25

exemple :

Soit $GL(n,\mathbb{R})$ groupe de Lie

une carte de $GL(n,\mathbb{R})$ est la carte

naturelle $\quad x^i(g) \equiv g^{jk}$ $\quad i = 1 — n^2$, $jk = 1 — n$

$$x^j(g_1 g_2) = g_1^{lk} g_2^{kj} = (g_1 g_2)^{lj}$$

$$f^{lj}(x,y) = \sum_k g_1^{lk} g_2^{kj}$$

Les fonctions de composition vérifient :

$$f^i(x,e) = x^i \qquad f^j(e,y) = y^j$$

$$\left.\frac{\partial f^j}{\partial x^i}\right|_{(e,e)} = \delta^j_i = \left.\frac{\partial f^j}{\partial y^i}\right|_{(e,e)}$$

Les Constantes de structures

Soit G un groupe de Lie, (V_e, φ) une carte au point e avec $\varphi(e) = 0$. Considérons le developpement de Taylor de $f^i(x,y)$ au point $x = y = 0$

26

<u>on a</u>

$$f^i(x,y) = f^i(0,0) + \left.\frac{\partial f^i}{\partial x_k}\right|_{(0,0)} x^k + \left.\frac{\partial f^i}{\partial y_k}\right|_{(0,0)} y^k + \left.\frac{\partial^2 f^i}{\partial x^j y^k}\right|_{(0,0)} x^j y^k + \cdots$$

on sait que $f^i(x,0) = x^i$ d'où $f^i(0,0) = 0$
$= f^i(0,x)$

et $\left.\dfrac{\partial f^i}{\partial x_k}\right|_{(0,0)} = \delta^i_k$ d'où on tire

$$f^i(x,y) = x^i + y^i + a^i_{jk} x^j y^k + \cdots$$

avec $a^i_{jk} = \left.\dfrac{\partial^2 f^i}{\partial x^j \partial y^k}\right|_{(0,0)}$

on appelle Constantes de structure les nombres :

$$C^i_{jk} = a^i_{jk} - a^i_{kj}$$

ces constantes de structure vérifient

27

(1) $C^i_{jk} \equiv$ nombre réelle (Complexes)

(2) $C^i_{jk} = - C^i_{kj}$

$$C^i_{jk} = \frac{\partial f^i}{\partial x^j \partial y^k}\Big|_{(0,0)} - \frac{\partial f^i}{\partial x^k \partial y^j}\Big|_{(0,0)} = -\left(\frac{\partial f^i}{\partial x^k \partial y^j} - \frac{\partial f^i}{\partial x^j \partial y^k}\right)\Big|_{(0,0)}$$

$$= - C^i_{kj}$$

(3) $C^i_{jk} C^k_{\ell m} + C^i_{\ell k} C^k_{mj} + C^i_{mk} C^k_{j\ell} = 0$

(identité de Jacobi)

En effet : en utilisant l'associativité du groupe

$(g_1 g_2) g_3 = g_3 (g_1 g_2)$ on a :

$f(f(x,y),z) = f(x, f(y,z))$

ce qui permet l'identification

$$a^i_{jk} \, a^k_{\ell m} = a^i_{km} \, a^k_{j\ell}$$

ce qui donne l'identité de Jacobi

(4) Pour un groupe commutatif $C^i_{jk} = 0$

(28) $f(x,y) = f(y,x)$ et d'où $a^i_{jk} = a^i_{kj}$ ou bien

$$C^i_{jk} = 0$$

<u>Exemple</u> $GL(n, \mathbb{R})$ Soit (U_e, φ)

$\varphi(g)$ pour $g \in U_e$ est donné par

$$\varphi(g) = g_{ij} - \delta_{ij} \in \mathbb{R}^{n^2}$$

on a : $\varphi(e) = 0$

$$x^{ij}(g) = g_{ij} - \delta_{ij} \in \mathbb{R}^{n^2}$$

$$x^{ij}(g_1 g_2) = \sum_k (g_1)_{ik} (g_2)_{kj} - \delta_{ij}$$

$$= (x^{ik}(g_1) + \delta_{ij})(x^{kj}(g_2) + \delta_{kj}) - \delta_{ij}$$

$$= \sum_k x^{ik}(g_1) x^{kj}(g_2) + x^{ij}(g_1) + x^{ij}(g_2)$$

$$f^{ij}(x,y) = \sum_k x^{ik} y^{kj} + x^{ij} + y^{ij}$$

$$\left.\frac{\partial^2 f^{ij}}{\partial x^{kl} \partial y^{mn}}\right|_{\substack{x=0\\y=0}} = \delta^i_k \, \delta_{lm} \, \delta^j_n = a^{ij}_{kl,mn}$$

$$C^{ij}_{kl,mn} = a^{ij}_{kl,mn} - a^{ij}_{mn,kl} = \delta^i_k \delta_{lm} \delta^j_n - \delta^i_m \delta_{nk} \delta^j_l$$

Ces constantes de structure coïncident avec ceux de l'algèbre de Lie $gl(n,\mathbb{R})$.

