CHAPITRE IV

COMMANDABILITE ET OBSERVABILITE

IV.1. INTRODUCTION

L'utilisation de la représentation d'état suscite deux questions importantes :

1) Est-ce que pour tout couple $x_0 = x(t_0)$ et $x_1 = x(t_1)$, il existe un vecteur de commande $u(t)$ défini sur l'intervalle$[t_0, t_1]$ permettant de passer de l'état x_0 à l'état x_1 ?, c'est le problème de commandabilité du système.
2) Est-ce que la connaissance de $y(t)$ et de $u(t)$ sur l'intervalle$[t_0, t_1]$ permet d'obtenir $x_0 = x(t_0)$?, c'est le problème d'observabilité du système.

Ces deux propriétés sont nécessaires que ce soit pour la commande où il faudra que le système soit commandable, ou pour la synthèse d'observateur où il faudra que le système soit observable. Pour cela, il sera nécessaire de partir d'une représentation d'état minimale (commandable et observable) en éliminant (du modèle) les parties non commandables et non observables à la condition impérative que celles-ci soient asymptotiquement stables.

IV.2. COMMANDABILITE ET OBSERVABILITE

Considérons un système linéaire et stationnaire représenté par le modèle d'état suivante :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

IV.2.1. Commandabilité

Un système décrit par un modèle d'état (ou la paire $(A, B\ )$ est dit *commandable* si pour tout état x_f du vecteur d'état, il existe un signal d'entrée $u(t)$ d'énergie finie qui permet au système de passer de l'état initial x_0 à l'état x_f en un temps fini.

Un système est dit *complètement commandable* s'il est commandable à tout point de l'espace d'état.

IV.2.2. Critère de commandabilité de Kalman

Un système linéaire (A, B) est complètement commandable si et seulement si : $rang[Q_c] = n$, c-à-d, Q_c est régulière où n est l'ordre du système (nombre de variables d'état) avec :

$$Q_c = [B \quad AB \quad A^2B \ldots A^{n-1}B]$$

$Q_c$est dite matrice de commandabilité.

Exemple **:**

Système 1 : $\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}}_{\dot{X}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{X} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{B} u(t)$

$y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}}_{C} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{X}$

$Q_c = [B \quad AB\ ] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow det(Q_c) = 2 \neq 0$

Le système est commandable.

Système 2 : $\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}}_{\dot{X}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{X} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}}_{B} u(t)$

$y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{C} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{X}$

$Q_c = [B \quad AB\ ] = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow det(Q_c) = 0$

Le système n'est pas commandable.

IV.2.3. Observabilité

On dit qu'un état $x(t_0)$ est *observable*, s'il peut être identifié à partir de la connaissance de l'entrée $u(t)$ et de la sortie $y(t)$ sur un intervalle de temps fini $[t_0\ , t_1]$.
Le système est dit *complètement observable* si $\forall\ x(t_0) \in$ *à l'espace d'état*, il est possible de restituer ou identifier sa valeur à partir de la seule connaissance de $u(t)$ et $y(t)$.

IV.2.4. Critère d'observabilité de Kalman

Un système linéaire est complètement observable si et seulement si : $rang[Q_o] = n$, c-à-d, Q_o est régulière, où *n* est l'ordre du système (nombre de variables d'état) avec :

$$Q_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

Q_o est dite matrice d'observabilité.

Exemple 3.2 **:**

Etudier l'observabilité des deux systèmes donnés dans l'exemple 3.1.

Système 1 : $Q_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow det(Q_c) = -2 \neq 0.$

Système 2 : $Q_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow det(Q_c) = 1 \neq 0.$

Les deux systèmes sont observables.

Remarques :

- La Commandabilité d'un système est liée seulement aux matrices A et B.
- L'observabilité d'un système est liée seulement aux matrices A et C.
- Si la matrice A est *diagonale*, le système est complètement commandable si tous les éléments de B sont non nuls. le système est complètement observable si tous les éléments de C sont non nuls.

