1

Groupes de Lie et Algèbres de Lie

Notions sur les groupes et les algèbres

Définition d'un groupe

Soit G un ensemble et $*$ une opération interne définie de $G\times G \to G$: $(g_1 g_2) \to g_1 * g_2$ tels que

① $(g_1 * g_2) * g_3 = g_1 * (g_2 * g_3)$

② $\exists e \in G \,/\, e * g = g * e$ e élément neutre

③ $\forall g \in G \; \exists g^{-1} \in G \,/\, g * g^{-1} = g^{-1} * g = e$

et on $e^{-1} = e$ et $(g^{-1})^{-1} = g$. on note en général $g_1 * g_2$ par $g_1 g_2$. $(g_1 g_2)^{-1} = g_2^{-1} g_1^{-1}$

si $g_1 g_2 = g_2 g_1$ le groupe est dit commutatif dans ce cas $g_1 * g_2$ est notée par $g_1 + g_2$ et $(g^{-1}) = -g$, $e = 0$. si Card G est fini on dit que le groupe est fini et on note Card $G = |G|$ l'ordre du groupe. Dans le cas contraire on dit qu'il est infini.

② Exemples:

* S_n ensemble des permutations de n éléments est groupe opération de groupe étant la composition des permutations $|S_n| = n!$ S_n est dit groupe symétrique

* $\mathbb{C}$ nombres complexes muni de l'addition (+)

* $\mathbb{C}^*$ " " " de la multiplication (x)

* Rotations de la sphère autour de son centre muni de la composition des rotations.

* $\mathbb{Z}$ entiers relatifs muni de l'addition (+)

* $K = \{m + n\sqrt{-5} \quad m, n \in \mathbb{Z}\}$ ensemble de Kemmer muni de (+), Et même K muni de (x).

Sont des groupes

* $T = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad a \in \mathbb{R} \right\}$ muni de la multiplication des matrices.

Ainsi de suite ....

(2)

Définition d'algèbre

le $\mathbb{K}$-e-v $\mathcal{A}$ muni de la multiplication des éléments qui donne à $\mathcal{A}$ une structure d'anneau. et vérifiant $(\lambda x)y = x(\lambda y) = \lambda(xy)$, est Algèbre linéaire sur $\mathbb{K}$.

Multiplier deux éléments revient à multiplier les éléments de la base $e_i e_j = \sum_k C_{ij}^k e_k$

les C_{ij}^k sont dits ~~[illegible]~~ constantes de structure de l'algèbre $\mathcal{A}$.

Exemples:

* $\mathbb{M}(n,\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrés $n \times n$ définies sur $\mathbb{K}$. qui est un $\mathbb{K}$-e-v devient une algèbre sur $\mathbb{K}$ si on le dote de la multiplication matricielle. C'est une algèbre associative et non commutative. Elle admet comme base $\{e_{ij}\}$ (e_{ij}) est une matrice dont les élément sont $(e_{ij})_{kl} = \delta_{ik}\delta_{jl}$ on a alors

$$(e_{ij})(e_{kl})\Big|_{mp} = \sum_n (e_{ij})_{mn}(e_{kl})_{np} = \sum_n \delta_{im}\delta_{jn}\delta_{kn}\delta_{lp}$$

④

$$= \delta_{im}\delta_{lp}\delta_{jk} = \begin{cases} 0 & j \neq k \\ \delta_{im}\delta_{lp} & j = k \end{cases}$$

$$(e_{ij})(e_{kl}) = \begin{cases} 0 & j \neq k \\ (e_{il}) & j = k \end{cases}$$

A l'intérieur de $\mathbb{M}(n, \mathbb{K})$ on trouve le groupe linéaire $GL(n, \mathbb{K})$ des matrices non singulière.

* $\mathbb{H}$ un $\mathbb{K}$-e-v de dimension 4 dont la base vérifie : $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ / $e_0 e_k = e_k$, $e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = -e_0$, $e_m e_n = \varepsilon_{mnk} e_k$ (cyclique) c'est l'algèbre des quaternions $\mathbb{H}(\mathbb{K})$.

Algèbre de Lie

Une algèbre $\mathcal{L}$ est dite algèbre de Lie si (on note la multiplication XY par $[X,Y]$)

① La multiplication est anticommutative

$$[X, Y] = -[Y, X]$$

② et on a l'identité de Jacobi

$$[[X,Y],Z] + [[Z,X],Y] + [[Y,Z],X] = 0$$

(5)
Dans une algèbre de Lie X et Y commutent ssi $[X, Y] = 0$. Si pour tout (X, Y) d'une algèbre de Lie $[X, Y] = 0$. $\mathcal{L}$ est dite commutative

Exemples:

* toute algèbre associative est une algèbre de Lie où $[X, Y] = X.Y - Y.X$.

En particulier $\mathbb{M}(n, \mathbb{K})$ est une algèbre de Lie avec

$$[e_{ij}, e_{km}] = \delta_{jk} e_{im} - \delta_{mi} e_{kj}$$

les constantes de structure sont

$$C_{ijkm}^{rs} = \delta_{ir} \delta_{jk} \delta_{ms} - \delta_{kr} \delta_{im} \delta_{js}$$

* l'ensemble des vecteurs tridimensionnels muni de la multiplication vectoriel $\vec{X} \wedge \vec{Y}$ est une algèbre de Lie (montrez-le et déterminer les constantes de structure)

(6) les constantes de structure d'une algèbre de Lie vérifient : (montrez-le)

$$C_{ij}^{k} = - C_{ji}^{k}$$

$$\sum_j \left(C_{ij}^{\ell} C_{km}^{j} + C_{mj}^{\ell} C_{ik}^{j} + C_{kj}^{\ell} C_{mi}^{j} \right) = 0$$

et inversement si les constantes de structure vérifie ces relations alors l'algèbre est une algèbre de Lie

Sous groupes et sous algèbres :

Soit H un sousensemble de G (non vide) $H \subset G$. Il est dit sous groupe de G si pour $g_1, g_2 \in H$ $g_1 g_2^{-1} \in H$. On dit que la structure de groupe G est conservée sur H.

Si H un sous groupe G ; $\forall g_1, g_2 \in G$, les ensembles $g_1 H$ et $g_2 H$ soit ils coincident soit ils sont disjoints. En effet : si $g_1 H \cap g_2 H \neq \phi$ $\exists\, h_1, h_2 \in H$ / $g_1 h_1 = g_2 h_2$, soit $g_1 h \in H$

$g_1 h = g_2 h_2 h_1^{-1} h = g_2 \bar{h}_2$ et inversement.

