I.1. Valeur et représentations d'une grandeur sinusoïdale

I.1.1. Grandeur électrique périodique, alternative et sinusoïdale

Une grandeur électrique **g** de valeur instantanée **g(t)** est

- Périodique si sa valeur instantanée **g(t)** est telle que, voire figure I.1.

$g(t) \equiv g(t+T)$

C'est-à-dire une seule période **T** suffit pour définir cette grandeur instantanée **g(t).**

T : est la période (s).

$f = 1/T$

f : est la fréquence (Hz).

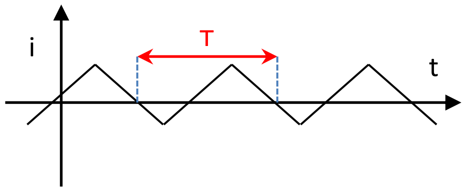

Figure I.1 évolution temporelle du courant i(t), périodique

- Alternative si **g** est tantôt positif, tantôt négatif. Figure I.2.

On appelle alternance positive la partie de la période où **g** est positif, alternance négative celle où **g** est négatif.

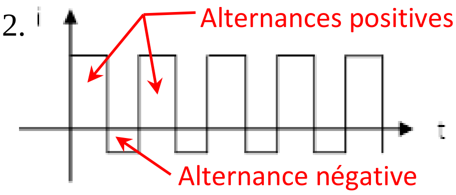

Figure I.2 Courant alternatif

- Sinusoïdale si elle a pour expression, voir figure I.3.

$g(t) = G_m sin(\omega t + \varphi_0)$

G_m : Amplitude

ω: Pulsation (rd/s),

Sachant que $\omega = 2\pi f$ ou $\omega = \frac{2\pi}{T}$

$\omega t + \varphi_0$: Phase instantanée

φ_0 : Phase initiale

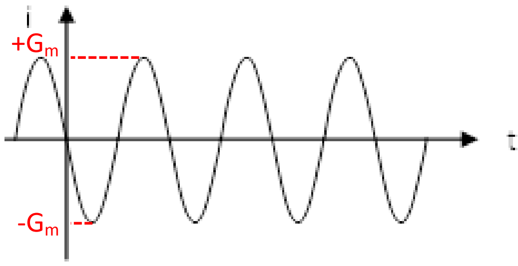

Figure I.3 Courant Sinusoïdale

- Dans le génie électrique existe d'autres formes des grandeurs électriques telles que les grandeurs rectangulaires, triangulaires, …

I.1.2. Valeur moyenne et valeur efficace

On peut caractériser une grandeur périodique **g** par sa valeur moyenne $\mathbf{G_{moy}}$ et/ou par sa valeur efficace **G**.

$$G_{moy} = \frac{1}{T}\int_{(T)} g(t)dt$$

$$G = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{(T)} g(t)^2 dt}$$

Pour les grandeurs sinusoïdales, la valeur efficace est

$G = \frac{G_m}{\sqrt{2}}$.

***Remarque* :**

. Le calcul des valeurs efficaces des grandeurs rectangulaires, triangulaires fera l'objet d'un exercice de Travaux dirigés.

I.1.3. Représentation d'une grandeur sinusoïdale

I.1.3.1. Représentation vectorielle

Considérons une grandeur sinusoïdale **g(t)** donnée comme suit

$g(t) = G_m sin(\omega t + \varphi_0)$

La grandeur **g(t)** peut être représentée par le mouvement de la projection du point **M** sur l'axe des ordonnées situé sur le cercle et décrivant un mouvement de rotation uniforme (à la vitesse angulaire **ω**). Figure I.4.

Ceci suggère de représenter la grandeur instantanée **g(t)** par un vecteur de module constant égale à $\mathbf{G_m}$, supposé tourner à la vitesse de rotation **ω.**

Un tel vecteur est appelé ‘‘ vecteur de Fresnel ’’.

