \frac{f\left(x_0-\frac{h}{2}+\frac{h}{2}\right)-f(x_0-\frac{h}{2}-\frac{h}{2})}{h}$$

On va approcher $f''(x_0)$par $f''(x_0) \approx \frac{f(x_0+h)-2f(x_0)+f(x_0-h)}{h^2}$

L'erreur est $\left|f''(x_0) - \frac{f(x_0+h)-2f(x_0)+f(x_0-h)}{h^2}\right| = O(h^2)$

Théorème on prétend que l'affirmation suivante est vraie

$\forall f \in c^4$ $\forall x_0 \in R, \exists c > 0$ $\forall$ $0 < h \leq 1$ On a

$\left|f''(x_0) - \frac{f(x_0+h)-2f(x_0)+f(x_0-h)}{h^2}\right| \leq c.h^2$

Interprétation numérique On choisit *f*, $x_0$on observe l'erreur suivante en faisant varié h.

Donc je prétends que l'erreur est divisé par 4 chaque fois que h est divisé par 2,

Remarque : les erreurs d'arrondi sont d'ordre $O(\frac{1}{h^2})$

Démonstration

Soit $f: R \mapsto R$ de type C^2et soit$x_0 \in R$,

Le développement de Taylor s'écrit cette fois –ci :

$$f\left(x_0+\frac{h}{2}\right) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{4}f''(x_0) + \frac{h^3}{6}f^{(3)}(x_0) + \frac{h^4}{24}f^{(4)}(\xi) avec\ x_0 \leq \xi \leq x_0 + \frac{h}{2}$$

Même chose pour

$$f\left(x_0-\frac{h}{2}\right) = f(x_0) - hf'(x_0) + \frac{h^2}{4}f''(x_0) - \frac{h^3}{6}f^{(3)}(x_0) + \frac{h^4}{24}f^{(4)}(\eta) avec\ x_0 - \frac{h}{2} \leq \eta \leq x_0$$

Et on fait la somme des équations et on obtient

$$f\left(x_0+\frac{h}{2}\right)+f\left(x_0-\frac{h}{2}\right)=2f'(x_0)+\frac{h^2}{2}f''(x_0)+\frac{h^4}{24}(f^{(4)}(\xi)+f^{(4)}(\eta))$$

$$c=\frac{1}{24}\max_{x_0-\frac{1}{2}\leq x\leq x_0+\frac{1}{2}}|f^{(4)}(x)|$$

Méthodes numériques d'intégration.

Intégration numérique – Formules de quadrature

Généralités : approcher numériquement $\int_a^b f(x)dx$

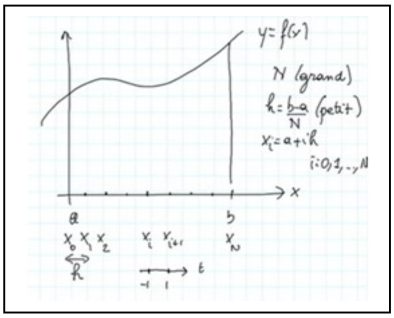
Formules de quadrature

Poids d'intégration

Points d'intégration

Formule de rectangle, du trapèze, de Simpson

Formules de gauss – Legende



Soit $f:[a,b] \to R$ continue, on se donne Le graphe de la fonction *y=f(x)*, sur L'intervalle $[a,b]$divise en N points $(x_0, x_1, x_2, \dots, x_N)$ Équidistant de tel sorte Que $x_{i+1} - x_i = h$ avec $h = \frac{(b-a)}{N}$(petit), N grand Et $x_i = a + ih,\ i = 0,1 \dots N$, on veut approcher Numériquement la surface qui se trouve entre l'intervalle [a,b] et la courbe de la fonction *y=f(x)*.

Donc l'intégrale $\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx$, maintenant on veut faire un changement de vecteur -1,1 et la variable sera t, on met$x = x_i + h\frac{t+1}{2}$, on calcul *dx* à partir de l'équation précédente

- $dx = \frac{d(x_i + h\frac{t+1}{2})}{dt} dx = \frac{h}{2} dt$,
- $x = x_i = x_i + h\frac{t+1}{2} \Rightarrow 0 = h\frac{t+1}{2} \Rightarrow t + 1 = 0 \Rightarrow t = -1$, et
- $x = x_{i+1} = x_i + h\frac{t+1}{2} \Rightarrow x_{i+1} - x_i = h\frac{t+1}{2} = h \Rightarrow \frac{t+1}{2} = 1 \Rightarrow t + 1 = 2 \Rightarrow t = 1$

Donc lorsque $\boldsymbol{x = x_i, t = -1}$, $\boldsymbol{x = x_{i+1}, t = 1}$

Avec le changement de variable l'intégrale devient

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{-1}^{1} f(x_i + h\frac{t+1}{2})\frac{h}{2}dt$$

Puisque $\frac{h}{2}$ est constant l'intégrale devient

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{h}{2} \int_{-1}^{1} f(x_i + h\frac{t+1}{2})\, dt$$

Problème : on se donne la fonction $g: [-1,1] \to R$ continue et je cherche à approcher numériquement $\int_{-1}^{1} g(t)dt$. les choix des points d'intégration et les poids d'intégration sont dictés par le théorème suivant :

Théorème

Soient M un entier positif, des points d'intégration notée $t_1, t_2, \ldots, t_M$et des poids $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_M$et on une formule de quadrature appelée *J(g)* avec $J(g) = \sum_{j=1}^{M} \lambda_j g(t_j)$cette formule de quadrature est là pour approcher numériquement $\int_{-1}^{1} g(t)dt$.

De même pour $\int_{-1}^{1} f(x_i + h\frac{t+1}{2})\, dt \approx \sum_{j=1}^{M} \lambda_j f(x_i + h\frac{t+1}{2})$

Alors peut approcher $\int_a^b f(x)dx$ par

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{h}{2} \int_{-1}^{1} f(x_i + h\frac{t+1}{2})\, dt$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{N-1} \frac{h}{2} \int_{-1}^{1} f(x_i + h\frac{t+1}{2})\, dt = \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=1}^{M} \lambda_j f(x_i + h\frac{t+1}{2})$$

Donc la formule $L_p(f) = \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=1}^{M} \lambda_j f(x_i + h\frac{t+1}{2})$ approxime numériquement $\int_a^b f(x)dx$.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=1}^{M} \lambda_j f(x_i + h\frac{t+1}{2})$$

Hypothèse :

1) La formule de quadrature *J(g)* est exacte pour les polynômes de degré n, n un entier positif.