7

Ceci nous permet de classifier G suivant H (à gauche) $G = \bigcup_k g_k H$ l'ensemble de ces classes est noté G/H : l'espace quotient gauche. De même on peut définir $H\backslash G$ l'espace quotient droite. On peut aussi classifier suivant gauche et droite : K et H divise G en classes notées $K\backslash G/H$. Si $Hg = gH$ on dit que H est distingué dans G (ou bien invariant) et G/H est un groupe. Cette même notion peut être étendue aux algèbres.

On appelle A_1 sous algèbre de A si A_1 s-ev-A et le produit de deux éléments qlq de A_1 est un élément de A_1.

On appelle A_1 idéal à gauche (à droite) de A si A_1 sous algèbre de A et $aA_1 \subset A_1$ ($A_1 a \subset A_1$) $a \in A$.

Si A_1 est idéal gauche et droite on dit seulement qu'il est idéal de A. Dans une Algèbre de Lie idéal gauche = idéal droite = idéal.

8 Exemples :

* $(\mathbb{Z},+)$ est un S-groupe $(\mathbb{R},+)$
* $(\mathbb{R}_+,\cdot)$ est S-groupe ~~[illegible]~~ de $(\mathbb{C}-\{0\},\cdot)$
* $\mathbb{T}=\{z\in\mathbb{C},\ |z|=1\}$ S-groupe de $(\mathbb{C}-\{0\},\cdot)$
* $SL(n,\mathbb{K})=\{g\in G(n,\mathbb{K})\mid \det g=1\}$ S-groupe de $Gl(n,\mathbb{K})$. Il est dit groupe unimodulaire
* $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont sous-algèbres de $\mathbb{H}(\mathbb{R})$
* $gL(n,\mathbb{K})$ est sous algèbres de $\mathbb{M}(n,\mathbb{K})$.

Partie génératrices :

* Si H_i sont S-groupes de G alors l'intersection $\bigcap_i H_i$ est sous groupe de G. L'intersection de tous les S-groupes qui contiennent A est dite S-groupe généré par A. On note $\bigcap_i H_i = \langle(A)\rangle$
* Si $\mathcal{L}_i$ S-ev de $\mathcal{L}$; $\bigcap_i \mathcal{L}_i =$ ~~$\mathcal{L}$~~ ev $\mathcal{L}$ l'intersection de tous les S-ev qui contiennent A est dite S-ev généré par A.

$$\bigcap_i \mathcal{L}_i \equiv \sum_i \mathcal{L}_i \equiv \langle(A)\rangle$$

* Soit $A \subset G$. $Z(A)$ les éléments de G qui commutent avec chaque élément de A, est dit ~~centralisateur~~ de A. $Z(A)$ est un sous-groupe de G qui coïncide avec le ~~centralisateur~~ de S-groupe généré par A. $Z(A) = Z(\langle A \rangle)$

* Soit $H \subset G$ un S-groupe de G; les éléments n de G | $nH = Hn$ forment un S-groupe de G dit Normalisateur de H. C'est le plus grand des S-groupe de G dans le quel H est distingué.

* le ~~centralisateur~~ de G est dit centre de G noté : $Z(G)$

* Soient $H, K \subset G$ deux S-groupe de G on construit le commutateur $[H,K]$ généré par $hkh^{-1}k^{-1}$ $h \in H$ et $k \in K$
$[H,K]$ est S-groupe de G.
$[G,G]$ est dit sous groupe commutateur de G

(10)

* Si $\mathcal{L}$ est une algèbre de Lie, le centralisateur d'une partie A de $\mathcal{L}$ est $z \in \mathcal{L} \mid [z, a] = 0$ $\forall a \in A$. Le centralisateur de $\mathcal{L}$ est dit centre de $\mathcal{L}$.

* $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ des sous algèbres de $\mathcal{L}$ (de Lie)

$[\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2] = \{\langle [x, y] \rangle,\ x \in \mathcal{L}_1 \text{ et } y \in \mathcal{L}_2\}$

sous algèbre dite commutateur de $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$

* $[\mathcal{L}, \mathcal{L}]$ sous algèbre commutateur de $\mathcal{L}$

Exemples :

* le centre de $GL(n, \mathbb{K})$ c'est $\lambda \mathbb{I}_n$ $\lambda \in \mathbb{K}$

* $[GL(n, \mathbb{K}), GL(n, \mathbb{K})] \equiv SL(n, \mathbb{K})$

* $S_\pm(n, \mathbb{K})$: l'ensemble des matrices $n \times n$ triangulaires supérieures (inférieures)

$N_\pm(n, \mathbb{K})$: l'ensemble des matrices $n \times n$ triangulaires supérieures (inférieures) avec la diagonale $(1, 1, \dots 1)$

$[S_\pm(n, \mathbb{K}), S_\pm(n, \mathbb{K})] = N_\pm(n, \mathbb{K})$

(1-1)

* $N_+^{(k)}(n, \mathbb{K}) \subset N_+(n, \mathbb{K})$ / $n_{ij} = 0$ pour $0 < j - i \leq k$: $N_+^{(k)}(n,\mathbb{K})$ est un S-groupe de $N_+(n, \mathbb{K})$

$$[N_+(n, \mathbb{K}), N_+^{(k)}(n, \mathbb{K})] = N_+^{(k+1)}(n, \mathbb{K})$$

* le centre de $N_+(n, \mathbb{K})$ sont de la forme

$I_n + \lambda(e_{1n})$ $\lambda \in \mathbb{K}$.

* $\mathbb{R}$ est le centre de $\mathbb{H}$

* $n_{\pm}(n, \mathbb{K})$ l'algèbre de Lie des matrice des matrices triangulaire superieure (inferieure) avec la diagonale $(0, 0, 0 \cdots 0)$ est le commutateur sous algèbre de l'algèbre de Lie $S_{\pm}(n, \mathbb{K})$ des matrices triangulaires supérieures (inférieures) avec l'opération $[x, y] = xy - yx$.

