Équations différentielles linéaires

Equations différentielles linéaires du premier ordre

1.1 Présentation du problème

On se donne deux fonctions ***a*** et ***b*** définies et continues sur un intervalle ***I*** de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et on s'intéresse à l'équation différentielle linéaire du premier ordre

$$y' + ay = b$$

Résoudre l'équation différentielle, c'est trouver toutes les fonctions ***f*** dérivables sur ***I*** vérifiant

$$\forall x \in I,\ f'(x) + a(x)f(x) = b(x)$$

b est le second membre de l'équation différentielle (E). L'équation différentielle homogène (ou « sans second membre ») associée à l'équation différentielle est :

$$y' + ay = 0$$

1.2 Résolution de l'équation y ' + ay = b par la méthode de Lagrange

On se donne ***a : x → a(x)*** et ***b : x → b(x)*** deux fonctions continues sur un intervalle ***I*** de $\mathbb{R}$ à valeurs dans

On veut résoudre sur ***I*** l'équation différentielle **y ' + ay = b** . Puisque la fonction a est continue sur ***I***, la fonction ***a*** admet des primitives sur ***I***. On note ***A*** une primitive de la fonction a sur ***I***. Enfin, on fixe un réel ***x0*** de ***I***.

Soit f une fonction dérivable sur I. Puisque la fonction exponentielle ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

$$f'(x) + a(x)f(x) = b(x) \Leftrightarrow \forall x \in I,\ e^{A(x)}f'(x) + a(x)e^{A(x)}f(x) = b(x)e^{A(x)}\ (\text{car } \forall x \in I,\ e^{A(x)} \neq 0)$$

Ce qui conduit à

$$\left(e^{A(x)}f(x)\right)' = b(x)e^{A(x)} \Leftrightarrow e^{A(x)}f(x) = C + \int_{x_0}^{x} b(x)e^{A(x)}dx$$

$$\Leftrightarrow f(x) = Ce^{-A(x)} + e^{-A(x)} \int\ b(x)e^{A(x)}dx$$

(Sans conditions initiales)

D'après le théorème de Cauchy, pour tout (x_0, y_0) ϵ I, il existe une solution de f de $y' + ay = b$ vérifiant f(x_0)= y_0

(Avec conditions initiales)

$$\boxed{y(x) = y_0 e^{-A(x)} + e^{-A(x)} \int_{x_0}^{x} b(x)e^{A(x)}dx}$$

Avec ***A*** est la primitive de ***a,*** s'annulant sur x_0

Exemple 1

Soit l'équation différentielle **y ' + y = 1** sur **I = R*** et **y_0=y(x0)=1** **(avec conditions initiales)**

Solution

a=1, donc ***A(x)= (x-x₀)¸= x***

$$y(x) = 1e^{-x} + e^{-x}\int_0^x 1e^x dx = e^{-x} + e^{-x}(e^x - 1) = e^{-x} + 1 - e^{-x} = 1$$

Exemple 2

Soit l'équation différentielle **$2xy' - y = 3x^2$** sur **I =]0, +∞[** **(sans conditions initiales)**

Solution

L'équation s'écrira sous la forme

$$y' - \frac{y}{2x} = \frac{3}{2}x \quad \text{avec} \quad a(x) = -\frac{1}{2x} \quad \text{et} \quad b(x) = \frac{3}{2}x$$

$$a = -\frac{1}{2x} \quad \text{, donc} \quad A(x) = -\frac{1}{2}ln(x)$$

$$y(x) = Ce^{-A(x)} + e^{-A(x)}\int b(x)e^{A(x)}dx$$

$$y(x) = Ce^{\frac{1}{2}ln(x)} + e^{\frac{1}{2}ln(x)}\int \frac{3}{2}x\, e^{-\frac{1}{2}ln(x)}dx$$

$$y(x) = Ce^{ln(\sqrt{x})} + e^{ln(\sqrt{x})}\int \frac{3}{2}x\, e^{ln(\frac{1}{\sqrt{x}})}dx$$

