II-1. Introduction :

Les définitions et les méthodes utilisées dans la discipline de la sûreté de fonctionnement font appel aux théories des probabilités en s'appuyant sur une notion concrète en sûreté de fonctionnement : l'instant d'apparition d'une défaillance.

II-2. Rappels sur les probabilités:

II-2-1. Notion de variable aléatoire:

Une variable aléatoire est une variable réelle dont la valeur est liée au résultat d'une expérience. En sûreté de fonctionnement, les variables discrètes se rencontrent lorsque les événements se produisent sur un intervalle de temps donné sont des nombres entiers. Les variables aléatoires continues peuvent prendre toutes les valeurs réelles entre 0 et ∞.

II-2-2. Notion de probabilité d'un événement :

La probabilité d'un événement peut se définir comme étant la limite d'une fréquence relative observée de cet élément lorsque le nombre d'essais ou d'observations tend vers ∞.

La probabilité P(A) de l'événement A est définie par :

$$P(A) = \lim_{N \to \infty} \frac{N_A}{N} \qquad \text{(II.1)}$$

Avec N_A est le nombre de fois où A été observé.

La probabilité d'un événement est un nombre toujours compris entre 0 et 1.

$$0 \leq P(A) \leq 1 \qquad \text{(II.2)}$$

II-2-3. Axiomes de probabilité :

En notant par convention les opérateurs logiques **ET** et **OU** respectivement par, **.** et **+**, l'axiome des probabilités totales (ou théorie de Poincaré) formulé par :

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A.B) \qquad \text{(II.3)}$$

- A et B sont dits incompatibles si $P(A.B) = \phi$ (l'événement consistant à obtenir simultanément A et B est impossible).

$$P(A+B) = P(A) + P(B) \qquad \text{(II.4)}$$

- A et B sont indépendants si la probabilité d'occurrence de A ne dépend pas de la probabilité d'occurrence de B.

$$P(A.B) = P(A).P(B) \qquad \text{(II.5)}$$

II-2-4. Probabilité composée ou relation de Bayes:

Soient deux événements A et B non disjoints. On appelle probabilité de A conditionnellement à B (sachant B) notée P(A/B) la probabilité de réalisation de A sachant que B s'est déjà réalisé.

$$P(A.B) = P(A).P(B / A) = P(B).P(A / B) \tag{II.6}$$

II-2-5. Fonction de répartition d'une variable aléatoire continue:

La fonction de répartition F(X) d'une variable aléatoire X définie sur $]-\infty, +\infty[$correspond à la probabilité d'obtenir un résultat inférieur ou égal à une valeur x donnée.

$$F(X) = P(X \leq x) \tag{II.7}$$

La probabilité d'obtenir un résultat compris entre a et b (b>a) est donnée par :

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) \tag{II.8}$$

II-2-6. Valeur moyenne et variance d'une variable aléatoire continue:

La valeur moyenne M et la variance Var(x) d'une variable aléatoire se déduisent de la loi de densité de probabilité f(x), par :

$$M = \int_{-\infty}^{+\infty} Xf(X)dX \tag{II.9}$$

Et

$$\mathrm{var}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (X - M)^2 f(X)dX \tag{II.10}$$

Ces caractéristiques statiques sont fondamentales en SdF pour le calcul de MTBF et MTTR.

II-2-7. Lois de probabilité rencontrées dans les études de fiabilité:

Les principales lois utilisées dans les études de sûreté de fonctionnement sont les suivantes. La variable représentative de l'instant de la défaillance sera notée t.

II-2-7-1. Loi Binomiale de paramètre p et n:

Elle correspond à la probabilité de réalisation d'un événement de probabilité *p* au cours de *n* expériences. La variable aléatoire discrète prend des valeurs entières entre 0 et n avec une probabilité :

$$P(x = i) = C_n^i P^i (1 - p)^{n-i} \tag{II.11}$$

La valeur moyenne et la variance sont données par :

$$M = np \quad \text{et} \quad \mathrm{var}(x) = npq \tag{II.12}$$

Avec $p+q=1$.

II-2-7-2. Loi de Poisson de paramètre m:

La variable aléatoire discrète prend des valeurs entières entre 0 et ∞ avec une probabilité :

$$P(x=k) = \frac{m^k}{k!}\exp(-m) \tag{II.13}$$

Elle correspond au nombre d'occurrence sur une période donnée d'un événement dont la probabilité par unité de temps est constante.