Homomorphismes et automorphismes

* On appelle homomorphisme d'un groupe G_1 dans un groupe G_2 une application f de $G_1 \to G_2$ / $\forall g, h \in G_1$ on a : $f(gh) = f(g)\,f(h)$

Si elle est bijective elle est dite isomorphisme et dit G_1 est isomorphe à G_2 : $G_1 \sim G_2$

Un isomorphisme de $G \to G$ est dit automorphisme

* Soit $f : G_1 \to G_2$ un homomorphisme et $H_1 \subset G_1$ un sous groupe de G_1 alors $f(H_1)$ est un sous groupe de G_2. $H_2 \subset G_2$ sous groupe de G_2 alors $f^{-1}(H_2)$ est un sous groupe de G_1. En particulier

$f^{-1}(\{e_2\}) \equiv \mathrm{Ker} f$ est un sous groupe (distingué) de G_1 dit le noyau de f. En plus on a : $f(G_1) \subset G_2 \sim G_1/\mathrm{Ker} f$.

Exemples :

① Soient $(\mathbb{R}, +)$ et $(\mathbb{R}_+, \cdot)$ pour $a > 0$ $a \neq 1$

on a : $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$
$x \longmapsto a^x$

est un homomorphisme de $(\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}_+, \cdot)$ ou plus exactement c'est un isomorphisme.

(2) Soient $(\mathbb{R},+)$ et $(\Pi,\cdot)$ Π étant l'ensemble des nombres complexe de module 1. $f:\ \mathbb{R} \to \Pi$
$x \mapsto e^{2i\pi x}$

f est homomorphisme de $(\mathbb{R},+) \to (\Pi,\cdot)$

$\operatorname{Ker} f \equiv \mathbb{Z} = \{ x$ nombres entiers relatifs $\}$

$\operatorname{Ker} f \equiv \mathbb{Z}$ est sous groupe de $\mathbb{R}$

(3) soient $GL(n,K)$ et $K-\{0\}$.

$f:\ GL(n,K) \to K-\{0\}$
$f \to \det f$

est un homomorphisme de groupe

(4) Soit $GL(n,K)$ et $f:\ GL(n,K) \to GL(n,K)$
$f \to (f^{-1})^{t}$

f est un automorphisme de $GL(n,K)$

(5) soit $f_{f_0}:\ G \to G$ $\quad f_0 \in G$
$f \to f_0 f f_0^{-1}$

est un automorphisme de G dit automorphisme intérieur. tout autre automorphisme est dit extérieur. L'ensemble des automorphisme forme un groupe noté Aut G : groupe des automorphismes de G.

Celui des Automorphismes intérieurs est aussi un groupe noté Inaut G

* soit un groupe de transformations d'un ensemble X. Un homomorphisme d'un groupe G vers le groupe de transformations de X est dit une représentation de G par les transformations de X.

Elle définit l'action de G sur X. L'image de $x \in X$ par $g \in G$ est notée $g \circ x$ et on a :

$$g_1 \circ (g_2 \circ x) = (g_1 g_2) \circ x$$

L'ensemble X sur lequel G agit est dit G-espace.

* Il arrive que G agit sur deux ensembles X et Y. Ses actions sont dites équivalentes s'il existe $f : X \to Y$ telle que :

$$g \circ (f(x)) = f(g \circ x) \qquad x \in X \text{ et } g \in G$$

* soit le sous-ensemble N de G tel que

$$n \circ x = x \qquad n \in N$$

N est sous groupe invariant de G

N est noyau d'inefficacité de G sur X

Si N = {élément neutre} on dit que G agit efficacement sur X.

(15) Soit Y^X l'ensemble des applications de $X \to Y$.

~~Soit~~ Si X est G-espace, alors l'action de G sur Y^X est définie par

$$(g \circ f)(x) = f(g^{-1} \circ x) \equiv f_g(x)$$

$$x \in X \quad f \in Y^X \quad g \in G$$

En effet :

$$((g_1 g_2) \circ f)(x) = f((g_1 g_2)^{-1} \circ x)$$

$$= f((g_2^{-1} g_1^{-1}) \circ x) = f(g_2^{-1} \circ (g_1^{-1} \circ x))$$

$$= f_{g_2}(g_1^{-1} \circ x) = (g_1 \circ f_{g_2})(x)$$

$$= (g_1 \circ (g_2 \circ f))(x) \quad \text{d'où}$$

$$(g_1 g_2) \circ f = g_1 \circ (g_2 \circ f)$$

Si Y est G-espace l'action de G sur Y^X est donnée par $(g \circ f)(x) = g \circ f(x)$

(16)

Ex : Montrez que $g \to g_0 g$ et $g \to g g_0^{-1}$ definit deux équivalentes effectives actions de G sur G l'équivalente est donnée par $g \to g^{-1}$.

Montrez que $g \to g_0 g g_0^{-1}$ définit une action de G sur G dont le Noyau d'inefficacité coincide avec le centre Z de G. $(Z(G))$

①

Théorème:

Chaque matrice inversible $(n\times n)$ peut être écrite sous la forme $e^X = \operatorname{Exp} X$ avec $X \in M_n(\mathbb{C})$ (voir exo 8 et 9).

Théorème: soient X et Y deux matrices $(n\times n)$; X et $Y \in M_n(\mathbb{C})$. Alors

$$\operatorname{Exp}(X+Y) = \lim_{m\to\infty} \left[\operatorname{Exp}(X/m)\operatorname{Exp}(Y/m)\right]^m$$

Preuve:
$$\operatorname{Exp}(X/m) = \mathbb{1} + \frac{X}{m} + O(1/m^2)$$
$$\operatorname{Exp}(Y/m) = \mathbb{1} + \frac{Y}{m} + O(1/m^2)$$

$$\underbrace{\operatorname{Exp}(X/m)\operatorname{Exp}(Y/m)}_{A} = \mathbb{1} + \frac{X}{m} + \frac{Y}{m} + O(1/m^2)$$

$$A - \mathbb{1} = X/m + Y/m + O(1/m^2)$$

$$\|A - \mathbb{1}\| = \|X/m + Y/m\| < 1 \quad (m\to\infty)$$

$$\operatorname{Log} A = X/m + Y/m + O(1/m^2)$$

d'où on tire $\operatorname{Exp}(X/m)\operatorname{Exp}(Y/m) = \operatorname{Exp}\left(\frac{X}{m}+\frac{Y}{m}+O\left(\frac{1}{m^2}\right)\right)$

et en puissance m on a: $\left[\operatorname{Exp}(X/m)\operatorname{Exp}(Y/m)\right]^m = \operatorname{Exp}\left[X + Y + O\left(\frac{1}{m}\right)\right]$

② et on a alors

$$\operatorname{Exp}(X+Y) = \lim_{m\to\infty} \left[\operatorname{Exp}(X/m)\operatorname{Exp}(Y/m)\right]^m$$

(on l'appelle aussi la formule de Trotter)

