Les Groupes de Lie

I) Notions sur les groupes topologiques

1- Espaces topologiques

Soit X un ensemble arbitraire et soit τ un ensemble de s-ensembles de X : $\tau_i \subset X$. On dit que $\{X, \tau\}$ est un espace topologique si τ vérifie :

* $\phi \in \tau$ et $X \in \tau$
* Si $U_1 \in \tau$ et $U_2 \in \tau$ alors $U_1 \cap U_2 \in \tau$
* Si $U_i \in \tau$ $(i \in I)$ alors $\bigcup_{i \in I} U_i \in \tau$

Chaque $U \subset X$ et qui $\in \tau$ est dit ensemble ouvert et τ définit une topologie sur X.

On appelle voisinage de $x \in X$, tout s-ensemble de X contenant un ouvert qui contient x.

$$x \in U_x \subset V$$

Exemples : * $\{X, \tau\}$ τ l'ensemble des parties de X est un espace topologique. Dans ce cas on dit que la topologie discrète.

Si $\tau = \{\phi, X\}$ la topologie est dite grossière

* Soit $\mathbb{R}$ l'ensemble des réels et τ l'ensemble des $U \subset \mathbb{R}$ / $\forall x \in U \ \exists \varepsilon > 0 \ / \ ]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset U$

$\{\mathbb{R}, \tau\}$ est dite topologie naturelle de la droite réelle.

2 - Convergence et continuité

* la suite $\{x_n\}$, $x_n \in X$ converge vers $x \in X$ si, pour chaque ouvert U_x (contenant x), $\exists N$ / $n \geq N$ $x_n \in U_x$.

* une application $f: X \to Y$ de $\{X, \tau\}$ vers $\{Y, \tau'\}$ est continue si $\forall U \in \tau'$, $f^{-1}(U) \in \tau$.

l'image d'un ouvert est un ouvert.

* une application bijective est dite homéomorphisme si f est continue et f^{-1} continue.

et on dit que X et Y sont homéomorphique.

3. Espaces métriques

Soit X un ensemble et $d(\cdot,\cdot)$ une fonction à deux points dite distance entre points.

(X, d) est dit espace métrique si d vérifie.

③

1°) $d(x,y) \geq 0$

2°) $d(x,y) = 0$ ssi $x = y$

3°) $d(x,y) = d(y,x)$

4°) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

Exemple : $(\mathbb{R}^n, d)$ avec $d(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2\right)^{1/2}$
est un espace métrique

on dit que d définit une métrique sur X. On peut définir plusieurs métriques sur un même ensemble.

Soit $x \in (X, d)$ et $r > 0$ alors

$S(x,r) = \{ y \in X \,/\, d(x,y) < r \}$ boule ouverte de centre x

$\bar{S}(x,r) = \{ y \in X \,/\, d(x,y) \leq r \}$ boule fermé de centre x

$S(x,r)$ est dit aussi un ε voisinage de x.

<u>Définition</u>: un ouvert de X est une union quelconque de boules ouvertes. En particulier, une boule ouverte est un ouvert.

Si Z est l'ensemble de tous les ouverts de X

$\{X, Z\}$ est un espace topologique.

<u>Convergence</u>: $x_n \longrightarrow x$ si $\forall S(x,\varepsilon)$, ~~alors~~ $\exists N > 0 /$
$n \geq N$ $d(x_n, x) < \varepsilon$ $(x_n \in S(x,\varepsilon))$

<u>Continuité</u>: $\forall S(f(x_0), \varepsilon)$ $\exists S(x_0, \eta)$ /
pour $x \in S(x_0, \eta)$ alors $f(x) \in S(f(x_0), \varepsilon)$

(4) <u>Définition</u> un espace topologique est dit espace de Hausdorff si pour $x_1 \neq x_2$ $\exists\, U_{x_1}, U_{x_2}$ / $U_{x_1} \cap U_{x_2} = \phi$.

<u>Exemple</u>: $\{\mathbb{R}, \tau\}$ topologie naturelle est un espace de Hausdorff
$\{\mathbb{R}, \tau\}$ topologie grossière n'est pas de Hausdorff.