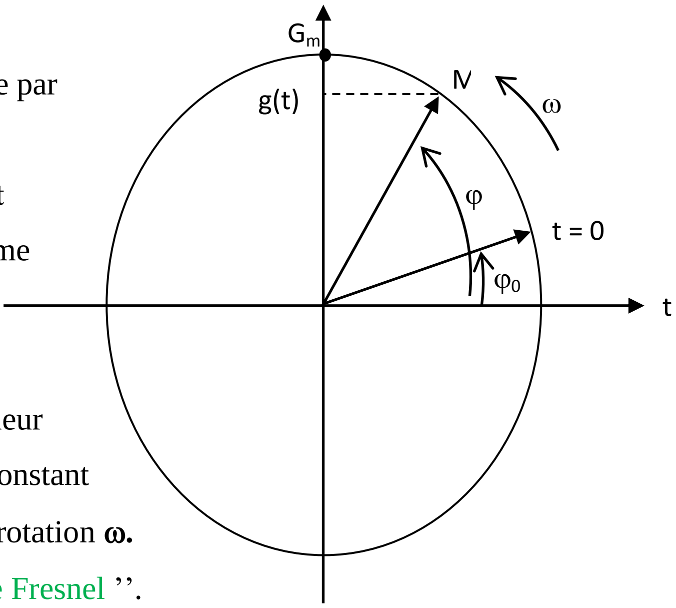

Figure I.4 cercle trigonométrique

Il est beaucoup plus simple d'additionner, de dériver, d'intégrer des vecteurs représentant des sinus que de réaliser les mêmes opérations sur les représentations temporelles.

I.1.3.2. Notation complexe

Dans le plan complexe, la grandeur électrique sinusoïdale **g(t)** peut être représentée comme suit : Figure I.5

$\bar{G} = G\sqrt{2}\big(cos(\omega t + \varphi_0) + j\ sin(\omega t + \varphi_0)\big)$

$g(t) = Im(\ \bar{G})$

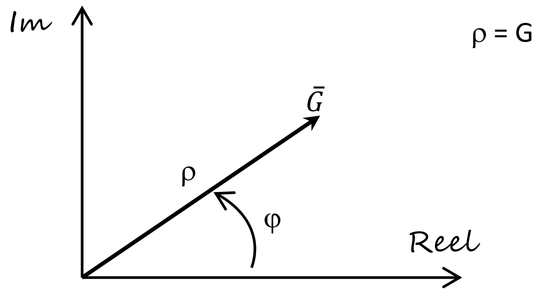

Figure I.4 Représentation complexe

L'intérêt de cette présentation est de faciliter les calculs en remplaçant certaines opérations vectorielles par un simple calcul algébrique. Nous utiliserons cette notation imaginaire chaque fois que nous aurons à calculer le produit, le quotient, la racine, la dérivée, l'intégrale, … de fonctions sinusoïdales.

La grandeur instantanée **g(t)** peut être représentée par le nombre complexe $\overline{\mathbf{G}}$. Ce dernier peut s'exprimer de plusieurs manières:

- Forme cartésienne : $z = x + jy$, avec ; $j^2 = -1$
- Forme trigonométrique : $z = \rho(\cos\theta + j\ \sin\theta)$.
- Forme exponentielle : $z = \rho\ e^{j\theta}$
- Forme polaire : $z = \rho^{\lfloor\theta}$

Sachant que : $\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \left|\vec{V}\right| \\ \tan\theta = \dfrac{y}{x} \end{cases}$

ρ est le module du nombre complexe $\overline{\mathbf{G}}$

θ est l'argument du nombre complexe $\overline{\mathbf{G}}$.

I.2. Impédances

Un circuit électrique est linéaire si les valeurs des résistances **R**, des inductances L et des capacités **C** qui le composent sont indépendantes du courant qui les traverse ou de la tension à leurs bornes.

En régime permanent ou régime établi, si en applique une tension sinusoïdale u(t) à un circuit linaire, le courant i(t) dans le circuit est sinusoïdal. Figure I.5.