   Je calcul l'intégrale $\int_{-1}^{1} p(t)dt$. et je suppose l'égalité entre l'intégrale et la formule de quadrature $J(p)$donc on a :

$$\int_{-1}^{1} p(t)dt. = J(p) = \sum_{j=1}^{M} \lambda_j p(t_j) \quad \forall p \in P_n$$

2)$f \in C^{n+1}\,[a,b]$

Conclusion :

$\forall f \in C^{r+1}\,[a,b] \exists c > 0\ \forall\ 0 < h < b-a \quad \left|\int_a^b f(x)dx - L_r(f)\right| \le ch^{n+1}$ (On note $O(h^{n+1})$)

Interprétation du théorème :

On choisit$f \in C^{n+1}\,[a,b]$, on calcul pour différent valeurs de h l'erreur et on observe l'erreur est divisé par 2^{n+1}chaque fois que h est divisé par 2.

Conclusion

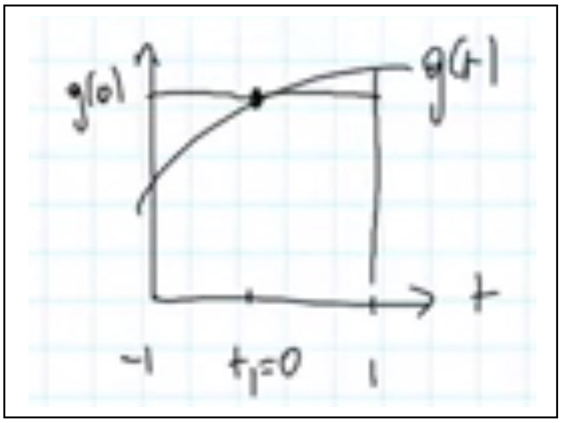
On a intérêt à choisir t_j et λ_j de sorte que r soit le plus grand possible.

Suite : les deux questions qui se posent

- $t_1, t_2, \dots, t_M$ données, comment calculer les poids $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_M$?
- Existe –t-il un choix judicieux des points $t_1, t_2, \dots, t_M$?

Appliquons le théorème aux cas de la formule du rectangle et du trapèze

Formule du rectangle



Approcher numériquement l'intégrale $\int_{-1}^{1} g(t)dt$. Dans le cas du rectangle on choisie le milieu de l'intervalle [-1,1] le point d'intégrale $t_1 = 0$ et d'évalue $g(0)$ (voir le graphe) donc l'approximation est Le rectangle de hauteur $g(0)$et de largeur 2, donc $J(g) = 2g(0)$, par conséquent

$J(g) = \sum_{j=1}^{M} \lambda_j g(t_j)$,

$$\int_{-1}^{1} g(t)dt. = J(g) = \sum_{j=1}^{2} \lambda_j g(t_j) \quad \forall g \in P_n,$$

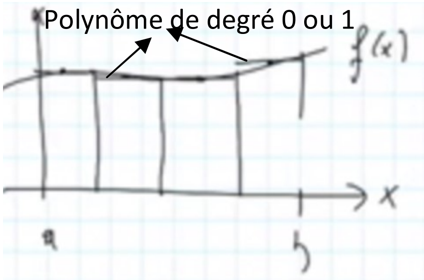
$$t = 0, J(g) = 2g(0) = \sum_{j=1}^{M} \lambda_j g(0)$$

$$J(f) = \int_{-1}^{1} f\left(x_i + h\frac{t+1}{2}\right)dt \approx \sum_{j=1}^{2} \lambda_j f\left(x_i + h\frac{t+1}{2}\right)$$

$= 2f\left(x_i + h\frac{0+1}{2}\right) = 2f\left(x_i + \frac{h}{2}\right)$ Donc pour *t=0* on a

$L_p(f) = \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=1}^{2}\lambda_j f\left(x_i + h\frac{t+1}{2}\right)$ Qui devient

$L_p(f) = \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{N-1} 2f\left(x_i + \frac{h}{2}\right) = h\sum_{i=0}^{N-1} f\left(x_i + \frac{h}{2}\right)$



$$L_p(f) = h\sum_{i=0}^{N-1} f\left(x_i + \frac{h}{2}\right)$$

Donc la surface de l'aire de $\int_a^b f(x)dx$

Par la méthode numérique du rectangle est : $\int_a^b f(x)dx \approx h\sum_{i=0}^{N-1} f\left(x_i + \frac{h}{2}\right)$

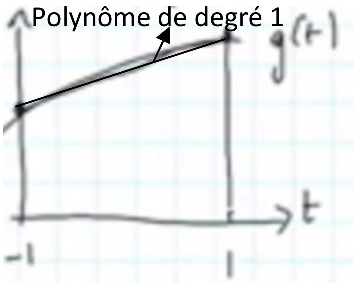
D'après le théorème précédemment si $f \in C^2[a,b]$

$\int_{-1}^{1} p(t)dt. = J(p) = \sum_{j=1}^{2}\lambda_j p(t_j) \quad \forall p \in P_0 ou P_1$ L'erreur est :

$$err = |\int_a^b f(x)dx - h\sum_{i=0}^{N-1} f\left(x_i + \frac{h}{2}\right)| = o(h^2)$$

Formule du trapèze

Même chose pour la formule du trapèze, soit le graphe suivant, l'air marqué par le trapèze sur la figure est $J(g) = g(-1) + g(1)$



$$J(f) = \int_{-1}^{1} f\left(x_i + h\frac{t+1}{2}\right)dt \approx \sum_{j=1}^{2}\lambda_j f\left(x_i + \right.$$

$$J(f) = f\left(x_i + h\frac{-1+1}{2}\right) + f\left(x_i + h\frac{1+1}{2}\right) = f(x_i) + f(x_i + h)$$

$L_p(f) = \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=1}^{2}\lambda_j f\left(x_i + h\frac{t+1}{2}\right)$ Qui devient

$L_p(f) = \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{N-1}(f(x_i) + f(x_{i+1}))$

D'après le théorème précédemment si $f \in C^2[a,b]$

$\int_{-1}^{1} p(t)dt. = J(p) = \sum_{j=1}^{2}\lambda_j p(t_j) \quad \forall p \in P_1$ L'erreur est :

$$err = |\int_a^b f(x)dx - \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{N-1}(f(x_i) + f(x_{i+1}))| = o(h^2)$$

Poids d'une formule de quadrature

- Soit $J(g) = \sum_{j=1}^{M} \lambda_j g(t_j)$ une formule de quadrature pour approcher numériquement$\int_{-1}^{1} g(t)dt$.
- Les données sont $t_1, t_2, \dots, t_M$ points d'intégrations et on veut calculer $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_M$?
- Idée : soit $p \in P_{M-1}$. D'après le théorème de Lagrange on a la combinaison linéaire $p_M(t) = p(t_1)L_1 + p(t_2)L_2 + \cdots + p(t_M)L_M$ avec $L_1, L_2, \dots, L_M$sont la base de Lagrange de P_{M-1} des polynômes de degré inferieur ou égal *M-1* associée aux points d'intégrations $t_1, t_2, \dots, t_M$.

$$L_{i(t)} = \frac{(t-t_1)(t-t_2)\dots(t-t_{i-1})(t-t_{i+1})\dots(t-t_M)}{(t_i-t_1)(t_i-t_2)\dots(t_i-t_{i-1})(t_i-t_{i+1})\dots(t_i-t_M)}$$

- Si on utilise la combinaison $p_M(t)$ en intégrant à gauche et à droite sur l'intervalle [-1,1] on obtient donc :

$\int_{-1}^{1} p(t)dt = \sum_{j=1}^{M} p_M(t_j) \int_{-1}^{1} L_j(t)dt$. Si $\lambda_j = \int_{-1}^{1} L_j(t)dt$ alors j'ai construis une formule de quadrature $\int_{-1}^{1} p(t)dt = J(p) \forall P_{M-1}$de degré *M-1*.

