الميكانيك التحليلي

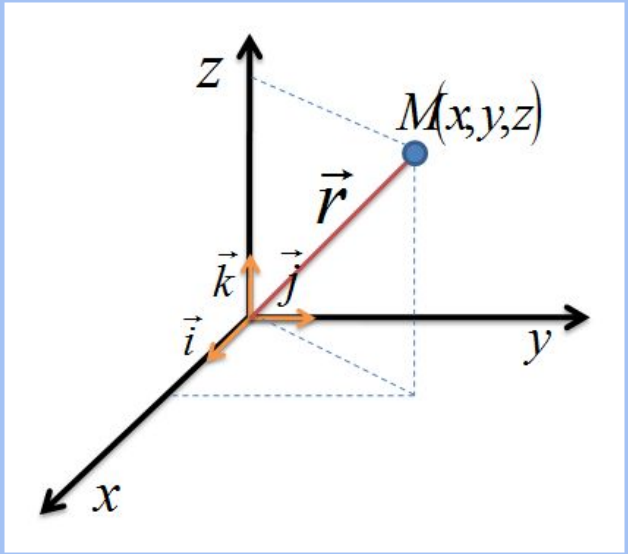
الأستاذة : ر. رقيوع
السنة الثانية فيزياء
جامعة محمد الصديق بن يحيى بجيجل

المحتوى :

- ❑ مراجعة مختصرة في الميكانيك الكلاسيكي
- ❑ ميكانيك لاغرانج
- ❑ ميكانيك هاميلتون
- ❑ ميكانيك الجسم الصلب

الفصل الأول: مراجعة مختصرة في الميكانيك الكلاسيكي

1- احداثيات نقطة مادية



1-1 الاحداثيات الديكارتية(x,y,z)

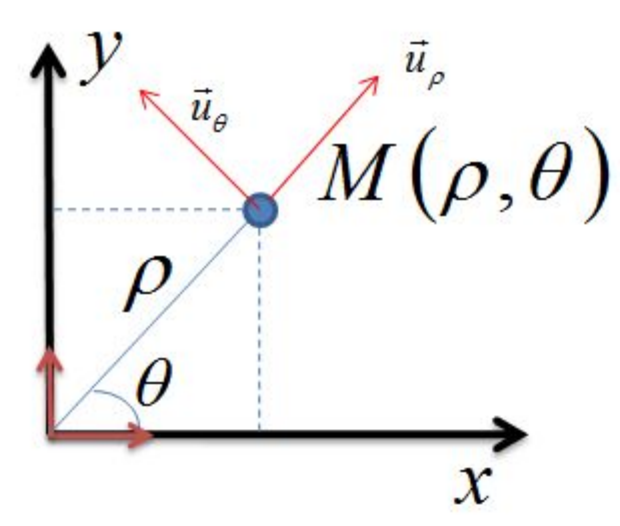
° شعاع الموضع: $\vec{r} = \vec{om} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

° شعاع السرعة: $\vec{v} = \dfrac{d\vec{om}}{dt} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$

°شعاع التسارع: $\vec{\gamma} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}$

الفصل الأول: مراجعة مختصرة في الميكانيك الكلاسيكي

2-1 الاحداثيات القطبية



° شعاع الموضع:

$$\vec{r} = \overrightarrow{om} = \rho\,\vec{u}_\rho$$

° شعاع السرعة:

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{om}}{dt} = \dot{\rho}\,\vec{u}_\rho + \rho\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta$$

°شعاع التسارع:

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\vec{u}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\vec{u}_\theta$$

الفصل الأول: مراجعة مختصرة في الميكانيك الكلاسيكي

العلاقة بين الاحداثيات القطبية و الديكارتية

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\tan g\theta = \frac{y}{x} \Rightarrow \theta = \arctan g\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\cos\theta = \frac{x}{\rho} \Rightarrow x = \rho\cos\theta$$
$$\sin\theta = \frac{y}{\rho} \Rightarrow y = \rho\sin\theta$$

$$\vec{u}_\rho = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}$$
$$\vec{u}_\theta = -\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j}$$

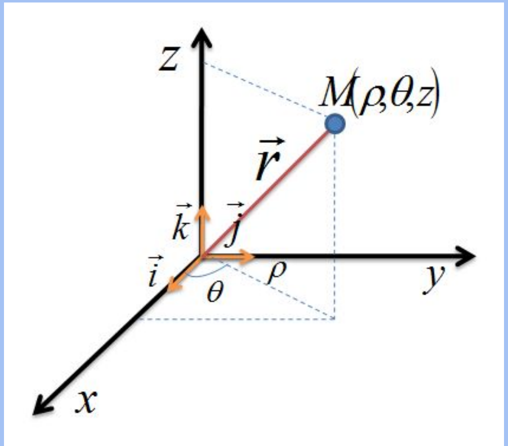
3-1 الاحداثيات الاسطوانية

° شعاع الموضع:

° شعاع السرعة:

°شعاع التسارع:

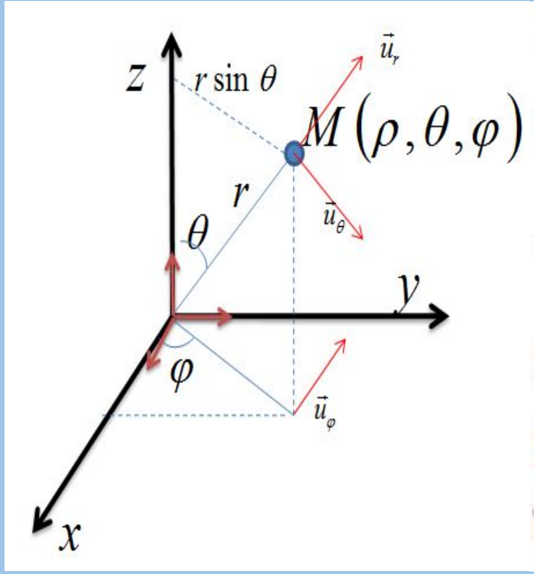
$$\vec{r} = \overrightarrow{om} = \rho\vec{u}_\rho + z\vec{k}$$
$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{om}}{dt} = \dot{\rho}\vec{u}_\rho + \rho\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{k}$$
$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\vec{u}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\vec{u}_\theta + \ddot{z}\vec{k}$$