Algèbre de Lie d'un groupe de Lie

Espace tangent à une variété

Soit M une variété analytique de dim n et p un point de M. On note $A(p)$ la classe des fonctions analytiques en p (algèbres de foncts analytiques)

On appelle vecteur tangent en p une application

$$L : A(p) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$f \longrightarrow L(f)$$

telle que :

① $L(\alpha f + \beta g) = \alpha L(f) + \beta L(g)$

② $L(fg) = L(f)\, g + f\, L(g)$

L'espace des vecteurs tangents muni des opérations :

$$(L + L')(f) = L(f) + L'(f)$$
$$(\alpha L)(f) = \alpha L(f)$$

est un espace vectoriel dit espace tangent à M en p.

qu'on note $T_p M$.

La définition de l'espace tangent est locale qui ne fait intervenir que l'algèbre des fonctions analytique en ce point p. Par conséquent,

$$T_p M \equiv T_p U$$

U ~~voisinage~~ ouvert contenant p vu comme sous-variétés de M.

<u>Exemple</u> Soit $\mathbb{R}^n$ variété analytique. $A(p)$ l'algèbre des fonctions analytiques à n variables $(x_1, x_2, \dots x_n)$. on définit les applications

$$\frac{\partial}{\partial x_i} : A(p) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$f \longrightarrow \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{x(p)}$$

il est facile de voir que $\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_{x(p)}$ sont des vecteurs tangents $\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_{x(p)} \in T_p \mathbb{R}^n$

Soit X_p un vecteur tangent $X_p \in T_p \mathbb{R}^n$

f au voisinage de p peut s'écrire comme

$$f(x) = f(p) + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{x(p)} (x_i - x_i(p))$$

$$X_p(f) = X_p(f(p)) + \sum_{i=1}^{n} X_p\left(x_i - x_i(p)\right)\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big)_p$$

or $X_p(\text{cte}) = 0$ d'où

$$X_p(f) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i}\Big)_p\right)(f)$$

c'est à dire $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p\right\}$ constituent une base de $T_p \mathbb{R}^n$.

Avec cette notion d'espace tangent construisons la notion d'Algèbre de Lie associé au groupe de Lie.

<u>algèbre de Lie</u> :

Soit $T(e)$ l'algèbre des fonctions differentiables de classe C^1 au voisinage de l'élément neutre

Soit $x(t)$ un courbe representant un homomorphisme de classe C^1 : $[a,b] \longrightarrow G$

$$x(t+s) = x(t)x(s) \qquad x(0) = e$$

$x(t)$ forment un s groupe à un paramètre de G

(32) On définit le vecteur tangent à la courbe $x(t)$ par :

$$A : T(e) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$f \longrightarrow Af = \left.\frac{d f(x(t))}{dt}\right|_{t=0}$$

$A \in T_e G$ et on a

$$Af = \left.\frac{d f(x(t))}{dt}\right|_{t=0} = \sum_{i=1}^{n} \left.\frac{dx^i}{dt}\right|_{t=0} \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{x=e}$$

posons : $\left.\frac{dx^i}{dt}\right)_{t=0} = a^i$ ce sont

les composantes du vecteur tangent A à G en l'élément neutre e. En plus on a au voisinage de e $x(t) = e + At$

les vecteurs tangents à G en e forment un espace vectoriel dit espace tangent à G en e $T_e G$. Nous convertissons cet espace en une algèbre de Lie en le munissant de la structure de Lie $C \equiv [A, B] = C^i_{jk} a^j b^k$

cette algèbre de Lie obtenue est dite algèbre de Lie associée au groupe de Lie.

33 exemple : $* \; T_{Id} GL(n, \mathbb{R}) = gl(n, \mathbb{R})$

Soit $X(t)$ une courbe dans $GL(n, \mathbb{R})$ / $A(0) = Id$

$$\frac{d}{dt} X(t) \Big|_{t=0} \in M(n, \mathbb{R})$$

$$x(t) = \mathbb{1} + Xt \qquad X \in M(n, \mathbb{R})$$

montrons que $x(t) \in GL(n, \mathbb{R})$ (pour $t \ll 1$)

on sait que $1 + X$ est inversible pour $\|X\| < 1$

$$(1+X)(1 - X + X^2 - X^3 + \ldots) = \mathbb{1}$$

$1 + Xt$ est inversible pour $(t \ll 1)$ tel que

$\|tX\| < 1$ d'où

$$T_{Id} GL(n, \mathbb{R}) = M(n, \mathbb{R})$$

$$* \quad T_{Id} SL(n, \mathbb{R}) = sl(n, \mathbb{R})$$

Soit $x(t)$ une courbe dans $SL(n, \mathbb{R})$

$x(0) = \mathbb{1} = Id$. Soit $\frac{dx(t)}{dt}\Big|_{t=0} = A$

montrons que $\operatorname{tr} A = 0$

(34) On a :

$$\det x(t) = \mathbb{1}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\det x(t)\right) = \mathrm{Tr}\,\frac{d}{dt}x(t)$$

d'où : $\mathrm{Tr}\, A = 0$

$$x(t) = \mathbb{1} + At.$$

$$\det x(t) = \det(\mathbb{1} + tA) = \mathbb{1} + t\,\mathrm{Tr}\,A + O(t^2)$$

$$\det x(t) = 1 \qquad t \ll 1$$

$$x(t) \in SL(n, \mathbb{R})$$

$$T_{Id}\, SL(n,\mathbb{R}) = \mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$$