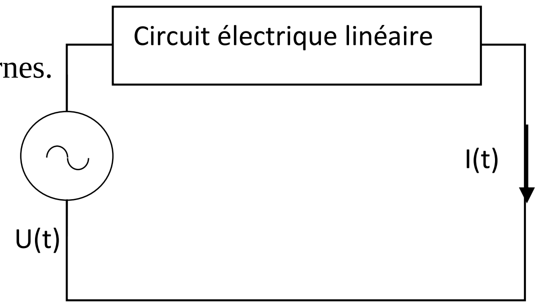

Figure I.5 Circuit électrique linéaire

Le quotient de la valeur efficace de la tension par celle du courant est nommé impédance Z, tel que $Z = \frac{U}{I}$.

L'impédance complexe $\bar{Z}$ est le quotient des quantités complexes représentant la tension et le courant. $\bar{Z} = \frac{\bar{U}}{\bar{I}}$

Si $\bar{Z} = R + jX$

Avec

R résistance totale du circuit

X réactance totale du circuit

$\bar{Z}$ a pour module Z tel que :

$Z = \sqrt{R^2 + X^2}$,

et a pour argumentφ tel que :

$\varphi = atg(\frac{X}{R})$

I.2.1 Circuit résistif pur (Circuit R)

On dit aussi débit d'une source de tension sinusoïdale sur une résistance pure, figure I.6.

$u(t) = U\sqrt{2}\ \sin(\omega\, t)$

$i(t) = \frac{u(t)}{R} = \frac{U}{R}\sqrt{2}\ \sin(\omega\, t)$

On constate que :

- La tension et le courant sont en phase
- $U = R\, I$ d'où $U_{max} = R\, I_{max}$

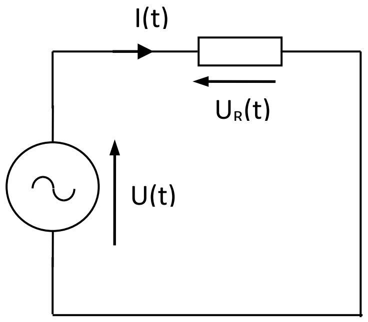

Figure I.6 Circuit électrique purement résistif

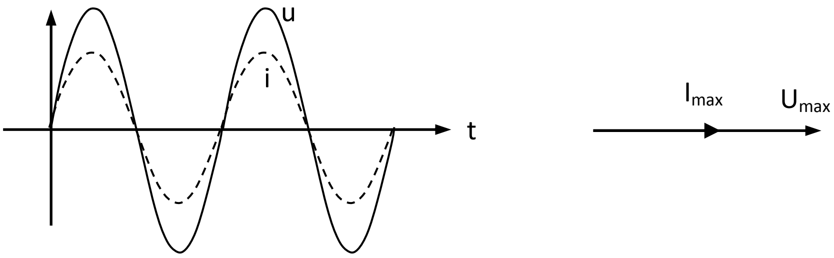

Figure I.7 Représentation instantanée et vectorielle, $\varphi_0 = 0$

I.2.2 Circuit inductif pur (Circuit L)

On dit aussi débit d'une source de tension sinusoïdale sur une inductance pure, figure I.8.

$u(t) = U\sqrt{2}\ \sin(\omega\, t)$

La force électromotrice induite dans l'inductance est :

$$e = -L\frac{di}{dt}$$

$$u + e = 0 \Rightarrow U_{max}\sin(\omega t) - L\frac{di}{dt} = 0$$

$$i(t) = \frac{U}{L\omega}\sqrt{2}\ \sin\left(\omega\, t - \frac{\pi}{2}\right)$$

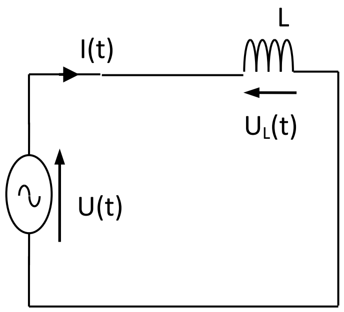

Figure I.8 Circuit électrique purement inductif

On constate que :

- Le courant est déphasé de $\frac{\pi}{2}$ (déphasage retard) par rapport à la tension d'alimentation.
- $U = L\omega\, I$ d'où $I_{max} = \frac{U_{max}}{L\omega}$