Dans un espace de Hausdorff si $\{x_n\}$ Converge alors sa limite est unique.

* on introduit aussi la notion d'ensemble fermé via le complémentaire.

A est dit fermé dans X si $X \setminus A \equiv C_X^A$ est ouvert.

X et ϕ sont ouverts et fermés simultanement.

Pour une topologie discrète, tout ouvert est fermé

* la fermeture de $A \subset X$ notée $\overline{A}$ est le plus petit des fermés contenant A.
* A est dit dense dans X si $\overline{A} = X$.

Example: $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ $\quad \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$

⑤ un espace topologique X est dit séparable si $\exists$ un ensemble dénombrable $A \subset X$ dense dans X $(\bar{A} = X)$.

<u>Exemple</u> : $\mathbb{R}$ est séparable ; $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ et $\mathbb{Q}$ dénombrable.

<u>Compacité</u> :

<u>Déf</u> : un espace métrique est dit compact si de chaque suite de points de X, $\{x_n\}$ on peut extraire une sous suite $\{x_{k_n}\}$ $k_1 < k_2 < \dots k_n$ qui converge dans X. $\lim\limits_{n \to \infty} x_{k_n} = x$.

<u>exemple</u> : soit X l'intervalle fermé $a \leq X \leq b$ $(a, b < \infty)$ du théorème Bolzano-Weierstrass : de chaque suite infinie bornée on peut extraire une sous suite convergente. X est alors compact.

En général, dans $\mathbb{R}^n$, X est compact ssi X borné et fermé.

* on dit qu'une famille $\{\mathcal{U}_i\}$ est un recouvrement de $A \subset X$ si $\bigcup\limits_i \mathcal{U}_i = A$.

<u>Déf</u> : un espace topologique de Hausdorff X est dit compact si pour tout recouvrement d'ouverts de X on peut en extraire un recouvrement fini de X.

6 **Exemple** : un espace topologique discret est compact que s'il est fini. S'il est infini $X = \bigcup_{x \in X} \{x_i\}$ et on ne peut extraire un recouvrement fini.

S^n sphère de $\mathbb{R}^{n+1}$ est compacte puisque elle est définie par : $\sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1$ donc $\forall x_i \; 0 \leq x_i \leq 1$. borné fermé de $\mathbb{R}^{n+1}$!

Déf : Un espace topologique est localement compact si chaque point a un voisinage compact.

* Un espace compact est localement compact
* Un espace discret est localement compact
* $\mathbb{R}$ est localement compact puisque $\forall x \in \mathbb{R}$ $x \in]x-\varepsilon, x+\varepsilon[= S(x,\varepsilon)$ et $\bar{S}(x,\varepsilon)$ est compact.

* un espace vectoriel X sur $\mathbb{K}$ et une topologie τ sur X est dit espace vectoriel topologique si $x+y$ et $\lambda . x$ sont des applications continues au sens de la topologie τ.

II) groupes topologiques :

Déf : un groupe topologique est un ensemble G tel que :

1. G est un groupe abstrait
2. G est un espace topologique
3. $x.y$ et x^{-1} ($G \times G \to G$, ~~...~~ $G \to G$) sont continues.

Exemple : $\mathbb{R}$ est un groupe topologique en général, $\mathbb{R}^n$.

(3) exprime une compatibilité de (1) avec (2)

Exemple de non compatibilité

Soit le groupe cyclique d'ordre 3 : $C_3 = \{1, x, x^2\}$

Définissons la topologie suivante sur C_3 :

$\{\phi, \{1\}, \{x\}, \{1, x\}, C_3\}$

la fonction $g(x) = x^{-1}$ transforme $x^2 \to x$ et $x \to x^2$ g n'est continue et par conséquent C_3 n'est pas un groupe topologique

8

<u>Définition</u> Soit G un groupe topologique, $H \subset G$ est dit sous groupe topologique si

* H est sous groupe de G
* H est un fermé de la topologie de G.