Remarque: En fait on a :

$$A = \frac{dx(t)}{dt} \qquad \text{avec } x(0) = \mathbb{1}$$

Ce qui permet d'écrire

$$x(t) = e^{At}.$$

Groupes solvables, nilpotents, simples et semi-simples

Soit G un groupe abstrait. On appelle commutateur de deux éléments $x, y \in G$ l'élément

$q = x y x^{-1} y^{-1} \in G$. Soit Q l'ensemble

de tous les éléments $g \in G \,/\, g = q_1 q_2 \cdots q_m$

avec q_i un commutateur de deux éléments $x_i, y_i \in G$

On l'appelle le commutant de G noté $[G, G]$
(dérivé de G) $\equiv D(G)$

Q le commutant de G est sous groupe invariant

de G.

① $g_1, g_2 \in Q$ alors $g_1 g_2 = g \in Q$.

② $g \in Q$ $\quad g^{-1} = q_m^{-1} \cdots q_1^{-1}$ avec

$q_i = x_i y_i x_i^{-1} y_i^{-1} \quad q_i^{-1} = y_i x_i y_i^{-1} x_i^{-1}$

$g^{-1} = \bar{q}_1 \bar{q}_2 \cdots \bar{q}_m \in Q$.

③ Si $x \in G$ alors $x^{-1} g x = x^{-1} q_1 q_2 \cdots q_m x$
$= \prod_{i=1}^{m} x^{-1} q_i x = \prod_{i=1}^{m} x^{-1} x_i x \, x^{-1} y_i x \, x^{-1} x_i^{-1} x \, x^{-1} y_i^{-1} x \in Q$

36 En général, Q n'est pas un S groupe topologique. $\bar{Q}$ représent un S-groupe topologique invariant de G.

le groupe quotient G/Q est un groupe abélien. Pour $x, y \in G$, xQ et $yQ \in G/Q$

$$xQyQx^{-1}Qy^{-1}Q = xyx^{-1}y^{-1}Q = qQ = Q$$

$$\forall\ X\ Y \in Q \qquad XYX^{-1}Y^{-1} = e$$

$$XY = YX \qquad G/Q \text{ Commutatif}$$

Soit la chaine des Commutant suivante.

$$G = Q_0 \supset Q_1 \supset Q_2 \supset \cdots \supset Q_{n-1} \supset Q_n$$

Q_n Commutant Q_{n-1} $\left\{ \begin{array}{l} Q_n = D(D^{n-1}(G)) \\ D^0(G) = G \end{array} \right.$

Si pour un certain m $Q_n = \{e\}$

le groupe est dit Soluble

et on a la propriété: Si $H \subset G$ S-groupe alors $(Q_H)_n \subset Q_n$

(37) Le s-groupe d'un groupe solvable est solvable

* Un groupe solvable a en général un s-groupe invariant commutatif : $G_m = \{e\}$ $G_{m-1} \neq \{e\}$

$$x y x^{-1} y^{-1} \in G_m = \{e\} \quad x, y \in G_{m-1}$$

d'où $xy = yx$ $\quad x, y \in G_{m-1}$

<u>exemple</u> : Soit le groupe de déplacement du plan $\mathbb{R}^2$

$$g = (a, \Lambda) \equiv \begin{pmatrix} \Lambda & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$g_1 g_2 = (a_1, \Lambda_1)(a_2, \Lambda_2) = (a_1 + \Lambda_1 a_2, \Lambda_1 \Lambda_2)$$

a l'élément de déplacement

Λ l'élément de rotation

$$x \longrightarrow \bar{x} = \Lambda x + a$$

$$\bar{x} \longrightarrow \bar{\bar{x}} = \bar{\Lambda} \bar{x} + \bar{a}$$

$$= \bar{\Lambda}(\Lambda x + a) + \bar{a}$$

$$= \bar{\Lambda} \Lambda x + \bar{\Lambda} a + \bar{a}$$

$$(\bar{a}, \bar{\Lambda})(a, \Lambda) = (\bar{a} + \bar{\Lambda} a, \bar{\Lambda} \Lambda)$$

ce groupe on le note : $T^2 \otimes SO(2)$

38

Notons $\varphi_0 = T^2 \rtimes SO(2)$

Calculons $\varphi_1 = \{ x y x^{-1} y^{-1} \ , x ; y \in \varphi_0 \}$

$(a, \Lambda)(a', \Lambda')(a, \Lambda)^{-1}(a', \Lambda')^{-1} = (a + \Lambda a' - a' - \Lambda' a, 1) \in T^2$

Calculons

$\varphi_2 = \{ x y x^{-1} y^{-1} \quad x , y \in T^2 \}$

$(a, 1)(a', 1)(a, 1)^{-1}(a', 1)^{-1} = (0, 1) = e$

d'où $T^2 \rtimes SO(2)$ solvable

T^2 est commutatif invariant.