IV.3. STABILISABILITE ET DETECTABILITE

La commandabilité et d'observabilité sont des propriétés relativement fortes qui peuvent ne pas être vérifiés simultanément. Donc, il est possible que : $rang[Q_c] = r < n$, donc, la commandabilité ne se vérifie que pour une partie du vecteur d'état (r variables d'état). Les r variables d'état sont les variables d'états commandables du système et les *n-r* variables d'état sont les variables non commandables du système, dans ce cas le système est dit *partialement commandable*. De même il est possible que $rang[Q_o] < n$, donc l'observabilité ne se vérifie que pour une partie du vecteur d'état.
Si le système n'est pas commandable ou n'est observable, la représentation d'état peut être encore utile. En effet, deux propriétés plus faibles, à savoir, la stabilisabilité et la détectabilité peuvent alors être satisfaites et permettre au concepteur d'utiliser cette représentation d'état.

IV.2.5. Stabilisabilité

On dit qu'un système de pair (A,B) est stabilisable si tous ses modes instables sont commandables. Cela signifie de manière équivalente que tous ses modes non commandables sont stables.

IV.2.6. Détectabilité

On dit qu'un système de pair (A, C) est détectable si tous ses modes instables sont observable. Cela signifie de manière équivalente que tous ses modes non observables sont stables.

IV.4. COMMANDABILITE/OBSERVABILITE ET FONCTION DE TRANSFERT

Dans cette partie, on montre la relation entre la fonction de transfert et ces deux propriétés (commandabilité et observabilité) à travers un exemple. Soit un système d'ordre 4 :

$$\underbrace{\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\\ \dot{x}_4\end{bmatrix}}_{\dot{X}}=\underbrace{\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -4\end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}}_{X}+\underbrace{\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}}_{B}u(t)$$

$$y(t)=\underbrace{[1\quad 0\quad 1\quad 0]}_{C}\underbrace{\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}}_{X}$$

A est diagonale, donc :
La variable d'état x_1 : est commandable et observable (CO)
La variable d'état x_2 : est commandable et non observable ($C\bar{O}$)
La variable d'état x_3 : est non commandable et observable ($\bar{C}O$)
La variable d'état x_4 : est non commandable et non observable ($\bar{C}\bar{O}$)
$\dot{x}_1(t)=-x_1(t)+u(t) \quad \Longrightarrow X_1(s)=U(s)/(s+1)$
$\dot{x}_2(t)=-2x_2(t)+u(t) \Longrightarrow X_2(S)=U(s)/(s+2)$
$\dot{x}_3(t)=-3x_3(t) \qquad \Longrightarrow X_3(s)(s+3)=0$
$\dot{x}_4(t)=-3x_4(t) \qquad \Longrightarrow X_4(s)(s+4)=0$
$y(t)=x_1(t)+\ x_3(t) \quad \Longrightarrow U(s)=x_1(s)+\ x_3(S)$
Le système peut être décomposé en quatre sous-systèmes (CO,$C\bar{O}$, $\bar{C}O$,$\bar{C}\bar{O}$).