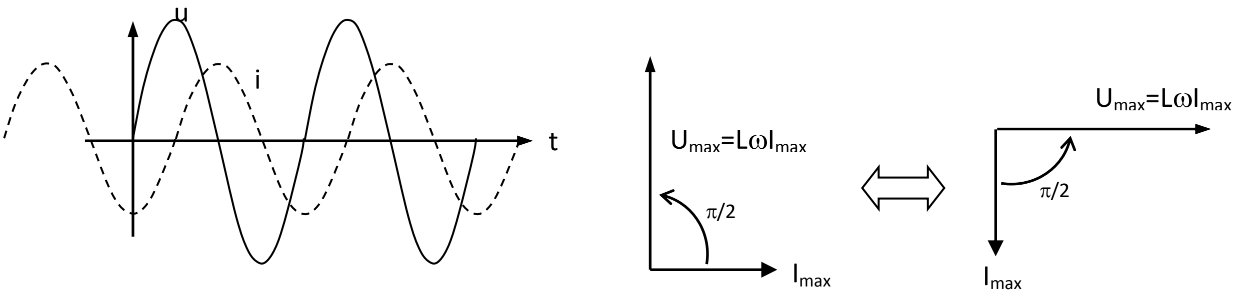

Figure I.9 Représentation instantanée et vectorielle, $\varphi_0 = 0$

I.2.3 Circuit capacitif pur (Circuit C)

On dit aussi débit d'une source de tension sinusoïdale sur une capacité pure, figure I.10.

$u(t) = U\sqrt{2}\ \sin(\omega\, t)$

Le condensateur C se charge et se décharge au cours d'un cycle puis l'opération se répète au cours du cycle suivant. Si q est la charge instantanée du condensateur, on a :

$q = C \cdot u = C \cdot U_{\max} \sin(\omega t)$

On en déduit la valeur de l'intensité $i = \dfrac{dq}{dt}$

$i(t) = U\, C\omega\, \sqrt{2}\ \sin\left(\omega\, t + \frac{\pi}{2}\right)$

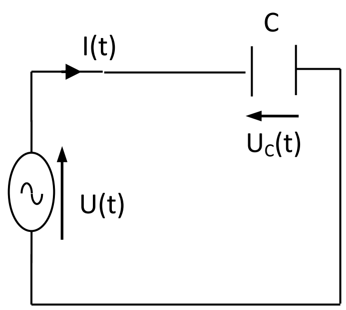

Figure I.10. Circuit électrique purement capacitif

On constate que :

- expérimentalement que le courant est sinusoïdal. Tout se passe, en définitive, comme si le condensateur était traversé par le courant alternatif. En fait, il n'en est rien : l'apparition des charges sur les armatures du condensateur est due au phénomène d'influence et il n'y a pas circulation des charges à l'intérieur du condensateur.
- Le courant est déphasé de $\dfrac{\pi}{2}$ (en avance) sur la tension appliquée.
- $U = \frac{1}{Cw}\, I$ d'où $I_{\max} = C \cdot \omega \cdot U_{\max}$

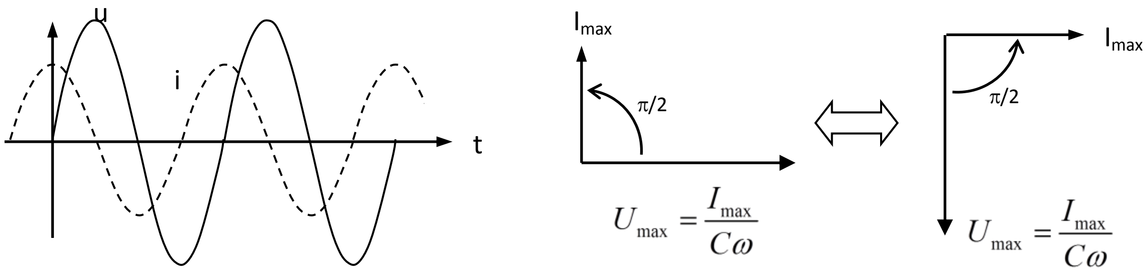

Figure I.11 Représentation instantanée et vectorielle, $\varphi_0 = 0$

I.2.4 Circuit RLC série

Pour un circuit RLC série, figure I.12.