Soit le commutateur suivant

$q = x y x^{-1} y^{-1} \quad x \in \varphi$ et $y \in G$

L'ensemble de tous les commutateurs $\{q_1 q_2 \cdots q_m = g\}$ forme un

s-groupe invariant de G noté $K = [\varphi, G) = [[G,G], G] = (D(G), G)$

$g_1 g_2 = q_1 q_2 \cdots q_m \bar{q}_1 \bar{q}_2 \cdots \bar{q}_n \in K$

$g^{-1} = q_m^{-1} q_{m-1}^{-1} \cdots q_2^{-1} q_1^{-1}$ avec $q^{-1} = y x y^{-1} x^{-1}$

on a : $y x = \bar{x} y \quad y^{-1} x^{-1} = \bar{\bar{x}} y^{-1}$

(39)

$$g^{-1} q g = \prod_i g^{-1} q_i g = \prod_i g^{-1} x_i g \, g^{-1} y_i g \, g^{-1} x_i^{-1} g \, g^{-1} y_i^{-1} g \in K.$$

On forme la séquence :

$$G = K_0 \equiv D^{(0)}(G)$$

$$K_1 = [D(G), G] = [D(K_0), G] \equiv D^{(1)}(G)$$

$$K_2 = [D(K_1), G] = D^{(2)}(G)$$

$$G = D^{(0)}(G) \supset D^{(1)}(G) \supset \dots \supset D^{(n)}(G)$$

Si pour $m \geq 1$ $\quad D^{(m)}(G) = \{e\}$

le groupe G est dit nilpotent

tout S-groupe d'un groupe nilpotent est nilpotent

et comme $D^{(m)}(G) \supseteq D^{m}(G)$

on a alors tout groupe nilpotent est soluble

* Un groupe de Lie est simple si "il n'a pas de S-groupe de Lie (propre) connexe invariant"

* Un groupe de Lie est dit semi simple si "il n'a pas de S-groupe de Lie (propre) connexe invariant abélien".

1

Algèbres de Lie

Définition et propriétés :

Soit $\mathcal{L}$ un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On dit que $\mathcal{L}$ est une algèbre de Lie sur $\mathbb{K}$ s'il existe une loi :

$$\mathcal{L} \times \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}$$
$$(x, y) \longrightarrow [x, y]$$

telle que :

$$[\alpha x + \beta y, z] = \alpha [x, z] + \beta [y, z] \quad \text{"linéarité"}$$

$$[x, y] = -[y, x] \quad \text{"antisymétrie"}$$

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$$

'identité' de Jacobi dite associativité de Jacobi

Le crochet $[\,,\,]$ est dit multiplication de Lie. D'après l'identité de Jacobi, la multiplication de Lie est en général non associative.

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ on dit que $\mathcal{L}$ est une algèbre de Lie réelle et si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ $\mathcal{L}$ est dite algèbre de Lie complexe. Si $[x, y] = 0$ $\forall x, y$ $\mathcal{L}$ est dite algèbre de Lie commutative.

② Soient $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux sous espaces de $\mathcal{L}$. on note $[\mathcal{M}, \mathcal{N}]$ l'ensemble des éléments $[x, y]$ $x \in \mathcal{M}$ et $y \in \mathcal{N}$, on a alors les propriétés suivantes

$$[\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2, \mathcal{N}] \subset [\mathcal{M}_1, \mathcal{N}] + [\mathcal{M}_2, \mathcal{N}]$$

$$[\mathcal{M}, \mathcal{N}] = [\mathcal{N}, \mathcal{M}]$$

$$[\mathcal{L}, [\mathcal{M}, \mathcal{N}]] \subset [\mathcal{M}, [\mathcal{N}, \mathcal{L}]] + [\mathcal{N}, [\mathcal{L}, \mathcal{M}]]$$

En effet les propriétés de linéarité, d'antisymétrie et l'associativité de Jacobi permettent de les montrer facilement.

Un sous espace $\mathcal{N}$ de $\mathcal{L}$ est sous algèbre si

$$[\mathcal{N}, \mathcal{N}] \subset \mathcal{N}.$$

Un sous espace $\mathcal{N}$ de $\mathcal{L}$ est dit idéal si

$$[\mathcal{L}, \mathcal{N}] \subset \mathcal{N}$$

Un idéal est automatiquement sous algèbre.

Si $[\mathcal{L}, \mathcal{N}] = 0$ $\mathcal{N}$ est idéal maximum qu'on appelle en général centre de $\mathcal{L}$.