Maintenant ayant la formule de quadrature on peut énoncer le théorème suivant :

Théorème :

On se donne une formule de quadrature et les données du problème suivantes : M entier positif, $t_1, t_2, \dots, t_M$points d'intégration, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_M$ les poids d'intégration et on se donne une formule de quadrature $J(g) = \sum_{j=1}^{M} \lambda_j g(t_j)$ pour approcher numériquement $\int_{-1}^{1} g(t)dt$. alors je prétends la chose suivante la formule de quadratique est exacte pour les polynômes de degré inferieur ou égal *M-1*, $\left(\int_{-1}^{1} p(t)dt = J(p) \forall P_{M-1}\right) \Leftrightarrow (\lambda_j = \int_{-1}^{1} L_j(t)dt \,, j = 1 \dots M)$ou les $L_1, L_2, \dots, L_M$sont les fonctions de la base de Lagrange associées aux points $t_1, t_2, \dots, t_M$. Donc on a une formule pour les poids.

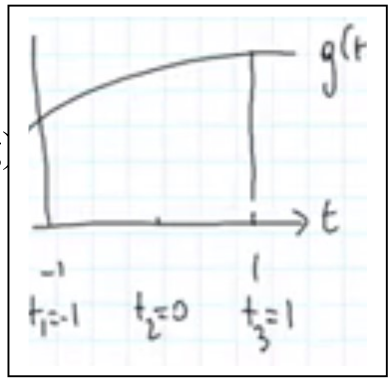
Interprétation

On se donne les points d'intégration$t_1, t_2, \dots, t_M$, on calcul les poids $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_M$ avec la formule $\lambda_j = \int_{-1}^{1} L_j(t)dt \,, j = 1 \dots M$ et on a une formule correspondante $L_h(f)$ et on calcul l'erreur

$$err = \left| \int_a^b f(x)dx - L_h(f) \right| = O(h^M) \; f \in C^M[a,b]$$

Avec f dérivable M fois sur l'intervalle [a,b]. Donc par conséquent l'erreur est ; $\frac{err}{2^M}$ chaque fois que $\frac{h}{2}$. avec cette formue on va construire la formule de Simpson est on se pose est ce qu'il existe un choix judicieux de points d'intégration $t_1, t_2, \dots, t_M$.

Formule de Simpson



La formule de Simpson est une formule à trois points

On cherche à approcher l'intégrale $\int_{-1}^{1} g(t)dt$.

On a les trois points d'intégration sur le graphe (voir fig)

Donc la formule de quadrature

$J(g) = \sum_{j=1}^{3} \lambda_j g(t_j) = \lambda_1 g(t_1) + \lambda_2 g(t_2) + \lambda_3 g(t_3)$

Avec les trois points devient

$J(g) = \lambda_1 g(-1) + \lambda_2 g(0) + \lambda_3 g(1)$ et

$\lambda_j = \int_{-1}^{1} L_j(t)dt \,, j = 1,2,3$, donc on a

$\lambda_1 = \int_{-1}^{1} L_1(t)dt$ Avec $L_1(t) = \frac{(t-t_2)(t-t_3)}{(t_1-t_2)(t_1-t_3)} = \frac{t(t-1)}{2}$

$\lambda_2 = \int_{-1}^{1} L_2(t)dt$ Avec $L_2(t) = \frac{(t-t_1)(t-t_3)}{(t_2-t_1)(t_2-t_3)} = -(t+1)(t-1) = 1 - t^2$

$\lambda_3 = \int_{-1}^{1} L_3(t)dt$ Avec $L_3(t) = \frac{(t-t_1)(t-t_2)}{(t_3-t_1)(t_3-t_2)} = \frac{t(t+1)}{2}$

Alors

$$\lambda_1 = \int_{-1}^{1} \frac{t(t-1)}{2} dt = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} (t^2 - t)dt = \frac{1}{2} \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} \right]_{-1}^{1} = \frac{1}{3}$$

$$\lambda_2 = \int_{-1}^{1} (1 - t^2)dt = \left[t - \frac{t^3}{3} \right]_{-1}^{1} = \frac{4}{3}$$

$$\lambda_3 = \int_{-1}^{1} \frac{t(t+1)}{2} dt = \frac{1}{2} \int_{-1}^{2} (t^2 + t)dt = \frac{1}{2} \left[\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} \right]_{-1}^{1} = \frac{1}{3}$$

$$J(g) = \frac{1}{3} g(t_1) + \frac{4}{3} g(t_2) + \frac{1}{3} g(t_3)$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{N-1} \frac{h}{2}\int_{-1}^{1} f(x_i + h\frac{t+1}{2})\,dt = \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=1}^{M} \lambda_j f(x_i + h\frac{t+1}{2})$$

Donc la formule $L_h(f) = \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=1}^{M}\lambda_j f(x_i + h\frac{t+1}{2})$

Donc pour t=-1,0,1 $L_h(f)$ devient $L_h(f) = \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{N-1}(\lambda_1 f(x_i) + \lambda_2 f\left(x_i + \frac{h}{2}\right) + \lambda_j f(x_i + h))$en remplaçons $\lambda_1 = \lambda_3 = \frac{1}{3}, \lambda_2 = \frac{4}{3}$, la formule devient $L_h(f) = \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{N-1}(\frac{1}{3}f(x_i) + \frac{4}{3}f\left(x_i + \frac{h}{2}\right) + \frac{1}{3}f(x_i + h))$ on fait sortir $\frac{1}{3}$ hors de la somme et mettre $x_{i+1} = x_i + h$

$$L_h(f) = \frac{h}{6}\sum_{i=0}^{N-1}(f(x_i) + 4f\left(x_i + \frac{h}{2}\right) + f(x_{i+1}))$$

Soit $f \in C^4[a,b]$L'erreur est d'ordre 4 :

$err = \left|\int_a^b f(x)dx - L_h(f)\right| = O(h^4)$ C'est à dire que *err*/4 chaque fois que *h*/2.