$$y(x) = C\sqrt{x} + \sqrt{x}\int \frac{3}{2}\sqrt{x}\,dx$$

$$y(x) = C\sqrt{x} + \sqrt{x}\frac{3}{2}\left[\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\right]$$

$$y(x) = C\sqrt{x} + x^2$$

1.3 Structure de l'ensemble des solutions

Théorème 2. Soit a une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Les solutions de $(E_h) : y' + ay = 0$, sur I, sont les fonctions de la forme Cf_0 où f_0 est une solution non nulle quelconque de (E_h) sur I et $C \in \mathbb{K}$.

Démonstration.

Les solutions de $(E) : y' + ay = b$ sur I sont les fonctions de la forme $x \mapsto Ce^{-A(x)} + e^{-A(x)}\int_{x_0}^{x} b(t)e^{A(t)}\,dt$. Quand b est la fonction nulle, on obtient en particulier le fait que les solutions de $(E_h) : y' + ay = 0$ sur I sont les fonctions de la forme $x \mapsto Ce^{-A(x)}$. On note que la fonction $x \mapsto e^{-A(x)}$ n'est pas nulle. Donc, si on pose $f_1 = e^{-A}$, f_1 est une solution non nulle de (E_h) sur I et $\mathcal{S}_h = \{Cf_1,\ C \in \mathbb{K}\}$.

Si maintenant, f_0 est une solution non nulle quelconque de (E_h), alors il existe $C_0 \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ tel que $f_0 = C_0 f_1$. Mais alors,

$$\{Cf_1,\ C \in \mathbb{K}\} = \left\{\frac{C}{C_0}C_0 f_1,\ C \in \mathbb{K}\right\} = \left\{\frac{C}{C_0}f_0,\ C \in \mathbb{K}\right\} \subset \{C'f_0,\ C' \in \mathbb{K}\}$$

et $\{Cf_0,\ C \in \mathbb{K}\} = \{CC_0 f_1,\ C \in \mathbb{K}\} \subset \{C'f_1,\ C' \in \mathbb{K}\}$. Finalement $\mathcal{S} = \{Cf_0,\ C \in \mathbb{K}\}$.

Théorème 3. Soient a et b deux fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Les solutions de (E) : $y' + ay = b$ sur I sont les fonctions de la forme $Cf_0 + f_1$ où f_0 est une solution non nulle quelconque de (E_h) sur I (où (E_h) est l'équation homogène associée $y' + ay = 0$), f_1 est une solution particulière de (E) sur I et $C \in \mathbb{K}$.

Démonstration . D'après le théorème 1, l'équation (E) admet au moins une solution sur I. Soit f_1 une solution particulière de (E) sur I. Par construction, la fonction f_1 vérifie $f_1' + af_1 = b$ sur I. On note aussi f_0 une solution non nulle de (E_h) sur I. Soit alors f une fonction dérivable sur I.

$$\begin{aligned}
f \text{ solution de } (E) \text{ sur I} &\Leftrightarrow f' + af = b \Leftrightarrow f' + af = f_1' + af_1 \\
&\Leftrightarrow (f - f_1)' + a(f - f_1) = 0 \\
&\Leftrightarrow f - f_1 \text{ solution de } (E_h) \text{ sur I} \\
&\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{K}/\ f - f_1 = Cf_0 \text{ (d'après le théorème 2)} \\
&\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{K}/\ f = Cf_0 + f_1.
\end{aligned}$$

On a l'habitude de dire que la *solution générale* de l'équation différentielle (E) est la somme d'une *solution particulière* de l'équation (E) et de la *solution générale* de l'équation homogène associée (E_h) :

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{sol gén de } (E) \\ = \\ \text{sol part de } (E) \\ + \\ \text{sol gen de } (E_h).\end{array}}$$