<u>Exemple</u> Soit $GL(n,\mathbb{R}) = \{$matrices réelles $(n\times n)$ / $\det g \neq 0\}$

paramétrisons les élements de $GL(n,\mathbb{R})$ par les élements de matrice : $x = \{x_{ik}\}$ $x_{ik} \in \mathbb{R}$

de cette manière $GL(n,\mathbb{R})$ est un sous ensemble de $\mathbb{R}^{n^2}$ et choisissons sur $GL(n,\mathbb{R})$ la topologie induite par $\mathbb{R}^{n^2}$.

Pour $x, y \in G$ on a $xy = z \in G$

avec $z_{ik} = \sum_j x_{ij} y_{jk}$ qui est une fonction continue

et $x \in G$ on a $x^{-1} = z \in G$

$$z_{ik} = \frac{\tilde{x}_{ik}}{\det x}$$ qui est une fonction continue

d'où $GL(n,\mathbb{R})$ doté de la topologie de $\mathbb{R}^{n^2}$ est un groupe topologique

(9) Soit $G_1 \subset GL(n, \mathbb{R})$ défini par

$$G_1 = \{ \lambda \mathbb{1} \ , \ \lambda \in \mathbb{R}^* \}$$

Il n'est pas difficile de s'assurer que

$x^{-1} G_1 x \in G_1$ $\quad$ G_1 est un sous groupe invariant de $GL(n, \mathbb{R})$

G_1 est un sous groupe topologique de $GL(n, \mathbb{R})$

* G_1 s-groupe de $GL(n, \mathbb{R})$
* G_1 est un fermé de la topologie

$$O(n) = \{ x \in GL(n, \mathbb{R}) \ / \ x^T = x^{-1} \ (x^T x = 1) \}$$

$O(n)$ est un s-groupe de $GL(n, \mathbb{R})$

$O(n)$ est un fermé :

Soit $f : x \to x^T x = e$

$$f^{-1}(e) = O(n)$$

e est fermé comme f est continue

$$f^{-1}(e) \text{ fermé} = O(n)$$

$O(n)$ est un s-groupe topologique de $GL(n, \mathbb{R})$

(10) $GL(n, \mathbb{C}) = \{$ matrices complexes $(n \times n)$
$\det g \neq 0 \}$

Soit la topologie induite de $\mathbb{C}^{n^2}$ sur $GL(n, \mathbb{C})$; $x \in GL(n, \mathbb{C})$ paramétrisé par $x = \{x_{ik}\}$ $x_{ik} \in \mathbb{C}$

Sachant que xy continue et x^{-1} continue

$GL(n, \mathbb{C})$ est un groupe topologique

Définition Deux groupe topologique sont dits isomorphiques si

1. isomorphique en tant que groupe :
2. homéomorphes en tant qu'espaces topologiques (ouverts preservés)

Exemples

Soit $G_1 = \left\{ x = \begin{bmatrix} e^a & 0 \\ 0 & e^b \end{bmatrix} \quad a, b \in \mathbb{R} \right\}$

G_1 groupe topologique (montrer-le)

Soit $G_2 = \left\{ x = \begin{bmatrix} e^a & b \\ 0 & e^{-a} \end{bmatrix} \quad a, b \in \mathbb{R} \right\}$

G_2 groupe topologique (montrez-le

(1) G_1 est isomorphe à $\mathbb{R}^2$

G_2 " " à $\mathbb{R}^2$

$$f_1 : G_1 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$x \longrightarrow (a,b)$$

$$f_1(x_1 x_2) = (a_1+a_2, b_1+b_2) = f_1(x_1)+f_1(x_2)$$

f_1 bijective, f_1 et f_1^{-1} continues

$$G_1 \sim \mathbb{R}^2$$

$$f_2 : G_2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow (a,b)$$

$$f_2(x_1 x_2) = (a_1+a_2, b_1+b_2) = f_2(x_1)+f_2(x_2)$$

f_2 bijective, f_2 et f_2^{-1} continues.

$$G_2 \sim \mathbb{R}^2$$

<u>Remarque</u> Les groupes topologiques sont des exemples des Espaces homogènes:

<u>Def</u>: Un espace topologique X est homogène si pour toute paire $\{x, y \in X$, $\exists$ un homéomorphisme f de $X \to X$ / $y = f(x)$

(12) Un groupe topologique est homogène

$\forall x, y \in G \quad \exists a \in G \;/\; y = ax = f(x)$

$(a = y x^{-1})$

Cette application est continue et bijective

et $f^{-1}(x) = a^{-1} y$ est continue

Cette propriété d'homogénéité simplifie considérablement l'étude des groupes topologiques en la ramenant au voisinage de l'élément neutre.