<u>Théorème :</u> Pour $X \in M_n(\mathbb{C})$, on a

$$\det(\operatorname{Exp}(X)) = \exp(\operatorname{Tr}(X))$$

En effet : a) X diagonalisable

$$X = C X^d C^{-1}$$

$$\operatorname{Exp}(X) = C \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} C^{-1}$$

$$\det(\operatorname{Exp}(X)) = \exp\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\right) = \exp[\operatorname{Tr}(X)]$$

b) X Nilpotente $\exists C \in GL(n,\mathbb{C})$ /

$$X = C \begin{pmatrix} 0 & & \nabla \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} C^{-1}$$

$\operatorname{Tr}(X) = 0$ et $\operatorname{Exp}(X) = C \begin{pmatrix} 1 & & \nabla \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} C^{-1}$

$$\det(\operatorname{Exp}(X)) = 1 = \exp[\operatorname{Tr}(X)]$$

b) $X = S + N$ avec $[S, N] = 0$ $\quad$ S : diag, N : Nilp.

$$\operatorname{Exp}(X) = \operatorname{Exp}(S)\operatorname{Exp}(N)$$

③ et $\det(\mathrm{Exp}(X)) = \det(\mathrm{Exp}(S)) \det(\mathrm{Exp}(N))$

$$= \exp(\mathrm{Tr}(S)) \exp(\mathrm{Tr}(N))$$

$$= \exp(\mathrm{Tr}(S+N)) = \mathrm{Exp}(\mathrm{Tr}(X))$$

$(\mathrm{Tr}(X) = \mathrm{Tr}(S)$ puisque $\mathrm{Tr}\, N = 0)$.

<u>Définition</u> soit $A : \mathbb{R} \to GL(n, \mathbb{C})$

A est dit sous groupe à un paramétre de $GL(n, \mathbb{C})$ si

① A est continue

② $A(0) = \mathbb{1}$

③ $A(t+s) = A(t)A(s) \quad \forall\, t, s \in \mathbb{R}$

<u>Théorème:</u> si A est un sgroupe à un paramétre de $GL(n, \mathbb{C})$, Alors $\exists\, X$ $(n \times n) \in M_n(\mathbb{C})$ tel que

$$\boxed{A(t) = \mathrm{Exp}(tX)}$$

(voir le livre).

④ Algèbre de Lie des Groupes de Lie matriciels

(adL de GdL (matriciels))

Définition Soit G un groupe de Lie (matriciel). L'Algèbre de Lie (adL) de G noté $\mathfrak{g}$ est l'ensemble de toutes les matrices X telles que $\mathrm{Exp}(tX) \in G$ $(\forall t \in \mathbb{R})$.

Rq: $X \in \mathfrak{g}$ (adL de G) ssi $\mathrm{Exp}(tX) \in G$

Quelques Exemples des adL de GdL (matriciels)

adL de $GL(n, \mathbb{C})$: $\mathrm{Exp}(tX)$; $X \in M_n(\mathbb{C})$

$\mathrm{Exp}(tX) \in GL(n, \mathbb{C})$ (t réel)

l'ensemble de toutes les matrices $\in GL(n, \mathbb{C})$

$(\forall t \in \mathbb{R})$ adL de $GL(n, \mathbb{C}) \equiv \cancel{M_n(\mathbb{C})}$ $gl(n, \mathbb{C})$

l'ensemble de toutes les matrices complexes

adL de $GL(n, \mathbb{R})$: X $(n \times n)$ réelle

$\mathrm{Exp}(tX) \in GL(n, \mathbb{R})$

$X \equiv \frac{d}{dt} \mathrm{Exp}(tX) \Big|_{t=0}$ réelle pour $\mathrm{Exp}(tX)$ réelle

adL $GL(n, \mathbb{R}) \equiv gl(n, \mathbb{R})$ l'ensemble de toutes les matrices réelles.

⑤ <u>adL de $SL(n, \mathbb{C})$:</u> X $(n\times n)$ complexe

$Tr(X) = 0$ $\quad \det(Exp(tX)) = exp^{(t\,Tr(X))} = 1$

$\det(Exp(tX)) = 1 \quad (\forall t \in \mathbb{R})$

et $\quad exp(t\,Tr(X)) = 1 \quad (\forall t \in \mathbb{R})$

$t\,Tr(X) = i2\pi k$ n'est possible que

pour $Tr(X) = 0$ $(k=0)$

adL de $SL(n, \mathbb{C}) = sl(n, \mathbb{C})$

l'ensemble des matrices complexes

de Trace nulle.

de la même manière

<u>adL de $SL(n, \mathbb{R}) = sl(n, \mathbb{R})$</u>

l'ensemble de toutes les matrices réelles

de Trace nulle.

<u>adL de $U(n)$:</u> $U^{+} = U^{-1}$

$Exp(tX) = U \qquad [Exp(tX)]^{+} = [Exp(tX)]^{-1}$

$Exp(tX^{+}) = Exp[-tX]$

$X^{+} = -X$ et si on a $Exp(tX^{+}) =$
on aussi de même propriété $\quad Exp(-tX)$

⑥ $\frac{d}{dt}\left(\mathrm{Exp}\left(tX^+\right)\right) = \frac{d}{dr}\left(\mathrm{Exp}(-tX)\right)$

$X^+ = -X$

adL de $U(n) \equiv u(n)$ l'ensemble de toutes les matrices complexes / $X^+ = -X$

adL de $SU(n) \equiv su(n)$ l'ensemble de toutes les matrices complexes / $X^+ = -X$ et $\mathrm{Tr}\,X = 0$.

adL de $SO(n)$

Dans ce cas adL de $SO(n)$ $\equiv$ adL de $O(n)$

(Composante principale de $O(n)$ est $SO(n)$)

adL $SO(n) \equiv so(n)$ l'ensemble de toutes les matrices réelles $X^T = -X$

(dans ce cas on a automatiquement $\mathrm{Tr}\,X = 0$)

même chose pour

adL $SO(n, \mathbb{C}) \equiv so(n, \mathbb{C})$

l'ensemble de toutes les matrices complexes / $X^{Tr} = -X$ $(\neq su(n))$

⑦ <u>adL de $O(n,m)$</u>

$$A^{Tr} G A = G \qquad G = \begin{pmatrix} \overbrace{+1 \ddots +1}^{n} & 0 \\ 0 & \underbrace{-1 \ddots -1}_{m} \end{pmatrix}$$

on tien $(G^{-1} = G)$ $\quad G A^{Tr} G = A^{-1}$

X matrice réelle / $\quad G \, Exp(tX) \, G = Exp(-tX)$

$$= Exp(t \, GXG) = Exp(-tX)$$

$$G X^{Tr} G = -X$$

et si X verifie $G X^{Tr} G = -X$ alors

$$Exp(tX) \in O(n,m)$$

adL de $O(n,m) \equiv o(n,m)$ l'ensemble des matrices réelles / $G X^{Tr} G = -X$