Maintenant on va parler des points d'intégrations qui vont nous ramener à la formule de Gauss.

- Soit la formule de quadrature $J(g) = \sum_{j=1}^{M}\lambda_j g(t_j)$ pour approcher numériquement l'intégrale $\int_{-1}^{1} g(t)dt$.
- Les poids $\lambda_j = \int_{-1}^{1} L_j(t)dt\,, j = 1 \dots M$ étant les fonctions de la base de Lagrange.
- $\int_{-1}^{1} p(t)dt = J(p) \forall p \in P_{M-1}$.
- Existe-il un choix judicieux(ou particulier) pour les points d'intégrations $t_1, t_2, \dots, t_M$?
- La réponse est oui ce sont les formules de gauss, donc dans le cas M=2, je vais choisir comme point d'intégration dans la formule du trapèze$t_1 = -1, t_2 = 1$, ici je vais choisir $t_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}, t_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ je calcul les poids $\lambda_1 = \int_{-1}^{1} L_1(t)dt \;\; et \; \lambda_2 = \int_{-1}^{1} L_2(t)dt$ et j'obtiens
-

$$L_1(t) = \frac{(t - t_2)}{(t_1 - t_2)} = -\frac{\sqrt{3}}{2}(t - \frac{1}{\sqrt{3}})$$

$$\lambda_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2}\int_{-1}^{1}\left(t-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)dt = -\frac{\sqrt{3}}{2}\left[\frac{t^2}{2}-\frac{t}{\sqrt{3}}\right]_{-1}^{1} = 1$$

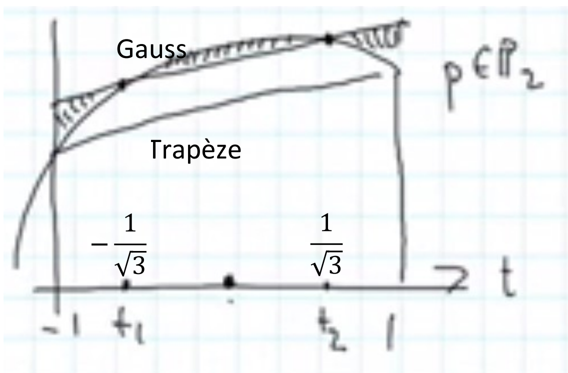
$$L_2(t) = \frac{(t-t_1)}{(t_2-t_1)} = \frac{\sqrt{3}}{2}(t+\frac{1}{\sqrt{3}})$$

$$\lambda_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}\int_{-1}^{1}\left(t+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)dt = \frac{3}{2}\left[\frac{t^2}{2}+\frac{t}{\sqrt{3}}\right]_{-1}^{1} = 1$$

$$J(g) = \lambda_1 . g\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \lambda_2 . g\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = g\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + g\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

- Elle exacte pour les polynômes de degré 1.$\int_{-1}^{1} p(t)dt = J(p) \forall p \in P_1$.

Il se trouve qu'il ya mieux que ça (voir figure) on dessine le graphe de polynôme de degré 2 dans l'intervalle [-1,1] et si on prend la formule et on trace la droite qui coupe le graphe en deux points d'abscisses -1, 1 et ça ne marche pour un polynôme de degré 2 car l'erreur est très grande, mais par contre pour la formule de gauss on a les deux points d'abscisse $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ et $\frac{1}{\sqrt{3}}$ et si on trace la droite qui passe par ces deux points on remarque que l'erreur à l'intérieur de la courbe est compensé par l'erreur à l'extérieur de la courbe(voir figure) et ans ce cas là le polynôme $\int_{-1}^{1} p(t)dt = J(p) \forall p \in P_2$ est vrai.



Et il se trouve qu'il est vrai pour le polynôme de degré 3, $\int_{-1}^{1} p(t)dt = J(p) \forall p \in P_3$, mais pas pour le polynôme de degré 4 ou plus.

Donc lorsqu'on regarde $err = \left|\int_a^b f(x)dx - L_h(f)\right| = O(h^4),\ f \in C^4[a,b]$

Avec $L_h(f) = \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{N}(f(x_i + h\frac{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}{2}) + f(x_i + h\frac{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}{2}))$

De manière générale M quelconque $t_1, t_2, \dots, t_M$les zéro du polynôme de gauss- Legendre L_M la formule de quadrature est exacte pour 2M-1, $\int_{-1}^{1} p(t)dt = J(p) \forall p \in P_{2M-1}$ et donc l'erreur que je fais $err = \left|\int_a^b f(x)dx - L_h(f)\right| = O(h^{2M}),\ f \in C^{2M}[a,b]$

Programme Matlab pour le calcul d'erreur

- Soit la fonction $f(x) = x\sin(2k\pi x)$ définie sur l'intervalle *[a,b]=[0,1]*
- $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b x\sin(20\pi x)dx = \frac{1}{20*\pi}$ avec *k=10.*
- On veut calculer l'erreur entre l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ et la formule $L_h(f)$ ($err = \left|\int_a^b f(x)dx - L_h(f)\right| = O(h^{2M})$), pour les formules suivantes :
- Trapèze à deux points (M=2) $t_1 = -1, t_2 = 1$.
- Gauss à deux points (M=2), $t_1 = \frac{-1}{\sqrt{3}}, t_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$
- Gauss à trois points (M=3), $t_1 = -\sqrt{\frac{3}{5}}, t_2 = 0, t_3 = \sqrt{\frac{3}{5}}$

Script integration.m

```
function [err_trap2pts, err_gauss2pts, err_gauss3pts]=integration(N)
%Etant donné un entier N, on intègre numériquement la fonction
%définie ci-après sur l'intervalle [a,b] dont les bornes sont définies ci-dessous
%Paramètres
%N : nombre d'intervalles pour la discrétisation de [a,b]
%Sortie
%Bornes de l'intervalle
   a=0.;b=1.;
%fonction f à intégrer

%Valeur exacte de l'intégrale se f sur [a,b]=[0,1]
   exact=-1./(20*pi);
%Pas d'espace
   h=(b-a)/N;



%-------------------------------------
%   formules de quadratures
```

```
%-------------------------------------

% Formule du trapèze
   Trapeze2pts=0.;
   for i=0:N-1
      xi=a*i+h;
      trapeze2pts=trapeze2pts+h/2*(f(xi)+f(xi+h));
   end
   err_trap2pts=abs(exact-trapeze2pts);

%Formule de gauss à deux points
   gauss2pts=0.;
   a1=(1-1./sqrt(3))/2.;
   b1=(1+1./sqrt(3))/2.;
   for i=0:N-1
      xi=a*i+h;
      gauss2pts=gauss2pts+h/2*(f(xi+a1*h)+f(xi+b1*h));
   end
   err_gauss2pts=abs(exact-gauss2pts);

%Formule de gauss à trois points
   gauss3pts=0.;
   a2=(1-sqrt(3./5))/2.;
   b2=(1+sqrt(3./5))/2.;
   for i=0:N-1
      xi=a*i+h;
      gauss3pts=gauss3pts+h/2*(5/9*f(xi+a2*h)+8/9*f(xi+h/2)
                   +5/9*f(xi+b2*h));
   end
   err_gauss3pts=abs(exact-gauss3pts);

%la fonction f
   function funct=f(x)
   k=10;
   funct=x*sin(2*k*pi*x);
   end %fin de la fonction funct

end % fin de la fonction intégration
```