Exemple 1. Soit (E) l'équation différentielle $xy' - 2y = 0$ sur $I =]0, +\infty[$. Sur I, l'équation (E) est équivalente à l'équation $y' - \frac{2}{x}y = 0$. Puisque la fonction $a : x \mapsto -\frac{2}{x}$ est continue sur $]0, +\infty[$, les solutions de l'équation (E) sur I sont de la forme Cf_0, $C \in \mathbb{R}$, où f_0 est une solution non nulle de (E) sur I. La fonction $f_0 : x \mapsto x^2$ est bien sûr solution de (E) sur I et donc les solutions de (E) sur I sont les fonctions de la forme $x \mapsto Cx^2$, $C \in \mathbb{R}$. ❏

Exemple 3. Soit (E) l'équation différentielle $xy' - 2y = 1$ sur $I =]0, +\infty[$. Sur I, l'équation (E) est équivalente à l'équation $y' - \frac{2}{x}y = \frac{1}{x}$. Puisque les fonctions $a : x \mapsto -\frac{2}{x}$ et $b : x \mapsto \frac{1}{x}$ sont continues sur $]0, +\infty[$, les solutions de l'équation (E) sur I sont de la forme $Cf_0 + f_1$, $C \in \mathbb{R}$, où f_0 est une solution non nulle de (E_h) sur I et f_1 est une solution particulière de (E). La fonction $f_0 : x \mapsto x^2$ est bien sûr solution de (E_h) sur I et la fonction $f_1 : x \mapsto -\frac{1}{2}$ est bien sûr solution de (E) sur I. Donc, les solutions de (E) sur I sont les fonctions de la forme $x \mapsto -\frac{1}{2} + Cx^2$, $C \in \mathbb{R}$. ❏

1.5 Méthode de variation de la constante

Dans ce paragraphe, on suppose connue une solution f_0 sur I de l'équation homogène (E_h), non nulle sur I. Pour résoudre l'équation différentielle (E) sur I, il ne manque plus qu'une solution particulière de (E) sur I. Le théorème suivant fournit un moyen d'en obtenir une.

Théorème 6. Soient a et b deux fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit (E) l'équation différentielle $y' + ay = b$. Soit f_0 une solution sur I, non nulle, de l'équation homogène associée (E_h).

Il existe une solution particulière de (E) sur I de la forme $f_1 : x \mapsto C(x)f_0(x)$ où C est une fonction dérivable sur I. De plus, la fonction C vérifie $C' = \dfrac{b}{f_0}$.

Démonstration. Soit C une fonction dérivable sur I puis $f_1 = Cf_0$.

$$\begin{aligned} f_1' + af_1 = b &\Leftrightarrow C'f_0 + Cf_0' + aCf_0 = b \Leftrightarrow C'f_0 + C \times \left(f_0' + af_0\right) = b \\ &\Leftrightarrow C'f_0 = b \text{ (car } f_0 \text{ est solution de } y' + ay = 0 \text{ sur I)} \\ &\Leftrightarrow C' = \frac{b}{f_0} \text{ (car } f_0 \text{ ne s'annule pas sur I).} \end{aligned}$$

Maintenant, les fonctions b et f_0 sont continues sur I (f_0 est continue sur I car dérivable sur I) et la fonction f_0 ne s'annule pas sur I. Donc, la fonction $\dfrac{b}{f_0}$ est continue sur I. Par suite, la fonction $\dfrac{b}{f_0}$ admet au moins une primitive sur I. On en déduit l'existence de la fonction C.

Exemple. Considérons l'équation différentielle $(E) : y' - y = \cos x$ sur $I = \mathbb{R}$. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' - y = 0$ sont les fonctions de la forme Cf_0 où f_0 est la fonction $x \mapsto e^x$ et $C \in \mathbb{R}$.