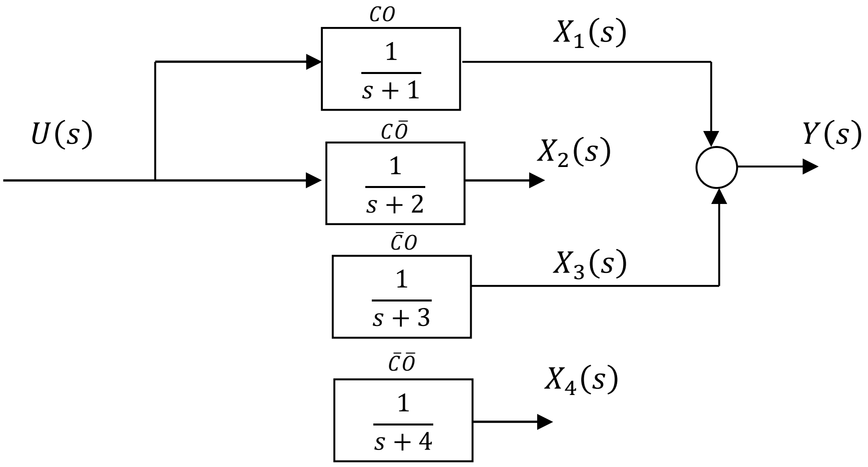

Figure 4.1 Différents modes d'un système.

On calcule la fonction de transfert :

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=C(sI-A)^{-1}B=[1\quad 0\quad 1\quad 0]\begin{bmatrix}\frac{1}{s+1} & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{s+2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{s+3} & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{s+4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}=\frac{1}{s+1}$$

Cependant, d'après la représentation d'état ce système est d'ordre 4, donc, on peut écrire :

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{(s+2)(s+3)(s+4)}{(s+1)(s+2)(s+3)(s+4)}$$

Remarques :

- Les modes (pôles) qui se compensent avec des zéros sont les modes non commandales, non observales ou non commandables et non observables. Donc, un système dont la fonction de transfert possède des zéros qui se compensent avec des pôles est un système non commandable et/ou non observable.
- Un système dont la fonction de transfert a tous ses zéros différents de ses pôles est un système commandable et observable.
- La commandabilité et l'observabilité sont des propriétés structurelles du système qui n'apparaissent pas dans la représentation par fonction de transfert. Donc, la fonction de transfert est quelques fois insuffisante pour décrire un système.

- Un système à la fois commandable et observable est dit *minimal*.
- L'ordre de la représentation d'état n'est pas toujours le même que celui de la fonction de transfert. Tout dépend de la commandabilité et de l'observabilité de ce dernier. Lorsqu'il est complètement commandable et observable, les deux ordres sont égaux.

IV.5. FORMES CANONIQUES SYSTEMES

En général, on désigne par *forme canonique* d'un système linéaire continu une représentation d'état dont les matrices A, B et C ont une forme très simple et par conséquent, possèdent un nombre réduit d'éléments différents de zéro dans leurs structures. Les formes canoniques les plus connues et utilisées sont : *la forme compagne de commandabilié* et *la forme compagne d'observabilité*. Comme on va le voir plus tard ces deux formes seront très utiles, quand on étudie le problème de la commande et de l'observation.

IV.5.1. Passage d'une réalisation à une autre

On peut passer d'une forme d'état à une autre tout simplement par un changement de base dans l'espace d'état R^n.
Considérons l'équation d'état (pour des raisons de lisibilité, on omet la variable *t*) :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A\,x + Bu \\ y &= Cx\end{aligned}$$

On peut appliquer au vecteur d'état x un changement de repère de sorte à obtenir un nouveau vecteur d'état $\tilde{x}$. Ainsi, soit le changement de base $x = M\tilde{x}$ où M est une matrice inversible appelée matrice de passage, il vient :

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}} &= M^{-1}A\,M\,\tilde{x} + M^{-1}Bu \\ y &= CM\tilde{x}\end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned}\dot{\tilde{x}} &= \tilde{A}\,\tilde{x} + \tilde{B}u \\ y &= \tilde{C}\tilde{x}\end{aligned}$$

où $\tilde{A} = M^{-1}A\,M$, $\tilde{B} = M^{-1}B$, $\tilde{C} = CM$. Comme il existe une infinité de matrices de passage M utilisables, il existe aussi une infinité de formes équivalentes qui correspondent toutes à la même fonction de transfert. En effet :

$$\begin{aligned}\tilde{G}(S) &= \tilde{C}\big(SI - \tilde{A}\big)^{-1}\tilde{B} + \tilde{D} = CM(SI - M^{-1}A\,M)^{-1}M^{-1}B + D \\ &= CM(M^{-1}(SI - A)\,M)^{-1}M^{-1}B + D = C(SI - A)^{-1}B + D = G(s)\end{aligned}$$