Exécution

```
>> [err1,err2,err3]=integration(10)
err1 =0.0159
err2 =0.0121
err3 =0.0019

>> [err1,err2,err3]=integration(20)
err1 =0.0159
err2 =5.1073e-04
err3 =1.1053e-05

>> [err1,err2,err3]=integration(30)
err1 =0.0063
err2 =8.2055e-05
err3 =7.7911e-07

>> [err1,err2,err3]=integration(40)
err1 =0.0034
err2 =2.4309e-05
err3 =1.2926e-07

>> [err1,err2,err3]=integration(50)
err1 =0.0022
err2 =9.6677e-06
err3 =3.2833e-08

>> [err1,err2,err3]=integration(80)
err1 =8.2666e-04
err2 =1.4297e-06
err3 =1.8925e-09
```

On Remarque plus en augmente le nombre N qui permet à h de converger vers le zéro cela diminue en même temps l'erreur

Chapitre 3

Résolution des systèmes linéaires

On se donne un entier N positif assez grand de 10 à 10^9 et soit $A(a_{ij}), 1 \leq i, j \leq N$ une matrice carré de dimension N x N régulière (inversible, A^{-1} existe, dét A±0,…) et un vecteur $\vec{B}(b_j), 1 \leq j \leq N$ et on cherche un vecteur $\vec{X}(x_i), 1 \leq i \leq N$ tel que $A.\vec{X} = \vec{B}$, pour cela on va utiliser trois méthodes directes :

- Elimination de Gauss,
- Décomposition d'une matrice $A=LU$,
- Décomposition de Cholesky $A=LL^T$, si A est symétrie défini positif.

Définition

Un système est **échelonné** si :

1. Le nombre de coefficients nuls commençant une ligne croît strictement ligne après ligne
   Il est échelonné réduit si en plus :
2. Le premier coefficient non nul d'une ligne vaut 1
3. Et c'est le seul élément non nul de sa colonne.

Exemple :

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 5 \\ 0 - x_2 - 2x_3 - 0 = 4 \\ 3x_4 = 1 \end{cases} \quad \text{Est échelonné (non réduit)}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 5 \\ 0 + 0 - 2x_3 + 0 = 4 \\ x_3 + x_4 = 1 \end{cases} \quad \text{N'est pas échelonné}$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 5 \\ 0 + x_2 - x_3 + 0 = 4 \\ x_4 = 1 \end{cases} \quad \text{Échelonné et réduit}$$

Ce système se résout en

$$\begin{cases} x_1 = -6 - 5x_3 \\ x_2 = 4 + x_3 \\ x_4 = 1 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions :

$s = \{(-6 - 5x_3, 4 \ + x_3, x_3, 1) |\ x_3 \in R\}$

Rappel sur la résolution d'un système triangulaire supérieur

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots\dots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots\dots & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ 0 & 0 & a_{3,3} & \dots\dots & a_{3,n-1} & a_{3,n} \\ & & & . & & \\ & & & . & & \\ & & & . & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots\dots & a_{n-1,n-} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots\dots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ . \\ . \\ . \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ . \\ . \\ . \\ b_{n-1} \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$* \ x_n = \frac{b_n}{a_{n,n}}$$

$$* \ x_{n-1} = \frac{b_{n-1} - \sum_{j=n}^{n} a_{n-1,j} x_j}{a_{n-1,n-1}}$$

$$* \ x_{n-2} = \frac{b_{n-2} - \sum_{j=n-1}^{n} a_{n-2,j} x_j}{a_{n-2,n-2}}$$

$$* \ x_{n-3} = \frac{b_{n-3} - \sum_{j=n-2}^{n} a_{n-3,j} x_j}{a_{n-3,n-3}}$$

$$* \ x_{n-4} = \frac{b_{n-4} - \sum_{j=n-3}^{n} a_{n-4,j} x_j}{a_{n-4,n-4}}$$

.

.

$$* \ x_2 = \frac{b_2 - \sum_{j=3}^{n} a_{2,j} x_j}{a_{2,2}}$$

$$* \ x_1 = \frac{b_1 - \sum_{j=2}^{n} a_{1,j} x_j}{a_{1,1}}$$

Méthode du pivot de Gauss

La méthode du pivot de Gauss est une méthode pour transformer un système en un autre système équivalent (ayant les mêmes solutions) qui est triangulaire et est donc facile à résoudre. Les opérations autorisées pour transformer ce système sont :

- échange de deux lignes.
- multiplication d'une ligne par un nombre non nul.
- addition d'un multiple d'une ligne à une autre ligne.

Soit le système suivant :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1}\ a_{1,2}\ a_{1,3} \dots \dots a_{1,n-1}\ a_{1,n} \\ a_{2,1}\ a_{2,2}\ a_{2,3} \dots \dots a_{2,n-1}\ a_{2,n} \\ a_{3,1}\ a_{3,2}\ a_{3,3} \dots \dots a_{3,n-1}\ a_{3,n} \\ . \\ . \\ . \\ a_{n-1,1}\ a_{n-1,2}\ a_{n-1,3} \dots \dots a_{n-1,n-1}\ a_{n-1,n} \\ a_{n,1}\ a_{n,2}\ a_{n,3} \dots \dots a_{n,n-1}\ a_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ . \\ . \\ . \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ . \\ . \\ . \\ b_{n-1} \\ b_n \end{pmatrix}$$

Et on veut arriver à ce système

$$\begin{pmatrix} 1\ a_{1,2}\ a_{1,3} \dots \dots a_{1,n-1}\ a_{1,n} \\ 0\ \ 1\ \ a_{2,3} \dots \dots a_{2,n-1}\ a_{2,n} \\ 0\ \ 0\ \ 1 \dots \dots a_{3,n-1}\ a_{3,n} \\ . \\ . \\ . \\ 0\ \ 0\ \ 0 \dots \dots\ 1\ a_{n-1,n} \\ 0\ \ 0\ \ 0\ \dots \dots\ 0\ \ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ . \\ . \\ . \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ . \\ . \\ . \\ d_{n-1} \\ d_n \end{pmatrix}$$