Si G comme espace topologique a une propriété P alors on dit que le groupe topologique a la propriété P (compact, connexe, séparable, ...)

<u>Exemples</u>

Soit $O(n)$ on a $x^T x = e$

$x = \{x_{ik}\}$

$$x^T x \Big|_{ij} = \sum_{k=1}^{n} x_{ki}\, x_{kj} = \delta_{ij}$$

d'où on a : $\displaystyle\sum_{i,k=1}^{n} x_{ik}^2 = n$

qui est la sphère S^{n^2-1} de rayon $\sqrt{n}$

(13) La sphère étant un ensemble compact de $\mathbb{R}^{n^2}$

$O(n)$ est un groupe compact.

Soit $U(n) = \left\{ x \in GL(n, \mathbb{C}) \;/\; \underset{x^+ = x^{-1}}{x^+ x = 1} \right\}$

$U(n)$ s-groupe topologique de $GL(n, \mathbb{C})$

$$x^+ x \Big|_{ij} = \sum_{k=1}^{n} x^*_{ki} x_{kj} = \delta_{ij}$$

on a $$\sum_{i,k=1}^{n} |x_{ik}|^2 = n$$

$|x_{ik}| \leq \sqrt{n} \qquad \forall x_{ik}$

d'où $U(n)$ groupe compact.

$GL(n, \mathbb{R})$ est non compact :

$$f : x \to \det x$$

$\{0\}$ étant fermé dans $\mathbb{R}$ $\quad f^{-1}(0)$ est alors fermé dans $\mathbb{R}^{n^2}$

$$\complement_{\mathbb{R}^{n^2}} f^{-1}(0) = GL(n, \mathbb{R}) \text{ ouvert}$$

En fait, $GL(n, \mathbb{R})$ est localement compact

(14) $SU(2) = \{ x \in GL(2, \mathbb{C}) \ / \ \underset{x^+ = x^{-1}}{x^+ x = 1}, \det x = 1 \}$

$$x = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad a, b, c, d \in \mathbb{C}$$

$$x^+ = \begin{pmatrix} a^* & c^* \\ b^* & d^* \end{pmatrix} \qquad x^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$d = a^* \qquad c = -b^*$$

$$x = \begin{pmatrix} a & b^* \\ -b^* & a^* \end{pmatrix} \qquad \det x = |a|^2 + |b|^2 = 1$$

SU(2) groupe Compact

en plus, $a = \alpha + i\beta$ $b = \gamma + i\delta$ on a

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = 1$$

L'Eq de S^3 de $\mathbb{R}^4$ Connexe (simplement)

SU(2) est simplement Connexe.

Mesure de Haar

Sur un groupe topologique on peut introduire la notion d'intégration. Cette notion nécessite quelques notions préliminaires de la théorie de la mesure (Radon). Une mesure de Haar est une mesure de Radon invariante sur le groupe positive

G est un groupe localement compact.

(15) Soit $C_0(G)$ Espace des fonctions continues sur G ayant un support compact

Soit $C_0^+(G)$ espace des fonctions continues sur G ~~diff~~ à valeurs positives ayant un support compact.