الفصل الأول: مراجعة مختصرة في الميكانيك الكلاسيكي

3-1 الاحداثيات الكروية

$0 \leq r \leq \infty, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$



° شعاع الموضع:

$$\vec{r} = \overrightarrow{om} = r\vec{u}_r$$

° شعاع السرعة:

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{om}}{dt} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta + r\dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{u}_\varphi$$

°شعاع التسارع:

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \gamma_r\vec{u}_r + \gamma_\theta\vec{u}_\theta + \gamma_\varphi\vec{u}_\varphi \text{ avec}$$

$$\gamma_r = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\sin\theta^2\dot{\varphi}^2)$$

$$\gamma_\theta = (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2)$$

$$\gamma_\varphi = (r\sin\theta\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta + 2r\cos\theta\dot{\theta}\dot{\varphi})$$

الفصل الأول: مراجعة مختصرة في الميكانيك الكلاسيكي

2- العزم الحركي $\vec{L}$: يعرف العزم الحركي لنقطة مادية ب $\vec{L}=\vec{OM}\wedge\vec{P}$

حيث $\vec{OM}$ هو شعاع الموضع و $\vec{P}$ هو شعاع كمية الحركة($m\vec{v}=\vec{P}$) ومنه

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\frac{d\vec{OM}}{dt}\wedge\vec{P}+\vec{OM}\wedge\frac{d\vec{P}}{dt}=\cancel{\vec{V}\wedge m\vec{V}}+\vec{OM}\wedge\sum\vec{F}$$
$$=\vec{OM}\wedge\sum\vec{F}$$

إذا كان $\frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{0}$ مبدأ انحفاظ العزم الحركي.

الفصل الأول: مراجعة مختصرة في الميكانيك الكلاسيكي

3- **<u>القوة المركزية:</u>** هي كل قوة تكون دوما موجهة نحو نقطة ثابتة تسمى مركز القوى أو مركز التسارعات.

من بين القوى المركزية المعروفة:

-قوة الثقل-قوة التفاعل المتبادل بين الشحن-قوة مرونة النابض....

4-**<u>القوى المشتقة من كمون:</u>**(او القوى المحافظة): تكون $\vec{F}$ قوة مشتقة من كمون إذا تحقق:

$$\overrightarrow{rot}\vec{F} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \vec{0}$$

في هذه الحالة يمكن إيجاد دالة سلمية V تسمى كمونا تحقق

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}V \Leftrightarrow \vec{F} = -\vec{\nabla}V$$

إن القوى المركزية دوما هي قوى مشتقة من كمون.

ملاحظة: لمزيد من الإيضاح يمكن الرجوع الى مقرر السنة أولى SM

تطبيقات: تطبيق 1: لتكن نقطة مادية كتلتها m تتحرك في مائع حيث تؤثر عليها قوة جذب من الشكل $\vec{F} = -k\vec{OM}$ وقوة إعاقة من الشكل: $\vec{f} = -\alpha \vec{v}$ (k, α ثابتان موجبان).

(1) أحسب $\frac{d\vec{L}}{dt}$ (2) بين أن طويلة $\vec{L}$ هي دالة متناقصة مع الزمن.

تطبيق 2: أحسب العزم الحركي لنقطة مادية في حالة حركة دائرية في مستوي (xoy).

تطبيق 3: لتكن $\vec{F}$ قوة حيث:

$$\vec{F} = (2xy + z^3)\vec{i} + x^2\vec{j} + 3xz^2\vec{k}$$

- هل $\vec{F}$ هي قوة مشتقة من كمون V؟ إذا كان الجواب نعم، أوجد عبارة الكمون V الموافق؟

حل التمرين 3: $\vec{F}$ مشتقة من كمون إذا كان $\vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \vec{0}$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xy+z^3 & x^2 & 3xz^2 \end{vmatrix} = \vec{i}(0-0) - \vec{j}(3z^2 - 3z^2) + \vec{k}(2x - 2x) = \vec{0}$$

ومنه $\vec{F}$ مشتقة من كمون V أي تحقق: $\vec{F} = -\vec{\nabla} V$

$$(2xy + z^3)\vec{i} + x^2\vec{j} + 3xz^2\vec{k} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)\vec{i} - \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)\vec{j} - \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)\vec{k}$$

بالمطابقة نجد:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -2xy - z^3 \quad (1)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -x^2 \quad (2)$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -3xz^2 \quad (3)$$

بمكاملة (1) نجد:

$$(4)\quad \boxed{V = -x^2y - z^3x + C(z,y)}$$

- نعوض في (2) نجد:

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -x^2$$

$$\Rightarrow \cancel{-x^2} + \frac{\partial C(z,y)}{\partial y} = \cancel{-x^2}$$

$$\Rightarrow C(z,y) = C(z)$$

نعوض في (4) نجد:

$$\boxed{V = -x^2y - z^3x + C(z)}$$

نعوض في (3) نجد:

$$\cancel{-3z^2x} + \frac{\partial C(z)}{\partial z} = \cancel{-3z^2x}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial C(z)}{\partial z} = 0 \Rightarrow C(z) = cst$$

وعليه:

$$\boxed{V = -x^2y - z^3x + cst}$$