(on a $Tr X = 0$)

~~$O(n,m)$ et $SO(n,m)$ ne sont pas connexes~~

adL $SO(n,m) \equiv so(n,m) = o(n,m)$

matrices réelles / $G X^{Tr} G = -X$

Les adL de $Sp(n,\mathbb{R})$, $Sp(n,\mathbb{C})$, $Sp(n)$

Un calcul analogue aux précédents donne :

$$\text{adL } Sp(n,\mathbb{R}) \equiv sp(n,\mathbb{R}) = \{ X \ (2n\times 2n) \text{ réelles} \ / \ J X^T J = X \}$$

$$\text{adL } Sp(n,\mathbb{C}) \equiv sp(n,\mathbb{C}) = \{ X \ (2n\times 2n) \text{ complexes} \ / \ J X^T J = X \}$$

$A \ (n\times n)$ qlq ; $B \ (n\times n)$, $C(n\times n)$ symétriques et en forme sont $\begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^T \end{pmatrix}$.

$$\text{adL } Sp(n) = sp(n,\mathbb{C}) \cap U(2n)$$

adL du Groupe d'Heisenberg

$$\text{adL Heisenberg} = \left\{ X = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ réelles} \right\}.$$

adL du Groupe Euclidien

$$\text{adL de } E(n) \equiv \left\{ \begin{pmatrix} Y & \begin{matrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{matrix} \\ 0\,0\cdots & 0 \end{pmatrix} \ \middle/ \ \underset{Y \in o(n)}{Y = -Y^T} \right\}$$

adL du Groupe de Poincaré

$$\text{adL de } \overset{P(n,1)}{\cancel{\text{Poincaré}}} \equiv \left\{ \begin{pmatrix} Y & \begin{matrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{n+1} \end{matrix} \\ 0\,0\cdots & 0 \end{pmatrix} \ \middle/ \ Y \in O(n,1) \right\}$$

(1) Quelques exemples d'algèbres de Lie associées aux groupes de Lie classiques.

Déf on appelle Courbe différentielle dans $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) l'application :

$$\alpha : [a,b] \longrightarrow \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$$
$$t \longmapsto \alpha(t)$$

pour qui la limite

$$\lim_{s \to t} \frac{1}{s-t} \left(\alpha(s) - \alpha(t) \right) \equiv \alpha'(t) \quad \text{existe}$$

avec $s, t \in [a,b]$

Il est préférable de choisir $]a,b[$ un ouvert de $\mathbb{R}$ et $a < 0 < b$. On note aussi $\alpha'(t) = \frac{d\alpha(t)}{dt}$

Soit maintenant, l'équation différentielle dans $\mathbb{M}(n,\mathbb{R})$ suivante

$$\alpha'(t) = \alpha(t) A \qquad A \in \mathbb{M}(n,\mathbb{R})$$

Comme on le sait pour $n = 1$ la solution est $\alpha(t) = C e^{At}$ $A \in \mathbb{R}$ et $\alpha(0) = C$

que devient cette solution dans $\mathbb{M}(n,\mathbb{R})$.

(2) <u>Théorème :</u>

Pour A et $C \in M(n,\mathbb{R})$ et $A \neq 0$,
l'équation différentielle (I) a une solution
unique avec $\alpha(0) = C$. Si C est inversible
$\alpha(t) \in GL(n,\mathbb{R})$

<u>Preuve :</u>

Posons d'abord $C = \mathbb{1}$
on sait que $\exp(tA)$ pour $A \in M(n,\mathbb{R})$
est une courbe différentiable dans $M(n,\mathbb{R})$
et a pour dérivée

$$\frac{d}{dt} \exp(tA) = A \exp(tA) = \exp(tA) A$$

et $\exp(tA)\Big|_{t=0} = \mathbb{1}$

donc $\exp(tA)$ satisfait $\alpha'(t) = \alpha(t) A$ avec
$\alpha(0) = \mathbb{1}$.
et pour $t, s \in \,]a,b[$

$$\exp(tA) \exp(sA) = \exp((t+s)A) \text{ donc}$$

$$\alpha(t)\alpha(s) = \alpha(t+s)$$

ce qui montre que $\alpha(-t)\alpha(t) = \mathbb{1}$
$\alpha(t)$ inversible.

③ Soit maintenant $\beta(t)$ solution de l'Ep (I) avec $\beta(0) = C$. formons $\gamma(t)$ /

$$\gamma(t) = \beta(t) \exp(-tA)$$

$\gamma(t)$ satisfait l'Ep différentielle

$$\gamma'(t) = \beta'(t) \exp(-tA) + \beta(t) \frac{d}{dt} \exp(-tA)$$

$$= \beta(t) A \exp(-tA) - \beta(t) A \exp(-tA)$$

$$= 0$$

d'où on tire $\gamma(t) = \gamma(0) = \beta(0) = C$

La solution $\beta(t)$ s'écrit alors

$$\beta(t) = C \exp(tA) . \in M(n, \mathbb{R})$$

Si C est inversible alors $\beta(t)$ inversible

$$\beta(t) \in GL(n, \mathbb{R}) .$$

Déf : Soit $G \subseteq GL(n, \mathbb{K})$, on appelle semi groupe à un paramètre dans G est une application continue $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\longrightarrow G$ différentiable en $t = 0$ et vérifiant :

$$\gamma(t)\gamma(s) = \gamma(t+s)$$

avec $t, s, t+s \in]-\varepsilon, \varepsilon[$

④ Si $\varepsilon = \infty$ on l'appelle groupe à un paramètre dans G ou bien sous groupe à un paramètre de G.

Remarque: $\gamma(0) = 1$.