L'algorithme de Gauss-Jordan est le suivant :

L'algorithme du pivot de Gauss se déroule de la façon suivante :
Soit $A(a_{ij}), 1 \leq i, j \leq N$
— On choisit un *pivot* non nul dans la première colonne, disons sur la ligne i ;

— On échange la première et la i$^{\text{ème}}$ ligne ;
— On effectue les opérations suivantes sur les lignes
$i \leq l \leq n : S = a_{j,l}; a_{jl} = a_{il}; a_{il} = S$
— On passe à la colonne suivante ;
À la colonne i+1, on effectue les opérations suivantes :
— On effectue les opérations suivantes sur les lignes
$i+1 < k \leq n : a_{kj} \leftarrow a_{kj} - \frac{a_{ij}}{a_{ii}} a_{ki}; i+1 < j \leq n$

Ces opérations ont pour effet de transformer le système en un système triangulaire. Une fois arrivé à un système triangulaire de la forme :

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots\dots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ 0 & 1 & a_{2,3} & \dots\dots & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ 0 & 0 & 1 & \dots\dots & a_{3,n-1} & a_{3,n} \\ & & & . & & \\ & & & . & & \\ & & & . & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots\dots & 1 & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots\dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ . \\ . \\ . \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ . \\ . \\ . \\ d_{n-1} \\ d_n \end{pmatrix}$$

Exemple

Soit le système d'équation suivant

$$\begin{aligned} x_2 - x_3 + x_4 &= 3 \\ 3x_3 + 5x_4 &= 1 \\ -2x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 4x_4 &= 2 \\ -2x_1 + 6x_2 - 8x_3 + 7x_4 &= 9 \end{aligned}$$

Le système matriciel équivalent

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ -2 & 4 & 7 & 4 \\ -2 & 6 & -8 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}$$

On appliquant l'algorithme de gauss on obtient le nouveau système

$$A^{Gauss} = \begin{pmatrix} 1.0000 & -2.0000 & -3.5000 & -2.0000 \\ 0 & 1.0000 & -1.0000 & 1.0000 \\ 0 & 0 & 1.0000 & 1.6667 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.0000 \\ 3.0000 \\ 0.3333 \\ 0.2353 \end{pmatrix}$$

Programme matlab

```
function B=gauss_Pivot(A)
[n,p]=size(A);
for i=1:(n-1)
    if A(i,i)==0
     A=changer_ligne(i,A);
 end
    A(i,:)=A(i,:)/A(i,i); %changement des lignes
   for k=i+1 :n
            for j=i+1:p
         A(k,j)=A(k,j)-(A(i,j)*A(k,i))/A(i,i);
      end % end loop of j
      A(k,i)=0;
   end% end loop k
end %end loop i
A(k,:)=A(k,:)/A(k,k); %divide end of line Matrix
B=A;
end %end of function

function CC=changer_ligne(i,C) ;%fonction qui assure le changement des lignes ;
   [n,p]=size(C);
   j=i;Bool=true;
   while(j<=n) & Bool
      if (C(j,i)~=0)
         Bool=false
      else
      j=j+1;
      end
   end% end while
    if (Bool==false)
       for l= 1:p
          s=C(j,l); C(j,l)=C(i,l);C(i,l)=s;
       end
    else
       fprintf('%s pas de solution ');
    end
```

```
    CC=C;
end
```

Décomposition d'une matrice *A=LU*

Soit $A(a_{ij}), 1 \leq i,j \leq N$ une matrice carré de dimension *N* x *N* régulière (inversible, A^{-1} existe, dét A±0,…) et un vecteur $\vec{B}(b_j), 1 \leq j \leq N$ et on cherche un vecteur $\vec{X}(x_i), 1 \leq i \leq N$ tel que$A.\vec{X} = \vec{B}$, et on veut décomposer A en deux matrices L.U, la première est matrice triangulaire inferieur et U une matrice triangulaire supérieur

$$\begin{pmatrix} a_{1,1}\ a_{1,2}\ a_{1,3} \dots \dots a_{1,n-1}\ a_{1,n} \\ a_{2,1}\ a_{2,2}\ a_{2,3} \dots \dots a_{2,n-1}\ a_{2,n} \\ a_{3,1}\ a_{3,2}\ a_{3,3} \dots \dots a_{3,n-1}\ a_{3,n} \\ . \\ . \\ . \\ a_{n-1,1} \quad \dots \quad a_{n-1,n} \\ a_{n,1}\ a_{n,2}\ a_{n,3} \dots \dots a_{n,n-1}\ a_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11}\ 0 \quad \dots. \quad 0 \\ l_{21}\ l_{22}\ 0 \quad \dots \quad 0 \\ l_{31}\ l_{32}\ l_{33} \quad \dots \quad 0 \\ . \\ . \\ . \\ l_{n-1,1}\ l_{n-1,2} \dots\ l_{n-1,n-1} 0 \\ l_{n,1}\ l_{n,2}\ l_{n,3} \dots l_{n,n-1} \dots l_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1\ u_{12} \quad \dots \quad u_{1n} \\ 0\ 1\ u_{23} \quad \dots \quad u_{2n} \\ 0\ 0\ 1\ u_{34} \quad \dots \quad u_{3n} \\ . \\ . \\ . \\ 0\ 0\ 0 \quad \dots \quad 1\ u_{n-1,n} \\ 0\ 0\ 0 \quad \dots \quad 1 \end{pmatrix}$$

Donc pour résoudre le système

$$\begin{pmatrix} a_{1,1}\ a_{1,2}\ a_{1,3} \dots \dots a_{1,n-1}\ a_{1,n} \\ a_{2,1}\ a_{2,2}\ a_{2,3} \dots \dots a_{2,n-1}\ a_{2,n} \\ a_{3,1}\ a_{3,2}\ a_{3,3} \dots \dots a_{3,n-1}\ a_{3,n} \\ . \\ . \\ . \\ a_{n-1,1}\ a_{n-1,2}\ a_{n-1,3} \dots \dots a_{n-1,n-1}\ a_{n-1,n} \\ a_{n,1}\ a_{n,2}\ a_{n,3} \dots \dots a_{n,n-1}\ a_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ . \\ . \\ . \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ . \\ . \\ . \\ b_{n-1} \\ b_n \end{pmatrix}$$

On est amené à résoudre le système

$$\begin{pmatrix} l_{11} & 0 & \dots & & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \dots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \dots & 0 \\ & & \cdot & & \\ & & \cdot & & \\ & & \cdot & & \\ l_{n-1,1} & l_{n-1,2} & \dots & l_{n-1,n-1} & 0 \\ l_{n,1} & l_{n,2} & l_{n,3} \dots & l_{n,n-1} \dots & l_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & \dots & & u_{1n} \\ 0 & 1 & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & u_{34} \dots & u_{3n} \\ & & \cdot & & \\ & & \cdot & & \\ & & \cdot & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots 1 & u_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_{n-1} \\ b_n \end{pmatrix}$$