***Remarque** :*

- En outre, puisque $\tilde{A} = M^{-1}A\,M$, les valeurs propres de la matrice d'état A et la matrice $\tilde{A}$ sont les mêmes quelle que soit la forme considérée ; ce sont toujours les pôles de $G(s)$, c-à-d, les racines du polynôme caractéristique $P(s) = (sI - A)^{-1}$.
- Le passage d'une forme à une autre peut se révéler utile quand la seconde forme a une forme particulière (facilitant les calculs ou montrant certaines caractéristiques du système).

IV.5.2. Forme compagne de commandabilité

Considérons une représentation d'état quelconque :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A\,x + Bu \\ y &= Cx\end{aligned}$$

Si le système est commandable, on peut le mettre sous forme compagne de commandabilité :

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}} &= \tilde{A}\,\tilde{x} + \tilde{B}u \\ y &= \tilde{C}\tilde{x}\end{aligned}$$

tel que :

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{C} = [b_0 \;\; b_1 \;\; \dots \;\; b_{n-1}]$$

$x = M\tilde{x}$ (M matrice carrée inversible de dimension *n*)
En remplaçant $x = M\tilde{x}$ dans (3.10), on aura :

$$\begin{aligned}M\dot{\tilde{x}} &= A\,M\tilde{x} + Bu \\ y &= CM\tilde{x}\end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned}\dot{\tilde{x}} &= M^{-1}A\,M\tilde{x} + M^{-1}Bu \\ y &= CM\tilde{x}\end{aligned}$$

d'où $\tilde{A} = M^{-1}A\,M$, $\tilde{B} = M^{-1}B$, $\tilde{C} = CM$

- ***Calcul de la matrice de passage M***

$$\tilde{A} = M^{-1}A\,M \Longrightarrow \tilde{A}M^{-1} = M^{-1}A \Longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M^{-1}(1) \\ M^{-1}(2) \\ M^{-1}(3) \\ \vdots \\ M^{-1}(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M^{-1}(1) \\ M^{-1}(2) \\ M^{-1}(3) \\ \vdots \\ M^{-1}(n) \end{bmatrix} A$$

où $M^{-1}(i)$ est la ligne *i* de M, avec : *i*=1…*n*.
Donc :

$$\begin{aligned} &M^{-1}(2) = M^{-1}(1)A \\ &M^{-1}(3) = M^{-1}(2)A = M^{-1}(1)A^2 \\ &\vdots \\ &M^{-1}(n) = M^{-1}(n-1)A = M^{-1}(1)A^{n-1} \end{aligned}$$

Et :

$$-a_0M^{-1}(1) - a_1M^{-1}(2) - a_2M^{-1}(3) - \cdots - a_{n-1}M^{-1}(n) = M^{-1}(n)A$$

$$\Longrightarrow -a_0M^{-1}(1) - a_1M^{-1}(1)A - a_2M^{-1}(1)A^2 - \cdots - a_{n-1}M^{-1}(1)A^{n-1} = M^{-1}(1)A^n$$
$$\Longrightarrow M^{-1}(1)\underbrace{[A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1A + a_0I]}_{\substack{=0 \\ selon\ le\ théorème\ de\ Cayley-Hamilto}} = 0$$