Proposition: Soit $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\longrightarrow G$ un semi groupe à un paramètre dans G. Alors pour chaque $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$ γ est différentiable et $\gamma'(t) = \gamma'(0)\gamma(t) = \gamma(t)\gamma'(0)$

Théorème:

Soit $\gamma : \mathbb{R} \to G$ un groupe à un paramètre dans G. Alors

$$\gamma(t) = \exp(tA) \quad \text{avec } A \in M(n, \mathbb{K}).$$

Déf: L'espace tangent à G en $x \in G$ est:

$$T_x G = \{ \gamma'(0) \in M(n, \mathbb{K}) : \text{où } \gamma \text{ est une courbe différentiable dans } G \text{ avec } \gamma(0) = x \}$$

5

Proposition :

$T_x G$ est un $\mathbb{R}$ - s - ev de $\mathbb{M}(n, \mathbb{K})$

Déf :

$\dim G = \dim_{\mathbb{R}} T_I G$ (si G est réel)

$\dim_{\mathbb{C}} G = \dim_{\mathbb{C}} T_I G$ (si G est complexe)

et on note

$$T_I G \equiv \mathcal{G}$$

Théorème

(α) si $G \subseteq GL(n, \mathbb{K})$ est un sous groupe alors $\mathcal{G} \equiv T_I G$ est une $\mathbb{R}$ - s - adL de $\mathbb{M}(n, \mathbb{K})$

Preuve : on sait $T_I G$ est $\mathbb{R}$ - s - ev de $\mathbb{M}(n, \mathbb{K})$. Soient α et β deux courbes differentiables dans G avec $\alpha(0) = \beta(0) = \mathbb{1}$

(6) Il existe une courbe différentiable γ avec $\gamma(0) = \mathbb{1}$ et $\gamma'(0) = [\alpha'(0), \beta'(0)]$

En effet : soit $F(s,t) = \alpha(s)\,\beta(t)\,\alpha^{-1}(s)$

$$F_s : \mathrm{dom}\,\beta \longrightarrow G$$
$$t \longrightarrow F(s,t) = F_s(t)$$

$$F_s(0) = F(s,0) = \alpha(s)\,\beta(0)\,\alpha^{-1}(s)$$

$$\left.\frac{dF_s(t)}{dt}\right|_{t=0} = \alpha(s)\,\beta'(0)\,\alpha(s)^{-1} \in T_I G$$

donc $$\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \left(\alpha(s)\,\beta'(0)\,\alpha^{-1}(s)\right)$$

$$= \lim_{s\to 0} \frac{1}{s}\left(\alpha(s)\,\beta'(0)\,\alpha^{-1}(s) - \beta'(0)\right) \in T_I G$$

$$\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \left(\alpha(s)\,\beta'(0)\,\alpha^{-1}(s)\right)$$
$$= \alpha'(0)\,\beta'(0)\,\alpha^{-1}(0) + \alpha(0)\,\beta'(0)\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \alpha^{-1}(s)$$

⑦ $\quad O2$

$$\alpha^{-1}(s)\,\alpha(s) = 1$$

$$\frac{d\alpha^{-1}}{ds}\alpha(s) + \alpha^{-1}(s)\frac{d\alpha(s)}{ds} = 0$$

$$\frac{d\alpha^{-1}}{ds}(s) = -\alpha^{-1}(s)\frac{d\alpha(s)}{ds}\alpha^{-1}(s)$$

d'où

$$\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0}\left(\alpha(s)\,\beta'(0)\,\alpha^{-1}(s)\right)$$

$$= \alpha'(0)\,\beta'(0) - \beta'(0)\,\alpha'(0) = [\alpha'(0), \beta'(0)]$$

$$\gamma(s) \equiv \alpha(s)\,\beta'(0)\,\alpha^{-1}(s)$$

$$\boxed{[\alpha'(0), \beta'(0)] \in T_I G}$$

$T_I G$ $\mathbb{R}$ s adL de $M(n, \mathbb{K})$

Ex 04 loi de composition

$$\begin{pmatrix}\vec{x}\\ t\end{pmatrix} \xrightarrow{(b,\vec{a},\vec{v},R)} \begin{pmatrix}\vec{x}'\\ t'\end{pmatrix} \xrightarrow{(b',\vec{a}',\vec{v}',R')} \begin{pmatrix}\vec{x}''\\ t''\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}\vec{x}' = R\vec{x} + \vec{v}\,t + \vec{a}\\ t' = t + b\end{cases}$$

$$\begin{cases}\vec{x}'' = R'\vec{x}' + \vec{v}'\,t' + \vec{a}'\\ t'' = t' + b'\end{cases}$$

d'où

$$\vec{x}'' = (R'R)\vec{x} + (R'\vec{v} + \vec{v}')t + \vec{a}' + R'\vec{a} + b\vec{v}'$$

$$t'' = t + b' + b$$

$$(b', \vec{a}', \vec{v}', R')(b, \vec{a}, \vec{v}, R)$$

$$= (b + b' ; \vec{a}' + R'\vec{a} + b\vec{v}' ; \vec{v}' + R'\vec{v} ; R'R)$$

$(b, \vec{a}, \vec{v}, R) \in$ Transf. Galilée

$b \in \mathbb{R}$ $\quad \vec{a} \in \mathbb{R}^3$ $\quad \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ $\quad R$ rotation

$b + b' \in \mathbb{R}$, $\vec{a}' + R'\vec{a} + b\vec{v}' \in \mathbb{R}^3$, $\vec{v}' + R'\vec{v} \in \mathbb{R}^3$,

$R'R$ rotation

opération stable, associative, $(0, \vec{0}, \vec{0}, \mathbb{1})$ élément neutre transf. inverse

$$t = t' - b$$
$$\vec{x} = R^{-1}\vec{x}' - R^{-1}\vec{v}\,t' - R^{-1}(\vec{a} - \vec{v}b)$$

d'où

$$(b, \vec{a}, \vec{v}, R)^{-1} = \left(-b, -R^{-1}(\vec{a} - \vec{v}b), -R^{-1}\vec{v}, R^{-1}\right)$$

Montrer que cet ensemble muni de la multiplication des matrices est un groupe dit groupe de Weyl.

Exo 5: Soit $SL(2, \mathbb{C})$ le groupe des matrices complexes (2×2) de $\det = 1$.

Montrer que les sous ensembles suivants

$$X = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & \xi \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \ \xi \in \mathbb{C} \right\}$$

$$Y = \left\{ \begin{bmatrix} \delta^{-1} & 0 \\ 0 & \delta \end{bmatrix} \ \delta \in \mathbb{C}^* \right\}$$

$$Z = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ z & 1 \end{bmatrix} \ z \in \mathbb{C} \right\}$$

sont des sous groupes de $SL(2, \mathbb{C})$.

