Année 2020 /2021

Université de Jijel
Département de Mathématiques
Deuxième Année Master Mathématiques Fondamentales et Discrètes
Module : Topologies des espaces de fonctions

Devoir

Exercice 1.
Considérons la famille suivante :

$$\tau_{\mathbb{R}} = \{A \subset \mathbb{R} : A^c \text{ est fini }\} \cup \{\emptyset\},$$

où A^c désigne le complémentaire de A.
1. Montrer que $\tau_{\mathbb{R}}$ est une topologie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $(\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}})$ est un espace T_1.
3. Montrer que l'intersection de deux ouverts non vides quelconques de $(\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}})$ est non vide.
4. $(\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}})$ est-il séparé ?.

Exercice 2. Soient $\{X_s\}_{s\in S}$ une famille d'espaces topologiques deux à deux disjoints, i.e., $X_s \cap X_{s'} = \emptyset$ pour $s \neq s'$. Posons $X = \cup_{s\in S} X_s$. Définissons la famillie suivante.

$$\mathcal{O} = \{U \subset X : U \cap X_s \text{ est ouvert dans } X_s \text{ pour tout } s \in S\}.$$

1- Montrer que $\mathcal{O}$ est une topologie sur X appelée la topologie somme. On note $\bigoplus_{s\in S} X_s$ l'espace topologique obtenu appelé l'espace topologique somme des X_s.
2- Montrer que $A \subset \bigoplus_{s\in S} X_s$ est fermé si et seulement si $A \cap X_s$ est fermé dans X_s pour tout $s \in S$.
3- Montrer que X_s est ouvert et fermé en même temps dans $\bigoplus_{s\in S} X_s$, pour tout $s \in S$.
4- Pour tout $s \in S$, considérons l'application $i_s : X_s \longrightarrow \bigoplus_{s\in S} X_s$. Montrer que i_s est continue.
5- Montrer qu'une application f de $\bigoplus_{s\in S} X_s$ dans un espace topologique Y soit continue si et seulement si $f \circ i_s$ est continue pour tout $s \in S$.

Exercice 3.
1. Soit K et V deux parties de $\mathbb{R}$ tel que K compacte et V fermée. Montrer que $[K, V]$ est fermé dans $C_k(\mathbb{R})$.
2. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue. Considérons l'application $g^\sharp : C(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R})$ définie par : $g^\sharp(h) = h \circ g$, pour tout $h \in C(\mathbb{R})$.
a) Montrer que $(g^\sharp)^{-1}([A, V]) = [g(A), V]$, pour tous $A \subset \mathbb{R}$ et $V \subset \mathbb{R}$.
b) Montrer que $g^\sharp : C_k(\mathbb{R}) \to C_k(\mathbb{R})$ est une application continue.