On aussi :

$$\tilde{B} = M^{-1}B \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M^{-1}(1) \\ M^{-1}(2) \\ M^{-1}(3) \\ \vdots \\ M^{-1}(n) \end{bmatrix} B \Longrightarrow \begin{cases} M^{-1}(1)B = 0 \\ M^{-1}(2)B = 0 \\ M^{-1}(3)B = 0 \\ \vdots \\ M^{-1}(n)B = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} M^{-1}(1)B = 0 \\ M^{-1}(1)AB = 0 \\ M^{-1}(1)A^2B = 0 \\ \vdots \\ M^{-1}(1)A^{n-1}B = 1 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow M^{-1}(1)\underbrace{[B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-2}B \quad A^{n-1}B]}_{Q_c} = [0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 1]$$
$$\Longrightarrow M^{-1}(1)\,Q_c = [0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 1]$$
$$\Longrightarrow M^{-1}(1) = Q_c^{-1}(n) \qquad (\text{ la } n^{\text{ème}} \text{ ligne de } Q_c^{-1})$$

- ***Résumé: Calcul de la matrice de passage M vers une forme compagne de commandabilité***

  1) *Calculer la matrice de Commandabilité Q_c, si le système est commandable, c-à-d $|Q_c| \neq 0$, alors, suivre les étapes suivantes :*
  2) *Calculer Q_c^{-1}*
  3) *Mettre $M^{-1}(1) = Q_c^{-1}(n)$: c à d, 1-iere ligne de M^{-1}= n-ieme ligne de Q_c^{-1}*
  4) *Calculer les autres lignes de M comme suit :*

$$\begin{aligned} M^{-1}(2) &= M^{-1}(1)A \\ M^{-1}(3) &= M^{-1}(1)A^2 \\ M^{-1}(4) &= M^{-1}(1)A^3 \\ &\vdots \\ M^{-1}(n) &= M^{-1}(1)A^{n-1} \end{aligned}$$

IV.5.3. *Forme compagne d'observabilité*

Considérons une représentation d'état quelconque :

$$\dot{x} = A\,x + Bu$$
$$y = Cx$$

Si le système est observable, on peut le mettre sous forme compagne observable :

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\,\tilde{x} + \tilde{B}u$$
$$y = \tilde{C}\tilde{x}$$

tel que : $\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}$, $\tilde{B} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{bmatrix}$, $\tilde{C} = [0 \ 0 \dots 0 \ 0 \ 1]$

$x = N\tilde{x}$ (N matrice carrée de dimension *n* inversible)
En remplaçant $x = N\tilde{x}$ dans l'équation d'état et l'équation de sortie, on aura :

$$\begin{matrix} N\dot{\tilde{x}} = A\,N\tilde{x} + Bu \\ y = CN\tilde{x} \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \dot{\tilde{x}} = N^{-1}A\,N\tilde{x} + N^{-1}Bu \\ y = CN\tilde{x} \end{matrix}$$

d'où $\tilde{A} = N^{-1}A\,N$, $\tilde{B} = N^{-1}B$, $\tilde{C} = CN$

- ***Concept de dualité***

Il existe une analogie entre les formes compagne commandable et compagne observable, cette analogie est liée à la notion de *dualité*. On appellera systèmes duaux deux systèmes *S* et S^* définis respectivement par les équations :

Système *S*	Système S^*
$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$	$\dot{x}^*(t) = A^T x^*(t) + C^T u(t)$
$y(t) = Cx(t)$	$y^*(t) = B^T x^*(t)$

Ces systèmes sont tels que :

- Si *S* est commandable, alors S^* est observable.
- Si *S* est observable, S^*est commandable.

Il est donc possible de tester l'observabilité d'un système en vérifiant la commandabilité de système dual.

- ***Résumé : passage d'une forme quelconque vers une forme compagne d'observabilité***

1) Soit un système S : (A, B, C).
2) Calculer le système dual S^*: (A^T, C^T, B^T)
3) Calculer la matrice de passage M^* pour rendre le système S^* sous forme compagne de commandabilité. Le système obtenu est $\tilde{S}^{T*}$: $(\tilde{A}^T, \tilde{C}^T, \tilde{B}^T)$
4) Calculer le système dual du système $\tilde{S}^{T*}$, le système obtenu $\tilde{S}$: $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$ est sous forme compagne d'observabilité.