Pour cela on va faire la résolution en deux parties

1er partie résoudre *L.Y=B*

$$\begin{pmatrix} l_{11} & 0 & \dots & & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \dots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \dots & 0 \\ & & \cdot & & \\ & & \cdot & & \\ & & \cdot & & \\ l_{n-1,1} & l_{n-1,2} & \dots & l_{n-1,n-1} & 0 \\ l_{n,1} & l_{n,2} & l_{n,3} \dots & l_{n,n-1} \dots & l_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_{n-1} \\ b_n \end{pmatrix}$$

2^{ième} partie *U.X=Y*

$$\begin{pmatrix} 1 & u_{12} & \dots & & u_{1n} \\ 0 & 1 & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & u_{34} \dots & u_{3n} \\ & & \cdot & & \\ & & \cdot & & \\ & & \cdot & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots 1 & u_{n-1,} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix}$$

Maintenant la question qui se pose comment on va calculer *L* et *U*, simplement on identifie les coefficients de *L* et *U* en comparent avec les coefficients de A après avoir établie le produit de *L*U* dans le bon ordre

La 1er étape

On va identifie de la première colonne *A* et *LU*

$$\begin{pmatrix} a_{1,1}\ a_{1,2}\ a_{1,3} \dots \dots a_{1,n-1}\ a_{1,n} \\ a_{2,1}\ a_{2,2}\ a_{2,3} \dots \dots a_{2,n-1}\ a_{2,n} \\ a_{3,1}\ a_{3,2}\ a_{3,3} \dots \dots a_{3,n-1}\ a_{3,n} \\ . \\ . \\ . \\ a_{n-1,1} \quad \dots \quad a_{n-1,n} \\ a_{n,1}\ a_{n,2}\ a_{n,3} \dots \dots a_{n,n-1}\ a_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11}\ 0 \quad \dots . \quad 0 \\ l_{21}\ l_{22}\ 0 \quad \dots \quad 0 \\ l_{31}\ l_{32}\ l_{33} \quad \dots \quad 0 \\ . \\ . \\ . \\ l_{n-1,1}\ l_{n-1,2} \ \dots \ l_{n-1,n-1} 0 \\ l_{n,1}\ l_{n,2}\ l_{n,3} \dots l_{n,n-1} \dots l_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1\ u_{12} \quad \dots \quad u_{1n} \\ 0\ 1\ u_{23} \quad \dots \quad u_{2n} \\ 0\ 0\ 1\ u_{34} \quad \dots \quad u_{3n} \\ . \\ . \\ . \\ 0\ 0\ 0 \quad \dots \quad 1\ u_{n-1,n} \\ 0\ 0\ 0 \quad \dots \quad 1 \end{pmatrix}$$

On multiplie la 1er colonne de U avec tous les lignes de L et on les identifiants avec la 1er colonne de A

$$a_{11} = l_{11}, a_{21} = l_{21}, a_{31} = l_{31} \dots . a_{n-11} = l_{n-11}, a_{n1} = l_{n1}$$

2ième étape :

On va identifie la 1er ligne de A avec la 1er ligne de *U*, in faisant le produit de tous les colonnes de *L* seulement avec la 1er ligne de *U*.

$$a_{12} = l_{11}u_{12} \Rightarrow u_{12} = \frac{a_{12}}{l_{11}} = \frac{a_{12}}{a_{11}}, a_{13} = l_{11}u_{13} \Rightarrow u_{13} = \frac{a_{13}}{l_{11}} = \frac{a_{13}}{a_{11}},$$

$$a_{14} = l_{11}u_{14} \Rightarrow u_{14} = \frac{a_{14}}{l_{11}} = \frac{a_{14}}{a_{11}} \dots a_{1n} = l_{11}u_{1n} \Rightarrow u_{1n} = \frac{a_{1n}}{l_{11}} = \frac{a_{1n}}{a_{11}},$$

3ième étape

Deuxième colonne de A et le produit de tous les lignes de *U* avec la 2ième colonne de *L*.

$$a_{22} = l_{21}u_{12} + l_{22} \Rightarrow a_{22} = a_{21}\frac{a_{12}}{a_{11}} + l_{22} \Rightarrow l_{22} = \frac{a_{22}a_{11} - a_{21}a_{12}}{a_{11}}$$

$$l_{31}u_{12} + l_{32} = a_{32} \Rightarrow a_{32} = l_{32} - a_{31}\frac{a_{12}}{a_{11}} \Rightarrow l_{32} = \frac{a_{32}a_{11} - a_{31}a_{12}}{a_{11}}$$

……………………..

$$l_{n-11}u_{12} + l_{n-2,2} = a_{n-1,2} \Rightarrow a_{n-2,2} = l_{n-2,2} - a_{n-1,1}\frac{a_{12}}{a_{11}} \Rightarrow$$

$$l_{n-2,2} = \frac{a_{n-1,2}a_{11} - a_{n-11}a_{12}}{a_{11}}$$

$$l_{n1}u_{12} + l_{n2} = a_{n2} \Rightarrow a_{n2} = l_{n2} - a_{n1}\frac{a_{12}}{a_{11}} \Rightarrow l_{n2} = \frac{a_{n2}a_{11} - a_{n1}a_{12}}{a_{11}}$$

4$^{\text{ième}}$ étape :

On va identifie la 2$^{\text{ième}}$ ligne de A avec la 2$^{\text{ième}}$ ligne de U, in faisant le produit de tous les colonnes de L seulement avec la 2$^{\text{ième}}$ ligne de U.

$$u_{13}l_{21} + u_{23}l_{22} = a_{23} \Rightarrow \frac{a_{13}}{a_{11}}a_{21} + u_{23}\left(\frac{a_{22}a_{11} - a_{21}a_{12}}{a_{11}}\right) = a_{23} \Rightarrow$$

$$a_{13}a_{21} + u_{23}(a_{22}a_{11} - a_{21}a_{12}) = a_{11}a_{23} \Rightarrow u_{23} = \frac{a_{23}a_{11} - a_{21}a_{13}}{a_{22}a_{11} - a_{21}a_{12}}$$

$$u_{14}l_{21} + u_{24}l_{22} = a_{24} \Rightarrow \frac{a_{14}}{a_{11}}a_{21} + u_{24}\left(\frac{a_{22}a_{11} - a_{21}a_{12}}{a_{11}}\right) = a_{24} \Rightarrow$$

$$a_{14}a_{21} + u_{24}(a_{22}a_{11} - a_{21}a_{12}) = a_{11}a_{24} \Rightarrow u_{24} = \frac{a_{24}a_{11} - a_{21}a_{14}}{a_{22}a_{11} - a_{21}a_{12}}$$