$$u(t) = R\,i(t) + L\,\frac{d\,i(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int i(t)\,dt$$

En régime sinusoïdale

$$\bar{U} = \left(R + j\left(Lw - \frac{1}{Cw}\right)\right)\bar{I}$$

Donc

$$\bar{Z} = \left(R + j\left(Lw - \frac{1}{Cw}\right)\right)$$

Ce qui donne

$$Z = \sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}$$

$$\varphi = atg(\frac{\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)}{R})$$

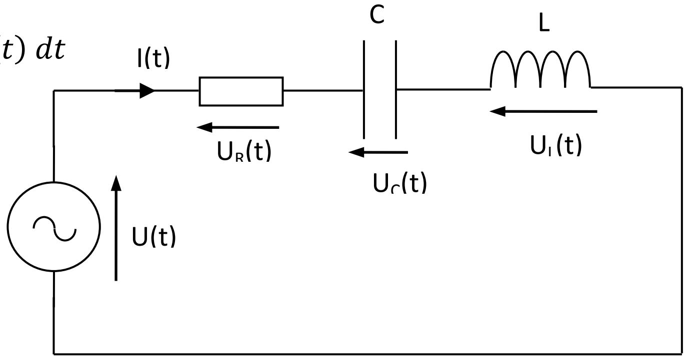

Figure I.12 Circuit électrique RLC en série

En prenant l'intensité I comme origine des phases, le diagramme des vecteurs (dit de Fresnel) relatif à cette somme de fonctions sinusoïdales est alors le suivant :

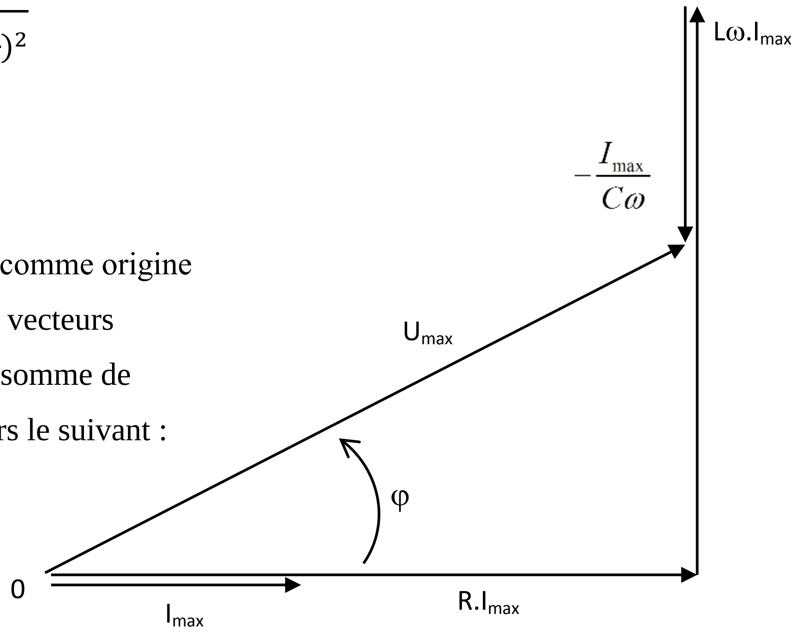

Figure I.13 Circuit électrique RLC en série

En appliquant le théorème de Pythagore, on en déduit :

$$U_{max}^2 = \left(RI_{max}\right)^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2 \cdot I_{max}^2$$

D'où :

$$\boxed{\frac{U_{max}}{I_{max}} = Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}$$

La quantité Z, qui est homogène à une résistance, est appelée l'impédance du circuit. Elle s'exprime en Ohms (Ω).