II-2-7-3. Loi Log-normale ou Loi de Galton:

La variable aléatoire est dans ce cas une variable continue *t* entre $[0,+\infty[$ dont la loi de densité de probabilité est donnée par :

$$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,\frac{1}{t}\,\exp\left(\frac{(-\ln t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \tag{II.14}$$

Avec μ : moyenne des ln t

σ : Ecart type des ln t

La valeur moyenne et la variance sont données par :

$$M = \exp\left(\mu+\frac{\sigma^2}{2}\right) \quad \text{et} \quad \mathrm{var}(t) = \frac{1}{\sigma^2} \tag{II.15}$$

II-2-7-4. Loi de Weibull:

Cette loi est très utilisée pour représenter le comportement des matériels pendant toute leur période de vie avec une loi de densité de probabilité définie par :

$$f(t) = \frac{\beta(t-\gamma)^{\beta-1}}{\eta^\beta}\exp\left(-\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^\beta\right) \tag{II.16}$$

Avec β : Paramètre de forme (sans unité)

η : Paramètre d'échelle(en unité de temps)

γ: Paramètre de position (en unité de temps)

La valeur moyenne et la variance sont données par :

$$M = \gamma + \eta \Gamma\left(\frac{1+\beta}{\beta}\right) \tag{II.17}$$

Et

$$\mathrm{var}(t) = \eta^2\left[\Gamma\left(\frac{2}{\beta}+1\right) - \Gamma^2\left(\frac{1+\beta}{\beta}\right)\right] \tag{II.18}$$

Avec

$$\Gamma(b) = \int_0^{+\infty} \mathrm{X}^{b-1}\exp(-\mathrm{X})\,d\mathrm{X} \tag{II.19}$$

II-2-7-5. Loi Normale:

La variable aléatoire est dans ce cas une variable continue *t* entre $]-\infty, +\infty[$ dont la loi de densité de probabilité est donnée par :

$$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\ \exp\left(\frac{-(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \tag{II.20}$$

La valeur moyenne et la variance sont données par :

$$M = \mu \qquad \text{et} \qquad \mathrm{var}(t) = \sigma^2 \tag{II.21}$$

II-2-7-6. Loi Uniforme:

La variable aléatoire t est dans ce cas une variable continue dans l'intervalle $[t_1, t_2]$ dont la loi de densité de probabilité est donnée par :

$$f(t) = \frac{1}{t_2 - t_1} \tag{II.22}$$

La valeur moyenne et la variance sont données par :

$$M = \frac{t_1 + t_2}{2} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{var}(t) = \frac{(t_1 + t_2)^2}{12} \tag{II.23}$$

II-2-7-7. Taux de défaillance pour la loi exponentielle et la loi de Weibull:

Comme nous avons vu précédemment (tableau I.1, chapitre I), l'application des propriétés de la fonction logarithmique népérienne et du calcul intégral aux lois exponentielle et de Weibull conduit aux expressions des taux de défaillance suivants :

Tableau II.1 taux de défaillance pour une exponentielle et loi de Weibull

Loi	Exponentielle	Weibull
$f(t)$	$\lambda \exp(-\lambda t)$	$\frac{\beta(t-\gamma)^{\beta-1}}{\eta^{\beta}} \exp\left(-\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^{\beta}\right)$
$\lambda(t)$	λ	$\frac{\beta}{\eta}\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^{\beta-1}$

II-2-7-8. Allure des taux de défaillance d'une loi de Weibull pour différentes valeurs de β:

L'étude de la loi de Weibull qui dépend de trois paramètres (β, η et γ) est instructive pour représenter des taux de défaillances décroissants, constants ou croissants en ne faisant varier que le paramètre β.

Comme le montre la figure suivante le taux de défaillance λ est :

- Constant pour $\beta=1$
- Croissant pour $\beta>1$
- Décroissant pour $\beta<1$

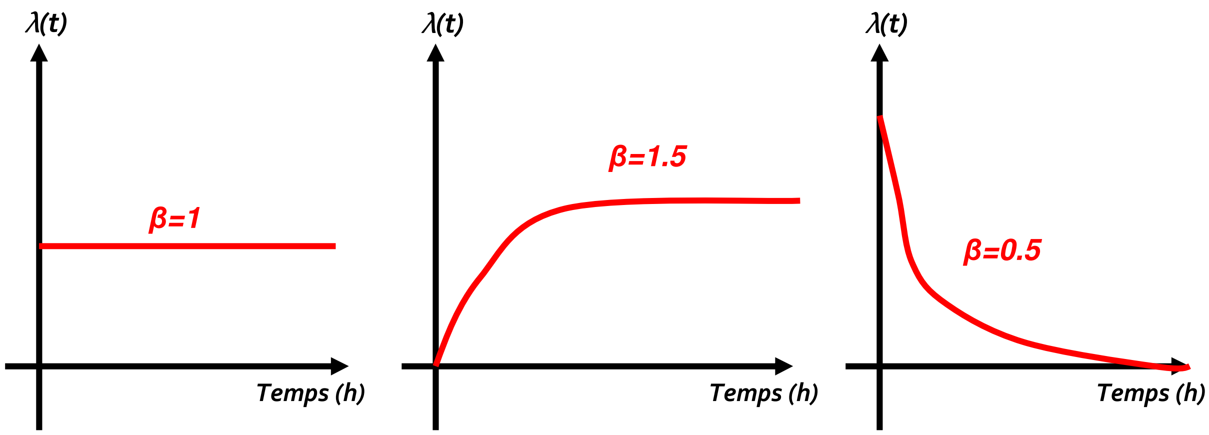

Fig. II.1 Allures des taux de défaillance d'une loi de Weibull