Le centre de $\mathcal{L}$ est une sous algèbre commutative

(3) Soit $\{e_n\}$ une base de $\mathcal{L}$, on a :

$$[x,y]^i = c_{jk}^{\ i}\, x^j y^k$$

avec $\quad [e_j, e_k] = C_{jk}^{\ i}\, e_i$

$C_{jk}^{\ i}$ constantes de structure. $n \equiv$ dim de l'algèbre $\mathcal{L}$. L'anti-symétrie s'exprime comme

$$C_{jk}^{\ i} = -C_{kj}^{\ i}$$

et l'identité de Jacobi comme

$$C_{is}^{\ p} C_{jk}^{\ s} + C_{js}^{\ p} C_{ki}^{\ s} + C_{ks}^{\ p} C_{ij}^{\ s} = 0$$

l'existance de sous algèbres et de l'idéal se reflète par des restrictions sur les coefficients $C_{jk}^{\ i}$:

(1) sous algèbre : $[\mathcal{N}, \mathcal{N}] \subset \mathcal{N}$

$\mathcal{N}$ s-espace de $\mathcal{L}$ donc $\dim \mathcal{N} < \dim \mathcal{L}$

et par conséquent, $\{e_k\} \subset \{e_n\}$

ce qui donne $\quad C_{ij}^{\ s} = 0 \quad i,j \leq k$ et $s > k$

(2) idéal : $[\mathcal{L}, \mathcal{N}] \subset \mathcal{N}$

$$C_{ij}^{\ s} = 0 \qquad i \leq k \;, s > k \text{ et } j \text{ q'q.}$$

④ les constantes de structure $C_{ij}^{\ k}$ se transforment comme un tenseur de rang 3 deux fois covariant et une fois contravariant. En effet, soit le changement de base $\{e_i\} \longrightarrow \{e'_i\}$ / $e'_i = e_j S^j_{\ i}$

$$[e'_i, e'_j] = C'^{\ k}_{ij} e'_k = C'^{\ k}_{ij} S_k^{\ l} e_l$$

or

$$[e'_i, e'_j] = [S_i^{\ m} e_m, S_j^{\ p} e_p] = S_i^{\ m} S_j^{\ p} C_{mp}^{\ l} e_l$$

d'où on tire : $C'^{\ k}_{ij} S_k^{\ l} = S_i^{\ m} S_j^{\ p} C_{mp}^{\ l}$

ou bien $\quad C'^{\ k}_{ij} = S_i^{\ m} S_j^{\ p} S^{-1\,k}_{\ \ l} C_{mp}^{\ l}$

qui est en fait la règle de transformation des Tenseurs 2 fois covariant et 1 fois contravariant.

<u>Exemple</u> : Soit $\mathcal{L}$ l'ensemble des matrices 2x2, antihermitiennes de trace nulle.

$$\mathcal{A} \in \mathcal{L} : \mathcal{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \; / \; \begin{array}{l} \mathrm{Tr}\,\mathcal{A} = 0 \\ \mathcal{A}^+ = -\mathcal{A} \end{array}$$

nous avons alors $a + d = 0$, et, $a^* = -a \quad d^* = -d$

$b^* = -c \quad c^* = -b$ donc $a = -d$ a imaginaire pur

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} i\alpha & \gamma + i\delta \\ -\gamma + i\delta & -i\alpha \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$+ \delta \begin{bmatrix} 0 & i \\ +i & 0 \end{bmatrix} \qquad \alpha, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$$

(5) ou bien autrement,

$$\mathcal{R} = a e_1 + b e_2 + c e_3 \qquad a, b, c \in \mathbb{R}$$

On montre facilement que $\mathcal{L}$ est Espace vectoriel et par conséquent $\{e_1, e_2, e_3\}$ est une base, avec

$$e_1 = \tfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix} \quad e_2 = \tfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad e_3 = \tfrac{1}{2}\begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$$

on définit le produit de Lie par:

$$[\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2] = \mathcal{R}_1 \mathcal{R}_2 - \mathcal{R}_2 \mathcal{R}_1$$ dit commutateur

ce produit vérifie les 3 règles de l'algèbre de Lie. on a:

$$[e_i, e_j] = \varepsilon_{ijk} e_k$$

ε_{ijk} tenseur totalement antisymétrique $\varepsilon_{123} = 1$

$\mathcal{L}$ est une algèbre de Lie réelle de dim 3

Cette algèbre $\mathcal{L}$ est reliée à l'algèbre de Pauli notée $SU(2)$ par:

$$\sigma_k = 2i e_k \quad \text{et on a alors}$$

$$[\sigma_i, \sigma_k] = 2i\, \varepsilon_{ike}\, e_e$$

L'algèbre $su(2)$ est l'ensemble des matrices hermitiennes à trace nulle

⑥ su(2) est une algèbre réelle de dim 3

* Soit $\mathcal{L}$ Espace vectoriel des matrices $n\times n$ $\{a_{ij}\}$ défini sur $\mathbb{R}$. On munit $\mathcal{L}$ de la multiplication de Lie :

$$[A, B] = AB - BA$$

$\mathcal{L}$ est une algèbre de Lie réelle noté $gl(n, \mathbb{R})$ de dimension n^2. En effet, introduisons la base de Weyl $\{e_{ij}\}$ de la forme

$$(e_{ij})_{lk} = \delta_{il}\delta_{jk}$$

et on a alors

$$[e_{ij}, e_{kl}] = \delta_{jk}\, e_{il} - \delta_{il}\, e_{kj}$$

les constantes de structure sont :

$$C_{ij\,kl}^{\;sm} = \delta_i^s\, \delta_{jk}\, \delta_l^m - \delta_k^s\, \delta_{il}\, \delta_j^m$$

on considère dans cette algèbre l'ensemble des matrices antisymétriques $A^T = -A$ qu'on note $\mathcal{M}$

on a : $[\mathcal{M}, \mathcal{M}] \subset \mathcal{M}$ en effet

$$[A, B] = AB - BA \quad \text{et on a}$$

$$(AB - BA)^T = B^T A^T - A^T B^T$$
$$= -(AB - BA) \quad \text{donc} \in \mathcal{M}$$

⑦ $\mathcal{A}$ est une sous algèbre de $gl(n,\mathbb{R})$ notée $o(n)$.