Le déphasage φ de la tension par rapport au courant est donné par :

$$\boxed{\tan\varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}}$$

I.3 Puissances

I.3.1. Définitions, expressions et unités

- Puissance instantanée p fournie par une source de tension u(t) débitant un courant i(t) est

$p(t) = u(t)\ \ i(t)$ (unité le watt , W)

- Puissance active P ou tout simplement la puissance, est la valeur moyenne de la puissance instantanée

$P = \frac{1}{T}\int_{(T)} p(t)dt,$ (unité le watt, W)

➢ En sinusoïdale

$u(t) = U\sqrt{2}\ \ \sin(\omega\, t)$

$\mathrm{i}(t) = I\sqrt{2}\ \ \sin(\omega\, t + \varphi)$

$\mathrm{p}(t) = UI\, cos(\varphi) +\ UI\ \ \sin(2\omega\, t + \varphi)$

La puissance instantanée est la somme de la puissance active P et d'un terme sinusoïdale de pulsation 2w, appelé puissance fluctuante.

- Puissance apparente S est le produit es valeurs efficaces du courant et de la tension

S= $U\ I$ (unité le volt-ampère , VA)

- Facteur de puissance F est le quotient de P par S

$$F = \frac{P}{S}$$

➢ En sinusoïdale

$$F = \frac{P}{S} =)$$

On définit, outre P et S, la puissance réactif

$Q = U\ I \sin\varphi_0$ (unité le Volt-ampère réactif VAR)

La puissance réactive consommée par un récepteur est comptée positive si le courant est déphasé en arrière de la tension (en d'autre terme si la récepteur est inductif), négative s'il est déphasé en avant (c'est-à-dire si le récepteur est capacitif).

I.3.2. Puissance complexe

Soit une impédance $\underline{Z} = R + jX$

(X est la réactance de l'impédance, positive pour une inductance, négative pour une capacitance), aux bornes de laquelle on impose la tension $\overline{U}$ et qui est traversée par un courant $\overline{I}$ tel que :

$\overline{U} = Ve^{j\omega t}$

$\overline{I} = Ie^{j(\omega t+\varphi)}$ d'où son conjugué est $\overline{I^*} = Ie^{-j(\omega t+\varphi)}$

On définit =la puissance complexe par :

$$\overline{S} = \overline{U}\ \overline{I^*} = P - j\,Q$$

$$\overline{S} = \overline{U}\ \overline{I^*} = U\,I\cos\varphi + j\,U\,I\sin\varphi$$

On définit les puissances vues précédemment en fonction de la puissance complexe par les formules suivantes :

- Puissance active : $P = UI\,cos\varphi = R\,I^2 = \frac{U_R^2}{R} = Re\left(\overline{U}\ \overline{I^*}\right)$, en Watt W.
- Puissance réactive: $Q = UI\sin\varphi = X\,I^2 = \frac{U_X^2}{X} = Im\left(\overline{U}\ \overline{I^*}\right)$, en var
- Puissance apparente : $S = UI\ = Z\,I^2 = \frac{U^2}{Z} = module\ de\ \left(\overline{U}\ \overline{I^*}\right)$
- Facteur de puissance : $\cos\varphi = R/Z = P/S$

On a également les relations suivantes qui présentent un moindre degré d'utilité :

$$P = \frac{1}{2}\left(\overline{S} + \ \overline{S^*}\right)$$

$$Q = \frac{1}{2\,j}\left(\overline{S} - \ \overline{S^*}\right)$$

I.3.3. Signification des Energies active, réactive, apparente

Toute machine électrique utilisant le courant alternatif (moteur, transformateur) met en jeu deux formes d'énergie : l'énergie active et l'énergie réactive.

L'énergie active consommée (kWh) résulte de la puissance active P(kW) des récepteurs. Elle se transforme intégralement en puissance mécanique (travail) et en chaleur (pertes).

L'énergie réactive consommée (kvarh) sert essentiellement à l'alimentation des circuits magnétiques des machines électriques. Elle correspond à la puissance réactive Q (kvar) des récepteurs.

L'énergie apparente (kVAh) est la somme vectorielle des deux énergies précédentes. Elle correspond à la puissance apparente S(kVA) des récepteurs, somme vectorielle de P(kW) et Q(kvar).

I.3.4. Tringle des puissances

A chacune des énergies active et réactive, correspond un courant.