Exo3 on définit

$$L^i{}_j = x^i \frac{\partial}{\partial x^j} - x^j \frac{\partial}{\partial x^i}$$

pour $i,j = 1,2,\dots,p$ ou $i,j = p+1,\dots,p+q$

et $B^i{}_j = x^i \frac{\partial}{\partial x^j} + x^j \frac{\partial}{\partial x^i}$

pour $i = 1,2,\dots,p$ et $j = p+1,\dots,p+q$

- Déterminer les relations de Commutation

$$[L^i{}_j, L^k{}_e] ; [B^i{}_j, B^k{}_e]$$

et $[L^i{}_j, B^k{}_e]$

- Montrer que l'algèbre obtenue n'est rien d'autre que $so(p,q)$

Exo4 : Soit l'ensemble des matrices triangulaires (3x3)

$$g(\alpha,\beta,\gamma) = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \equiv (\alpha,\beta,\gamma)$$

$\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

P.G. Physique Théorique
2003/2004

O.E. Bouaghi / 07/10/2004

Contrôle — Groupes et Algèbres de Lie

Exo 1 Soit l'Algèbre de Lie définie par

$[x_1, x_2] = x_5$, $[x_1, x_3] = x_6$, $[x_1, x_4] = x_7$,

$[x_1, x_5] = -x_8$, $[x_2, x_3] = x_8$, $[x_2, x_4] = x_8$,

$[x_2, x_6] = -x_7$, $[x_3, x_4] = -x_5$, $[x_3, x_5] = -x_7$

$[x_4, x_6] = -x_8$ et les autres $[\ ,\ ] = 0$

Montrer que cette Algèbre est nilpotente.

Exo 2 Soit l'algèbre de Lie $so(p,q)$ définie par les relations de commutation suivantes

$$[L_{ab}, L_{cd}] = -g_{bc} L_{ad} - g_{ad} L_{bc} + g_{ac} L_{bd} + g_{bd} L_{ac}$$

g_{ij} tenseur métrique défini par la signature

$$(\overbrace{+,+,+,\cdots,+}^{p}, \underbrace{-,-,-,\cdots,-}_{q})$$

Calculer le tenseur métrique de Cartan

$$g_{ab,\alpha\beta} = (C_{ab})_{cd}{}^{ef} (C_{\alpha\beta})_{ef}{}^{cd} \quad / \ C_{ij} \text{ constantes de structure}$$

Therefore, $SL(2, R)$ can be represented as the disjoint sum of two double cosets.

§ 7. Classification of Simple Lie Groups

The Killing–Cartan classification of simple Lie algebras, by virtue of th. 3.3, leads to the classification of the corresponding simple Lie groups. The explicit form of a simple Lie group corresponding to a simple complex or real Lie algebra L can be easily obtained by exponentiating the explicit defining representation of L given in ch. 1.5. For example, the Lie algebra $sl(n, C)$ was realized as the set of all $n\times n$-complex traceless matrices. Hence the group $SL(n, C)$ consists of all elements

$$x = e^X, \quad X \in sl(n, C), \tag{1}$$

which by virtue of the identity $\det e^X = e^{\operatorname{Tr} X}$ is the set of all $n\times n$-unimodular matrices. Similarly, one calculates an explicit realization of all other simple Lie groups corresponding to the explicit realization in ch. 1.5 of associated Lie algebras which we now list:

A. Groups associated with algebras A_{n-1}:

$$SL(n, C) \left\langle \begin{array}{l} SU(n) \\ SL(n, R) \\ SU(p, q), \quad p+q = n,\ p \geqslant q. \\ SU^*(2n) \\ SL(n, C)^R \end{array}\right. \tag{2}$$

(i) $SU(p, q)$, $p+q = n$, $p \geqslant q$ is the group of all matrices in $SL(n, C)$ which leaves the quadratic form in C^n

$$z_1\bar{z}_1 + \ldots + z_p\bar{z}_p - z_{p+1}\bar{z}_{p+1} - \ldots - z_n\bar{z}_n \tag{3}$$

invariant. For $q = 0$, we obtain the unitary group $SU(n)$ of unimodular matrices. The remaining groups $SU(p, q)$, $q \neq 0$, may be called *pseudo-unitary groups*.

(ii) $SL(n, R)$ is the group of all real matrices with determinant one.

(iii) $SU^*(2n)$ (denoted also Q_{2n}) is the group of all matrices in $SL(2n, C)$ which commute with the transformation σ in C^{2n} given by

$$\sigma\colon (z_1, \ldots, z_{2n}) \to (\bar{z}_{n+1}, \ldots, \bar{z}_{2n}, -\bar{z}_1, \ldots, -\bar{z}_n). \tag{4}$$

(iv) $SL(n, C)^R$ is the group $SL(n, C)$ considered as a real Lie group.

B. Groups associated with algebras B_n:

$$SO(2n+1, C) \left\langle \begin{array}{l} SO(2n+1) \\ SO(p, q), \quad p+q = 2n+1,\ p \geqslant q. \\ SO(2n+1, C)^R \end{array}\right. \tag{5}$$

(i) $SO(2n+1, C)$ is the group of all matrices in $SL(2n+1, C)$ which conserve the quadratic form in C^{2n+1}:

$$z_1^2 + \ldots + z_{2n+1}^2. \tag{6}$$

(ii) $SO(p, q)$, $p+q = 2n+1$, $p \geqslant q$, is the group of all matrices in $SL(2n+1, R)$ which conserve the quadratic form

$$x_1^2 + \ldots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \ldots - x_{2n+1}^2. \tag{7}$$

For $q = 0$ we obtain the compact orthogonal group $SO(2n+1)$. The remaining groups $SO(p, q)$, $q > 0$, may be called pseudo-orthogonal.

(iii) $SO(2n+1, C)^R$ is the group $SO(2n+1, C)$ considered as a real Lie group.