* l'ensemble $\mathcal{N}$ des matrices $\lambda\mathbb{1}$ vérifie

$$[\, gl(n,\mathbb{R})\, ;\, \mathcal{N}\,] = 0$$

$\mathcal{N}$ est une sous algèbre de dim 1 contenu dans le centre de $gl(n,\mathbb{R})$.

* La sous algèbre $o(n)$ possède la base

$$\tilde{e}_{ij} = e_{ij} - e_{ji} \qquad (i<j)$$

En effet : $\mathcal{A}^T = -\mathcal{A}$ $\qquad a_{ij} = -a_{ji} \qquad a_{ii} = 0$

$$\mathcal{A} = \sum_{ij} a_{ij}\, e_{ij} = \sum_{i<j} a_{ij}\, e_{ij} + \sum_{i>j} a_{ij}\, e_{ij}$$

$$= \sum_{i<j} a_{ij}\, e_{ij} + \sum_{i<j} a_{ji}\, e_{ji}$$

$$= \sum_{i<j} a_{ij}\, (e_{ij} - e_{ji}) = \sum_{i<j} a_{ij}\, \tilde{e}_{ij}$$

$$[\tilde{e}_{ij}, \tilde{e}_{ke}] = [e_{ij} - e_{ji}, e_{ke} - e_{ek}]$$

$$= (\delta_{jk}\, e_{ie} - \delta_{ie}\, e_{kj}) - (\delta_{je}\, e_{ik} - \delta_{ik}\, e_{ej})$$

$$- (\delta_{ik}\, e_{je} - \delta_{je}\, e_{ki}) + (\delta_{ie}\, e_{jk} - \delta_{jk}\, e_{ei})$$

$$= \delta_{jk}\, \tilde{e}_{ie} - \delta_{ie}\, \tilde{e}_{kj} + \delta_{je}\, \tilde{e}_{ki} - \delta_{ik}\, \tilde{e}_{je} \; ??$$

(8) Extension complexe des algèbres de Lie :

Soit $\mathcal{L}$ un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, l'extension complexe de $\mathcal{L}$ notée $\mathcal{L}^c$ est l'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ des éléments $z = x + iy$ $\quad x \in \mathcal{L}$ et $y \in \mathcal{L}$ avec la multiplication γz définie comme

$\gamma = \alpha + i\beta \in \mathbb{C} \quad z \in \mathcal{L}^c$

$$\gamma z = (\alpha x - \beta y) + i(\alpha y + \beta x).$$

Si $\mathcal{L}$ est une algèbre de Lie réel, l'extension complexe $\mathcal{L}^c$ de $\mathcal{L}$ est :

(1) $\mathcal{L}^c$ est l'extension d'espace de $\mathcal{L}$

(2) $[z_1, z_2] = [x_1 + iy_1, x_2 + iy_2]$

$= [x_1, x_2] - [y_1, y_2] + i[x_1, y_2] + i[y_1, x_2]$

$\equiv z.$

Si $\mathcal{L}$ est une algèbre complexe de dim n elle est aussi algèbre réelle de dim $2n$

5 Les Algèbres A_n, B_n, C_n et D_n

* L'extension complexe $gl(n, \mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices complexes $n \times n$ notée $gl(n, \mathbb{C})$.

* L'ensemble des matrices complexes $n \times n$ de trace nulle une S-algèbre de $gl(n, \mathbb{C})$ notée

$Sl(n, \mathbb{C})$ ou A_{n-1}

* Soit $\Phi(\xi, \eta)$ une forme bilinéaire défini dans un espace vectoriel complexe de dim m

$$\Phi : V^m \times V^m \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$(\xi, \eta) \longrightarrow \Phi(\xi, \eta)$$

telle que : Φ linéaire / ξ et η

Soit X une transformation linéaire sur V^m

$$X : V^m \longrightarrow V^m$$
$$\xi \longrightarrow X\xi$$

et telle que : $\Phi(X\xi, \eta) + \Phi(\xi, X\eta) = 0$

$\forall \xi, \eta \in V^m$

Cette transformation génère une algèbre de Lie L.