Le courant actif (Ia) est en phase avec la tension du réseau.

Le courant réactif (Ir) est déphasé de 90° par rapport au courant actif, soit en retard (récepteur inductif), soit en avance (récepteur capacitif).

Le courant apparent (It) est le courant résultant qui parcourt la ligne depuis la source jusqu'au récepteur.

Si les courants sont parfaitement sinusoïdaux, on peut utiliser la représentation de Fresnel. Ces courants se composent alors vectoriellement comme représenté à la figure I.14.

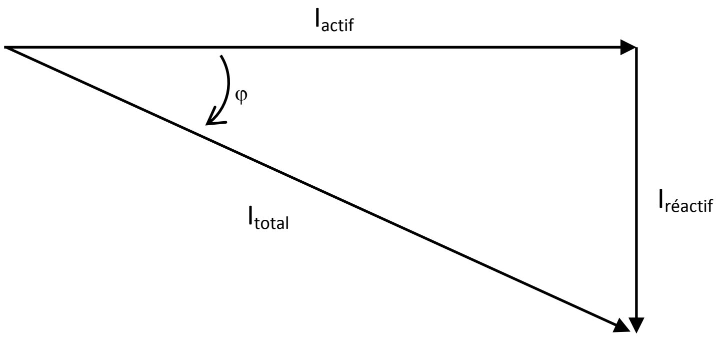

Figure I.14 Composition vectorielle du courant

$$\begin{cases} I_{actif} = I_{total} \times \cos\varphi \\ I_{réactif} = I_{total} \times \sin\varphi \\ I_{total} = \sqrt{I_{actif}^2 + I_{réactif}^2} \end{cases}$$

Le diagramme précédent (figure I.14) établi pour les courants est aussi valable pour les puissances, en multipliant chacun des courants par la tension commune U.

On définit ainsi (figure I.15):

- la puissance apparente : S = UI (kVA),
- la puissance active : P = UI.cosϕ (kW),
- la puissance réactive : Q = UI.sinϕ (kvar).

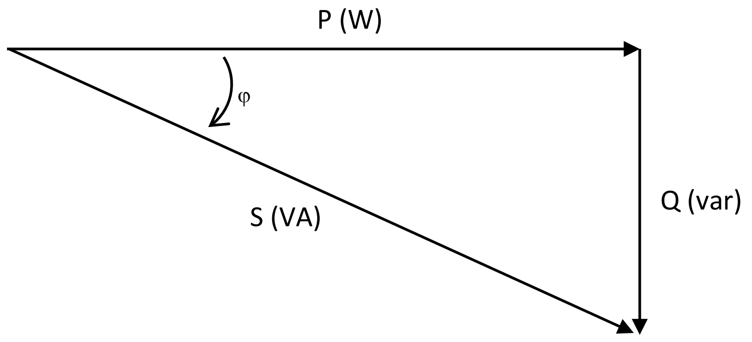

Figure I.15 Triangle des puissances

I.3.5. Conservation de la puissance active et de la puissance réactive

Théorème de Boucherot :

Les puissances actives s'ajoutent algébriquement, les puissances réactives aussi, mais ce n'est pas le cas des puissances apparentes.

Dans un réseau électrique constitué de n dipôles (k = 1, 2, …,n), la puissance active P (respectivement la puissance réactive Q) est égale à la somme algébrique des puissances actives P_k (respectivement des puissances réactives Q_k) des dipôles. Ceci s'applique que les dipôles soient producteurs ou consommateurs, en actif comme en réactif, c'est-à-dire quel que soit le signe des termes P_k et Q_k.

$$P = \sum_{k=1}^{n} P_k \quad \text{et} \quad Q = \sum_{k=1}^{n} Q_k$$

Ce théorème permet de résoudre les exercices et problèmes concernant les puissances par le calcul. Il est valable aussi bien en monophasé qu'en triphasé.

La puissance apparente ne peut s'obtenir que par les relations : $\vec{S} = \sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{S_k}$ (solution graphique) ou par le calcul avec $S_T = \sqrt{P_T^2 + Q_T^2}$