μ une mesure de Radon : positive

une forme définie ~~positive~~ sur $C_0(G)$ telle que

$$\mu(f) \geq 0 \qquad f \in C_0^+(G)$$

invariance gauche sur G

$$\mu(f(g^{-1}x)) = \mu(f(x)) \quad \forall g \in G$$

invariance droite

$$\mu(f(xg)) = \mu(f(x)) \quad \forall g \in G$$

en général $\mu(f(xg)) = \mu(f(g^{-1}x))$

<u>Exemples:</u>

$$SL(2, \mathbb{C}) = \{ x \in GL(2, \mathbb{C}) \;/\; \det x = 1 \}$$

$$x = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

Surface dans $\mathbb{C}^4$

$$d\alpha\, d\beta\, d\gamma\, d\delta = d\Omega \quad + \text{ Contrainte}$$

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

(16)

$$(\alpha,\beta,\gamma,\delta) \longrightarrow (\alpha\delta-\beta\gamma,\beta,\gamma,\delta)$$

$$d\alpha\, d\beta\, d\gamma\, d\delta = \frac{1}{\delta}\, d(\alpha\delta-\beta\gamma)\, d\beta\, d\gamma\, d\delta$$

Pour $\alpha\delta-\beta\gamma=1$ on choisit

$$d\omega = \frac{1}{\delta}\, d\beta\, d\gamma\, d\delta$$

Si on change $x \to gx$ $\forall g \in SL(2,\mathbb{C})$

$d\omega$ reste invariant et alors

$$d\omega\, d\omega^* = \frac{1}{|\delta|^2}\, d\beta\, d\beta^*\, d\gamma\, d\gamma^*\, d\delta\, d\delta^*$$

est une mesure de Haar sur $SL(2,\mathbb{C})$.

Groupes de Lie

Notions sur les variétés différentiables

Soit M un espace de Hausdorff. Sur M on peut définir une carte comme suite:

La paire (U, φ) où U est un ouvert de M et φ un homeomorphisme de U vers un ouvert de $\mathbb{R}^n$ (Espace Euclidien de dim n).

n est dit dimension de la carte et U domaine de la carte. En quelques sortes, la carte est un système de coordonnées local dans M par rapport à φ.

Un espace de Hausdorff est dit localement euclidien si en chaque point $p \in M$ il existe une carte (U, φ) (où U voisinage de p) en p.

Cet espace est dit ~~espace~~ variété topologique

Exemple: $\mathbb{R}^n$, S^n, $O(n)$ sont des variétés topologiques.

18

Application différentiable et analytique

Soit S et S' deux ouverts de $\mathbb{R}^n$

ψ une application de $S \to S'$

$x^i(p)$ coordonnées de $p \in S$

$y^j(\psi(p))$ coordonnées de $\psi(p) \in S'$

ψ est dite différentiable si

$y^j(\psi(p))$ est une fonction infiniment différentiable

de $x^i(p)$ et on écrit $\psi \in C^\infty(S)$

Et elle dite analytique si $\forall p \in S$

$\exists$ un voisinage U_p / $\forall q \in U_p$

$y^j(\psi(p))$ ~~peut~~ se développe en série convergente

de $x^i(q) - x^i(p)$.

Atlas:

une structure différentielle ou atlas de classe C^∞ sur un espace de Hausdorff M est une collection de cartes $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ sur M vérifiant :

1°) $M = \bigcup_\alpha U_\alpha$ (recouvrement de M)

2°) $\forall \alpha, \beta$ $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ est une application différentiable de $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$
(Compatibilité des carte)

Ainsi une carte $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ constitue un système de coordonnées local de la variété M.

$$\varphi_\alpha : M \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$p \longrightarrow \varphi_\alpha(p) = (x^1(p), x^2(p) \ldots x^n(p))$$

une structure analytique se définie de la même manière où l'on remplace différentiabilité par analyticité

une variété différentiable (analytique) de dimension n est un espace de Hausdorff M muni d'une structure différentiable (analytique) de dim.

(20) Exemples:

* $\mathbb{R}^n$ est une variété analytique :

$(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ est défini par $U_\alpha = \mathbb{R}^n$

$\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^n$

$p \to \varphi_\alpha(p) = (x^1(p), \dots, x^n(p))$

* $S^2 = \{ x^2+y^2+z^2 = 1,\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \}$

pôle sud $S:(0,0,-1)$ projection stéréographique

$M \in S^2 \longrightarrow M' \in \mathbb{R}^2$ (x-y plan)

projection partant du pôle sud S passant par M et rencontrant le plan x-y en M'

si (x,y,z) coordonnés de $p \in S^2$ $(p \neq S)$

ses coordonnés ~~sur~~ la projection sont

$\left(\frac{x}{1+z}, \frac{y}{1+z} \right)$ de cette manière

S^2 est une variété analytique.