(10) En effet : définissons $[X,Y] = XY - YX$

$$\Phi([X,Y]\xi,\eta) = \Phi((XY-YX)\xi,\eta)$$

$$= \Phi(XY\xi,\eta) - \Phi(YX\xi,\eta)$$

$$= -\Phi(\xi, XY\eta) + \Phi(\xi, YX\eta)$$

$$= -\Phi(\xi, [X,Y]\eta)$$

ie, $\Phi([X,Y]\xi,\eta) + \Phi(\xi,[X,Y]\eta) = 0$

donc si $X, Y \in \mathcal{L}$ $[X,Y] \in \mathcal{L}$

et comme le $[\,,\,]$ vérifie les propriétés de l'algèbre de Lie on a alors $\mathcal{L}$ comme algèbre de Lie

si on choisit une base de V^m, $\Phi(\xi,\eta)$ s'écrit

comme

$$\Phi(\xi,\eta) = \xi^i a_{ij} \eta^j$$

ξ^i, η^j sont les coordonnées de ξ et η / à la base

Φ est dite non singulière si $\det a \neq 0$.

Φ est symétrique si $a = a^T$

Φ est antisymétrique si $a = -a^T$

(11)

* Dans le cas de Φ non singulière et symétrique

$\mathcal{L}$ est dite Algèbre de Lie orthogonale.

Pour $m = 2n+1$ on la note par $O(2n+1, C)$ ou B_n
Pour $m = 2n$ on la note par $O(2n, C)$ ou D_n

* Dans le cas de Φ non singulière et antisymétrique

$\mathcal{L}$ est dite Algèbre de Lie symplectique

on sait que pour $m = 2n+1$ $\det a = 0$
Ainsi l'algèbre de Lie symplectique est realisée dans l'espace de dim paire $\mho^{2n}$

on le note $Sp(n, \mathbb{C})$ ou bien C_n

A_n, B_n, C_n et D_n sont dites Algèbres de Lie classiques complexes.

Somme directe d'Algèbres de Lie.

Soient $\{\mathcal{L}_k\}$ sous espaces de l'Algèbre de Lie $\mathcal{L}$ tels que la somme directe des $\mathcal{L}_k$ donne $\mathcal{L}$

$$\sum_k \dot{+} \mathcal{L}_k = \mathcal{L}$$ et si en plus

$$[\mathcal{L}_i, \mathcal{L}_i] \subset \mathcal{L}_i \quad \text{et} \quad [\mathcal{L}_i, \mathcal{L}_j] = 0$$

on dit alors que l'algèbre de Lie $\mathcal{L}$ est somme directe des algèbres de Lie $\mathcal{L}_k$ et on écrit

$$\sum_k \oplus \mathcal{L}_k = \mathcal{L}.$$

(12) Algèbre de Lie quotient

Soit $\mathcal{N}$ une sous algèbre de l'algèbre de Lie $\mathcal{L}$.
introduisons alors dans $\mathcal{L}$ la relation

$$x \equiv y \, [\mathcal{N}] \quad \text{si} \quad x - y \in \mathcal{N}$$

autrement dit, $x = y + n \quad n \in \mathcal{N}$

Cette relation est une relation d'équivalence

(1) $x \equiv x \, [\mathcal{N}]$

(2) $x \equiv y \, [\mathcal{N}]$ alors $y \equiv x \, [\mathcal{N}]$

(3) $x \equiv y \, [\mathcal{N}]$ et $y \equiv z \, [\mathcal{N}]$ alors $x \equiv z \, [\mathcal{N}]$.

Par conséquent, l'algèbre $\mathcal{L}$ se répartit en classes d'équivalence disjointes : $K_x = x + \mathcal{N}$
en général, l'ensemble des classes ne forme pas une algèbre de Lie car si

$$x_1 = y_1 + n_1 \qquad x_2 = y_2 + n_2$$

alors

$$[x_1, x_2] = [y_1, y_2] + [y_1, n_2] + [n_1, y_2] + [n_1, n_2]$$

donc $\quad [x_1, x_2] \not\equiv [y_1, y_2] \, [\mathcal{N}]$ en général

Mais si $\mathcal{N}$ est un idéal alors $[y_1, \mathcal{N}] \subset \mathcal{N}$ et on aura
$$[x_1, x_2] \equiv [y_1, y_2] \, [\mathcal{N}]$$

Le résultat est : L'ensemble $\mathcal{L}/\mathcal{N}$ est une algèbre de Lie dite algèbre de Lie quotient.

<u>Exemple:</u>

Soit l'algèbre de Poincarré $\mathcal{P}$ définie par

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = g_{\mu\rho} M_{\nu\sigma} + g_{\nu\sigma} M_{\mu\rho} - g_{\nu\rho} M_{\mu\sigma} - g_{\mu\sigma} M_{\nu\rho}$$

$$M_{\mu\nu} = - M_{\nu\mu}$$

$$[M_{\mu\nu}, P_\sigma] = g_{\nu\sigma} P_\mu - g_{\mu\sigma} P_\nu$$

$$[P_\mu, P_\nu] = 0$$

$$g_{\mu\nu} = (+,-,-,-) \qquad \mu, \nu = 0,1,2,3$$

Soit l'ensemble $t^4 = \{ x^\mu P_\mu \}$; il est facile de voir que t^4 est un idéal de $\mathcal{P}$. En effet,