Déterminons une solution particulière de (E) sur I par la méthode de variation de la constante. Soient C une fonction dérivable sur I puis $f_1 = Cf_0$.

$$f_1 \text{ solution de } (E) \text{ sur I} \Leftarrow \forall x \in \mathbb{R},\ C'(x)e^x + C(x)e^x - C(x)e^x = \cos x \Leftarrow \forall x \in \mathbb{R},\ C'(x) = \cos x e^{-x}$$

$$\begin{aligned} \int \cos x e^{-x}\,dx &= \mathrm{Re}\left(\int e^{-x}e^{ix}\,dx\right) = \mathrm{Re}\left(\int e^{(-1+i)x}\,dx\right) \\ &= \mathrm{Re}\left(\frac{e^{(-1+i)x}}{-1+i}\right) + \lambda = \mathrm{Re}\left(\frac{e^{-x}(\cos x + i\sin x)(-1-i)}{2}\right) + \lambda \\ &= \frac{e^{-x}(-\cos x + \sin x)}{2} + \lambda. \end{aligned}$$

La fonction $C : x \mapsto \dfrac{e^{-x}(-\cos x + \sin x)}{2}$ convient et fournit la solution particulière $f_1 : x \mapsto \dfrac{-\cos x + \sin x}{2}$.

Les solutions de l'équation différentielle (E) sur I sont les fonctions de la forme $x \mapsto Ce^x + \dfrac{-\cos x + \sin x}{2}$, $C \in \mathbb{R}$.

1.6 Principe de superposition des solutions

Théorème 7 (principe de superposition des solutions). Soient a, b_1 et b_2 trois fonctions continues sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soient λ_1 et λ_2 deux nombres réels ou complexes.

On suppose que f_1 est une solution particulière sur I de l'équation $y' + ay = b_1$ et que f_2 est une solution particulière sur I de l'équation $y' + ay = b_2$. Alors, la fonction $f = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ est une solution particulière de l'équation différentielle $y' + ay = b$ où $b = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2$.

Equations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

On s'intéresse maintenant aux équations différentielles du type (E) : $ay'' + by' + cy = g(x)$ où a, b et c sont trois constantes complexes ($a \neq 0$) et g est une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. Cette équation est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants (les coefficients du premier membre ne varient pas quand x varie).

Les solutions de (E) sur I sont les fonctions f, deux fois dérivables sur I à valeurs dans $\mathbb{C}$, vérifiant :

$$\forall x \in I,\ af''(x) + bf'(x) + cf(x) = g(x).$$

L'équation homogène (ou « sans second membre ») associée à l'équation (E) est l'équation (E_h) : $ay'' + by' + cy = 0$.

Résolution de l'équation $ay'' + by' + cy = 0$, $(a, b, c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}$

Le cas général où a, b et c sont complexes

On se donne trois nombres complexes a, b et c, a étant non nul. On veut résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = 0$ (E_h), c'est-à-dire on veut trouver toutes les fonctions deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$, vérifiant pour tout réel x, $af''(x) + bf'(x) + cf(x) = 0$.

Découvrons le résultat. Par analogie avec le premier ordre, cherchons des solutions f de la forme $x \mapsto e^{zx}$, $z \in \mathbb{C}$. f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$af''(x) + bf'(x) + cf(x) = az^2e^{zx} + bze^{zx} + ce^{zx} = \left(az^2 + bz + c\right)e^{zx}.$$

$$\begin{aligned} f \text{ solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R} &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ \left(az^2 + bz + c\right)e^{zx} \\ &\Leftrightarrow az^2 + bz + c = 0 \ (\text{car } \forall x \in \mathbb{R},\ e^{zx} \neq 0). \end{aligned}$$

L'équation différentielle $ay'' + by' + cy = 0$, d'inconnue une fonction f, s'est « transformée » en une équation algébrique d'inconnue un nombre complexe z.

Définition 1. Soient a, b et c trois nombres complexes, a étant non nul. Soit (E_h) l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = 0$.

L'**équation caractéristique** de l'équation (E_h) est l'équation (E_c) :

$$az^2 + bz + c = 0,$$

d'inconnue un nombre complexe z.