(22) Remarque :

Une variété analytique complexe se définit de la même manière où l'on remplace $\mathbb{R}^n$ par $\mathbb{C}^n$ et l'analyticité réelle devient une analyticité complexe.

Groupes de Lie

Définition

Un groupe abstrait G est dit groupe de Lie si

(1) G est une variété ~~s~~analytique

(2) ~~les~~ applications $x \cdot y$ et x^{-1} sont analytiques.

Un groupe de Lie est alors un groupe topologique puisque la structure de variété induit avec elle la structure topologique et en plus $x \cdot y$ et x^{-1} sont continues

(22) Par ailleurs, puisque une variété analytique est homéomorphe à $\mathbb{R}^n$ localement et $\mathbb{R}^n$ est localement compact alors tout groupe de lie est localement compact.

Exemples:

* Le groupe additif $\mathbb{R}^n$ associé à la variété $\mathbb{R}^n$ est un groupe Lie puisque

$$x+y \quad \text{et} \quad -x \quad \text{sont analytiques}$$

* $GL(n, \mathbb{R}) = \{ x^{ij} \in \mathbb{R}^{n^2} \; / \; \det x \neq 0 \}$

$$\varphi : x \longrightarrow \det x \quad \text{Continue}$$

$\{0\}$ fermé alors $\varphi^{-1}(0)$ est fermé. $GL(n, \mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathbb{R}^{n^2}$ et il est en plus une sous variété analytique de $\mathbb{R}^{n^2}$. Par ailleurs,

$$z^{ij} = (x \cdot y)^{ij} = \sum_k x^{ik} y^{kj}$$

$$z^{-1} = \frac{(\tilde{z})^T}{\det z}$$

sont analytiques.

$GL(n, \mathbb{R})$ Groupe de lie

<u>Définition</u> : Soit G un groupe de lie.

$H \subset G$ est dit S-groupe de lie de G

si

① H est S-groupe abstrait de G

② H S-variété analytique de G.

<u>Définition</u> :

G est un groupe de lie complexe si

① G est une variété complexe

② $x.y$ et x^{-1} sont des applications complexe analytiques

<u>exemples</u> : $GL(m, \mathbb{R})$ S-groupe de lie de $GL(n, \mathbb{R})$ $m \leq n$

$GL(n, \mathbb{C}) = \{ x^{ij} \in \mathbb{C}^{n^2} \, / \, \det x \neq 0 \}$

est un groupe de lie complexe

$x.y$ et x^{-1} sont des fonctions complexes analytique

(24) ## ~~fonction~~ de composition dans un groupe de Lie

Soit $e =$ élément neutre de G

(U_e, φ) une carte de G au point e.

pour $p \in U_e$ notons les coordonnées

$$\left(x^1(p), x^2(p) \ldots x^n(p)\right) = \varphi(p) \in \mathbb{R}^n$$

Soit g_1 et $g_2 \in U_e$ on a

$$\left(x^1(g_1), \ldots\ldots x^n(g_2)\right) \equiv \left(x^1, x^2, \ldots x^n\right) \in \mathbb{R}^n$$

$$\left(x^1(g_2), \ldots x^n(g_2)\right) = \left(y^1, y^2, \ldots y^n\right) \in \mathbb{R}^n$$

Supposons $g_1 g_2 \in U_e$ on a alors

$$\left(x^1(g_1 g_2), x^2(g_1 g_2) \ldots x^n(g_1 g_2)\right)$$

$$= \left(z^1, z^2, \ldots z^n\right)$$

$$z^i = f^i\left(x^1, x^2, \ldots x^n, y^1, \ldots y^n\right)$$

$f^i(x, y)$ ~~soit~~ dite les fonctions de Composition de G.