……………………..

$$u_{1n}l_{21} + u_{2n}l_{22} = a_{2n} \Rightarrow \frac{a_{1n}}{a_{11}}a_{21} + u_{2n}\left(\frac{a_{22}a_{11} - a_{21}a_{12}}{a_{11}}\right) = a_{2n} \Rightarrow$$

$$a_{1n}a_{21} + u_{2n}(a_{22}a_{11} - a_{21}a_{12}) = a_{11}a_{2n} \Rightarrow u_{2n} = \frac{a_{2n}a_{11} - a_{21}a_{1n}}{a_{22}a_{11} - a_{21}a_{12}}$$

$$u_{14}l_{21} + u_{24}l_{22} = a_{24} \Rightarrow \frac{a_{14}}{a_{11}}a_{21} + u_{24}\left(\frac{a_{22}a_{11} - a_{21}a_{12}}{a_{11}}\right) = a_{24} \Rightarrow$$

$$a_{14}a_{21} + u_{24}(a_{22}a_{11} - a_{21}a_{12}) = a_{11}a_{24} \Rightarrow u_{24} = \frac{a_{24}a_{11} - a_{21}a_{14}}{a_{22}a_{11} - a_{21}a_{12}}$$

…………

Et ainsi de suite jusqu'à la fin.

Exemple

Faire la décomposition de la matrice suivante

$$A=\begin{array}{cccccccccccc}
3 & -2 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 3 & -2 & 0 & & & & & & & & 0 \\
0 & -1 & 3 & -2 & 0 & & & 0 & \dots & 0 & & 0 \\
0 & 0 & -1 & 3 & -2 & 0 & & & & & & 0 \\
0 & & 0 & . & . & . & 0 & & & & & 0 \\
0 & & & 0 & . & . & . & 0 & & & & 0 \\
0 & & & & 0 & . & . & . & 0 & & & 0 \\
0 & & & & & 0 & . & . & . & 0 & & 0 \\
0 & & 0 & \dots & 0 & & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\
0 & & & & & & & 0 & . & . & . & 0 \\
0 & & & & & & & & 0 & -1 & 3 & -2 \\
0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3
\end{array}$$

Décomposition de Cholesky $A=LL^T$

Pour appliquer cette décomposition il faut qu'À est symétrie défini positif.

Définition

Soit $A(a_{ij}), 1 \leq i, j \leq N$ une matrice carré de dimension N x N régulière (inversible, A^{-1} existe, dét A±0,…) et un vecteur $\vec{B}(b_j), 1 \leq j \leq N$ et on cherche un vecteur $\vec{X}(x_i), 1 \leq i \leq N$ tel que$A.\vec{X} = \vec{B}$, on dit qu'A est symétrie défini positif s'elle vérifie les 3 conditions suivantes :

- A symétrique $A = A^T\left(a_{ij} = a_{ji}\right), 1 \leq i, j \leq N$
- $\vec{X}(x_i), 1 \leq i \leq N$; $\vec{X}^T A\vec{X} \geq 0$
- $\vec{X}^T A\vec{X} = 0 \ \Leftrightarrow \ \vec{X} = \vec{0}.$

Si A est sdp alors il existe une décomposition unique $\boldsymbol{A=LL^T}$ Avec des coefficients diagonaux ($l_{ii} > 0.$) et L triangulaire inferieur

$$A = \begin{pmatrix}
a_{1,1}\ a_{1,2}\ a_{1,3} \dots \dots a_{1,n-1}\ a_{1,n} \\
a_{2,1}\ a_{2,2}\ a_{2,3} \dots \dots a_{2,n-1}\ a_{2,n} \\
a_{3,1}\ a_{3,2}\ a_{3,3} \dots \dots a_{3,n-1}\ a_{3,n} \\
. \\
. \\
. \\
a_{n-1,1} \qquad \dots \qquad a_{n-1,n} \\
a_{n,1}\ a_{n,2}\ a_{n,3} \dots \dots a_{n,n-1}\ a_{n,n}
\end{pmatrix}$$

$$LL^T = \begin{pmatrix} l_{11}\ 0 & \dots. & 0 \\ l_{21}\ l_{22}\ 0 & \dots & 0 \\ l_{31}\ l_{32}\ l_{33} & \dots & 0 \\ & . & \\ & . & \\ & . & \\ l_{n-1,1}\ l_{n-1,2} & \dots & l_{n-1,n-1} 0 \\ l_{n,1}\ l_{n,2}\ l_{n,3} \dots l_{n,n-1} & \dots & l_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{11}\ l_{12} & \dots & l_{n1} \\ 0\ l_{22}\ l_{23} & \dots & l_{n2} \\ 0\ 0\ l_{33}\ l_{34} & \dots & l_{n3} \\ & . & \\ & . & \\ & . & \\ 0\ 0\ 0 & \dots & l_{n-1,n-1}\ l_{n,n-1,} \\ 0\ 0\ 0 & \dots & l_{n,n} \end{pmatrix}$$

De l'égalité $A=LL^T$ on déduit :

$$a_{ij} = (LL^T)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} l_{ik} l_{jk} = \sum_{k=1}^{\min\{i,j\}} l_{ik} l_{jk}\ 1 \le i,j \le n$$

Puisque $l_{pq}=0$ si $1 \le p < q \le n$.

La matrice A étant symétrique, il suffit que les relations ci-dessus soient vérifiées pour $i \le j$, c'est-à-dire que les éléments l_{ij} de la matrice L doivent satisfaire :

$a_{ij} = \sum_{k=1}^{i} l_{ik} l_{jk}, 1 \le i \le j \le n$

Pour $i=1$, on détermine la première colonne de L :

$a_{11} = l_{11} l_{11}$D'où $l_{11} = \sqrt{a_{11}}$

$a_{ij} = l_{11} l_{j1}\ d'oul_{j1} = \dfrac{a_{ij}}{l_{11}}, 2 \le j \le n$

On détermine la i-ème colonne de $L(2 \le i \le n)$, après avoir calculé les (i-1) premières colonnes :

$a_{ii} = l_{i1} l_{i1} + \dots + l_{ii} l_{ii}\ d'oul_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2}$

$a_{ij} = l_{i1} l_{j1} + \dots + l_{ii} l_j\ d'ou\ l_{ji} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} l_{jk}}{l_{ii}}, i+1 \le j \le n$

Il résulte du théorème précédent qu'il est possible de choisir tous les éléments $l_{ii}>0$ en assurant que toutes les quantités

$a_{11}, a_{22} \dots, a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2, \dots$ Sont positives.