$$[\mathcal{P}, t^4] \subset t^4$$

car $\quad [M_{\mu\nu}, P_\sigma] \in t^4$

Introduisons la relation d'équivalence

$$x \equiv y \; [t^4] \qquad x, y \in \mathcal{P}$$

$K_x = x + t^4$ l'ensemble des classes est

si $x = M_{\mu\nu}$ $\qquad K_x = M_{\mu\nu} + t^4 \equiv \overline{M}_{\mu\nu}$

et si $x = P_\mu$ $\qquad K_x = t^4 \equiv \overline{0}$

(14) L'algèbre quotient P/t^4 est généré par $\bar{m}_{\mu\nu}$ vérifiant

$$[\bar{m}_{\mu\nu}, \bar{m}_{\rho\sigma}] = g_{\mu\rho}\bar{m}_{\nu\sigma} + g_{\nu\sigma}\bar{m}_{\mu\rho} - g_{\nu\rho}\bar{m}_{\mu\sigma} - g_{\mu\sigma}\bar{m}_{\nu\rho}$$

qui n'est rien d'autre que la sous algèbre de P générée par $m_{\mu\nu}$ dite algèbre de Lie de Lorentz notée $so(3,1)$.

Opérations sur les algèbres de Lie :

Soient $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$ deux algèbres de Lie quelconques (sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et soit φ une application de $\mathcal{L} \to \mathcal{L}'$

on dit que φ est un homomorphisme si

$$\varphi(\alpha x + \beta y) = \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y)$$

$$x, y \in \mathcal{L} \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}$$

et $\varphi([x,y]) = [\varphi(x), \varphi(y)]$

$\operatorname{Ker}\varphi$ définit le noyau de φ :

$$\operatorname{Ker}\varphi = \{x \in \mathcal{L} \,/\, \varphi(x) = 0\}$$

on sait que $\operatorname{Ker}\varphi$ est un s-espace de $\mathcal{L}$.

En plus, $\operatorname{Ker}\varphi$ est un idéal de $\mathcal{L}$: si $x \in \mathcal{L}$ et $y \in \operatorname{Ker}\varphi$

alors $\varphi([x,y]) = [\varphi(x), 0] = 0$

$[x,y] \in \operatorname{Ker}\varphi \qquad [\mathcal{L}, \operatorname{Ker}\varphi] \subset \operatorname{Ker}\varphi$

Si $\mathcal{N}$ est un idéal de $\mathcal{L}$, on sait que $\mathcal{L}/\mathcal{N}$ est une algèbre dit quotient, alors naturellement on on a l'homomorphisme :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{L} &\longrightarrow \mathcal{L}/\mathcal{N} \\ x &\longrightarrow x + \mathcal{N} \end{aligned}$$

Si l'application φ est bijective l'homomorphisme est dit isomorphisme et on note $\mathcal{L} \sim \mathcal{L}'$.

Un isomorphisme de $\mathcal{L} \to \mathcal{L}$ est dit automorphisme.

L'automorphisme est dit involutif si $\varphi^2 = \mathbb{1}$

On définit la conjugaison comme suit :

$$\begin{aligned} \sigma : \mathcal{L} &\longrightarrow \mathcal{L} \\ x &\longmapsto \sigma(x) \end{aligned} \quad (\mathcal{L} \text{ algèbre de Lie complexe})$$

telle que :

$$\sigma(\alpha x + \beta y) = \bar{\alpha}\,\sigma(x) + \bar{\beta}\,\sigma(y)$$

$$\sigma([x, y]) = [\sigma(x), \sigma(y)]$$

$$\sigma^2 = \mathbb{1} \qquad (\sigma \text{ n'est pas un automorphisme})$$

<u>exemple</u> : si $\mathcal{L}$ est une algèbre réelle. $\mathcal{L}^c$ son extension complexe on a alors

$$\begin{aligned} \sigma : \mathcal{L}^c &\longrightarrow \mathcal{L}^c \\ x + iy &\longrightarrow x - iy \end{aligned}$$

$$x, y \in \mathcal{L}$$

σ est une conjugaison de $\mathcal{L}^c$.

on définit la dérivation d'une algèbre de Lie comme suit :

D est une application linéaire de $\mathcal{L} \to \mathcal{L}$

telle que :

$$D([x,y]) = [D(x), y] + [x, D(y)]$$

$$x, y \in \mathcal{L}$$

Il est évident que si D_1 et D_2 sont des dérivation de $\mathcal{L}$ alors $\alpha D_1 + \beta D_2$ l'est aussi et en plus on a : $[D_1, D_2]$ une dérivation ; En effet

$$D_1 D_2([x,y]) = D_1([D_2 x, y] + [x, D_2 y])$$

$$= [D_1 D_2 x, y] + [D_2 x, D_1 y] + [D_1 x, D_2 y] + [x, D_1 D_2 y]$$

$1 \leftrightarrow 2$ et retranchons on aura

$$(D_1 D_2 - D_2 D_1)([x,y]) \equiv [D_1, D_2]([x,y])$$

$$= [[D_1, D_2]x, y] + [x, [D_1, D_2]y]$$

Ainsi l'espace vectoriel des dérivations $\mathcal{L}_A$ est une algèbre de Lie dite algèbre de dérivation