C. Groups associated with algebras C_n:

$$Sp(n, C) \left\langle \begin{array}{l} Sp(n) \\ Sp(p, q) \\ Sp(n, R), \quad p+q = n,\ p \geqslant q. \\ Sp(n, C)^R \end{array}\right. \tag{8}$$

(i) $Sp(n, C)$ is the group of all matrices in $GL(2n, C)$ which conserve the exterior form in C^{2n}*

$$z_1 z_{2n}' - z_{2n} z_1' + \ldots + z_n z_{n+1}' - z_{n+1} z_n'. \tag{9}$$

(ii) $Sp(p, q)$ is the group of all matrices in $Sp(n, C)$ which conserve the hermitian form in C^{2n}

$$z^T \eta_{pq} \bar{z}, \tag{10}$$

where

$$\eta_{pq} = \begin{bmatrix} -I_p & & & 0 \\ & I_q & & \\ & & -I_p & \\ 0 & & & I_q \end{bmatrix}. \tag{11}$$

For $q = 0$ we obtain the compact symplectic group $Sp(n)$. It is evident from eq. (10) that

$$Sp(n) = Sp(n, C) \cap U(2n),$$

and

$$Sp(p, q) = Sp(n, C) \cap U(2p, 2q).$$

(iii) $Sp(n, R)$ is the group of all matrices in $GL(2n, R)$ which conserve the exterior form in R^{2n}:

$$x_1 x_{2n}' - x_{2n} x_1' + \ldots + x_n x_{n+1}' - x_{n+1} x_n'. \tag{12}$$

(iv) $Sp(n, C)^R$ is the group $Sp(n, C)$ considered as a real Lie group.

---

* The exterior form is $(x \wedge y)^{ij} = \frac{1}{2}(x^i y^j - x^j y^i)$.

D. Groups associated with algebras D_n:

$$\mathrm{SO}(2n, C) \to \begin{cases} \mathrm{SO}(2n) \\ \mathrm{SO}(p, q) \\ \mathrm{SO}^*(2n) \quad p+q = 2n,\ p \geqslant q. \\ \mathrm{SO}(2n, C)^R \end{cases} \tag{13}$$

(i) The definitions of $\mathrm{SO}(2n, C)$, $\mathrm{SO}(p, q)$, $p+q = 2n$, $p \geqslant q$, $\mathrm{SO}(2n, C)^R$ groups follow from definitions B(i), B(ii) and B(iii) by replacing index $2n+1$ by $2n$ in corresponding formulas.

(ii) The group $\mathrm{SO}^*(2n)$ is the group of all matrices in $\mathrm{SO}(2n, C)$ which conserve in C^{2n} the skew-hermitian form

$$-z_1\bar{z}_{n+1}+z_{n+1}\bar{z}_1-z_2\bar{z}_{n+2}+z_{n+2}\bar{z}_2- \ldots -z_n\bar{z}_{2n}+z_{2n}\bar{z}_n. \tag{14}$$

E. Connectedness of Classical Lie Groups

We show in ch. 5 that if a Lie group G is n-connected, then there are representations of G which are n-valued. The following theorem gives a description of the connectedness-property of classical Lie groups.

THEOREM 1. (a) *The groups* $\mathrm{GL}(n, C)$, $\mathrm{SL}(n, C)$, $\mathrm{SL}(n, R)$, $\mathrm{SU}(p, q)$, $\mathrm{SU}^*(2n)$, $\mathrm{SU}(n)$, $\mathrm{U}(n)$, $\mathrm{SO}(n, C)$, $\mathrm{SO}(n)$, $\mathrm{SO}^*(2n)$, $\mathrm{Sp}(n, C)$, $\mathrm{Sp}(n)$, $\mathrm{Sp}(n, R)$, $\mathrm{Sp}(p, q)$ *are all connected.*

(b) *The groups* $\mathrm{SL}(n, C)$ *and* $\mathrm{SU}(n)$ *are simply-connected.*

(c) *The groups* $\mathrm{GL}(n, R)$ *and* $\mathrm{SO}(p, q)$ $(0 < p < p+q)$ *have two connected components.* ▼

(For the proof cf. Helgason 1962, IX, § 4, and Želobenko 1962.)

The following table gives the description of the center $Z(G)$ of the universal covering group G of the compact simple Lie groups:

Table 1

G	$Z(G)$	$\dim G$
$\mathrm{SU}(n)$	Z_n	n^2-1
$\mathrm{SO}(2n+1)$	Z_2	$n(2n+1)$
$\mathrm{Sp}(n)$	Z_2	$n(2n+1)$
$\mathrm{SO}(2n)$	Z_4 if n = odd $Z_2\times Z_2$ if n = even	$n(2n-1)$

§ 8. Structure of Compact Lie Groups

We show here the remarkable result that any compact Lie group is the direct product of its center and finite number of compact simple subgroups.

We defined in 1.2.D that a Lie algebra L is compact if there exists in L a positive definite quadratic form $(\cdot, \cdot)$ satisfying the condition

$$([X, Y], Z)+(Y, [X, Z]) = 0. \tag{1}$$

We now show

PROPOSITION 1. *A Lie algebra L of a compact Lie group G is compact.*

PROOF: Let (X, X) be any positive definite quadratic form on L (e.g., $(X, X) = \sum x_i^2$, where x_i are the coordinates of X in a basis).

Set $\varphi_g(X) = (I_g X, I_g X)$, where $I_g X$ denotes the action of the adjoint group in L given by eq. 3.3(29). For fixed $g \in G$, $\varphi_g(X)$ considered as a function of a vector $X \in L$ is a positive definite quadratic form, while for fixed X, $\varphi_g(X)$ is a continuous positive function on G. Because G is compact, the new bilinear form defined by

$$(X, X)' = \int_G \varphi_g(X)\,dg$$

is a positive definite quadratic form on L. For an arbitrary $h \in G$ by virtue of invariance of the Haar measure, we have

$$(I_h X, I_h X)' = \int_G (I_{hg}X, I_{hg}X)\,dg = \int_G (I_g X, I_g X)\,dg = (X, X)', \tag{2}$$

i.e., $(\cdot, \cdot)'$ is invariant relative to the action of the adjoint group. Eq. (1) results by taking in eq. (2) one-parameter subgroups $h(t_i)$, $i = 1, 2, \ldots, \dim G$, of the adjoint group and differentiating. ▼

We now prove the main theorem.

THEOREM 2. *A compact connected Lie group G is a direct product of its connected center G_0 and of its simple compact connected Lie subgroups.*

PROOF: Let L be the Lie algebra of G. By virtue of proposition 1, L is compact. Hence by th. 1.3.2 we conclude that

$$L = N \oplus S_1 \oplus S_2 \oplus \ldots \oplus S_n, \tag{3}$$

where N is the center of L and S_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, are simple ideals of L. Consequently, by virtue of th. 3.3 we obtain

$$G = G_0 \times G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_n, \tag{4}$$

where G_0 is the connected center of G and G_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, are simple connected Lie subgroups of G.

§ 9. Invariant Metric and Invariant Measure on Lie Groups

A. Invariant Metric

We know by the Birkhoff–Kakutani theorem 2.4.3 that every Lie group admits a right invariant metric. We shall now explicitly construct this metric for an arbitrary matrix Lie group.