Chapitre 1 : Intégrales simples et multiples 3 semaines

1.1 Rappels sur l'intégrale de Riemann et sur le calcul de primitives.

Non satisfait de la théorie de l'intégration de Cauchy portant sur les fonctions continues qui lui paraît insuffisante pour manipuler certaines séries de Fourier (pour des fonctions « peu » régulières), il publie (1854) une rigoureuse théorie de l'intégration pour les fonctions bornées (continues ou non) sur un intervalle fermé. D'autres théories de l'intégration ont vu le jour plus tard : intégrale de Stiltjes, intégrale de Lebesgue…etc. On sait depuis Mercator (1620-1687) et Leibniz (1646-1716), que si une fonction est positive, l'intégrale de cette fonction sur un intervalle [a ; b] évalue l'aire « sous la courbe ». L'idée de Bernhard RIEMANN (1826-1866) (Allemagne) a été de repartir de cette évaluation de l'aire en montrant qu'elle pouvait se faire même pour des fonctions non continues… et qui donc ne possèdent pas de primitive.

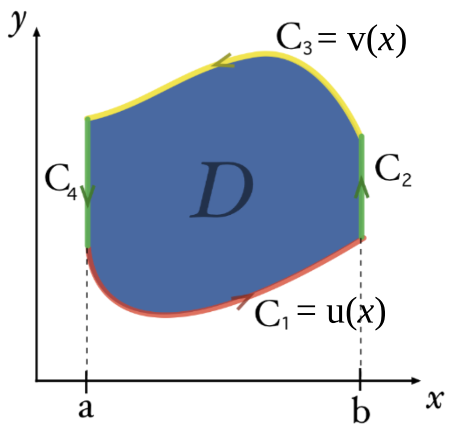
1.**2 Intégrales doubles**

1.2.1 Description hiérarchisée d'une partie fermée bornée de R^2

Définition : On appelle description hiérarchisée du domaine ***D***, une partie fermée bornée de R^2 : l'existence de 2 réels **a** et **b** et de **2** applications continues sur **[a,b]**, notées **u** et **v** tels que **a < b** et

$\forall x \in [a,b]$, $u(x) \leq v(x)$, avec

$$(x,y) \in D \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{x} \in [\mathbf{a},\mathbf{b}] \\ \mathbf{y} \in [\mathbf{u}(\mathbf{x}),\mathbf{v}(\mathbf{x})] \end{cases}$$



1.2.2 Intégrale double de f(x,y) dans le domaine D

On appelle intégrale double de f sur D (déjà défini par sa description hiérarchisé) :

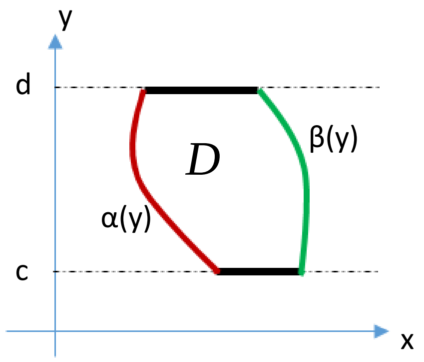
$$I = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left[\int_{u(x)}^{v(x)} f(x,y)\,dy \right] dx$$

NB. **L'integrale** contenant les deux **fonctions contours (v(x) et u(x))** doivent etre à **l'interieur**

Changement de bornes (Théorème de Fubini)

On peut réaliser la double intégration à partir de l'intervalle bornée sur l'axe y

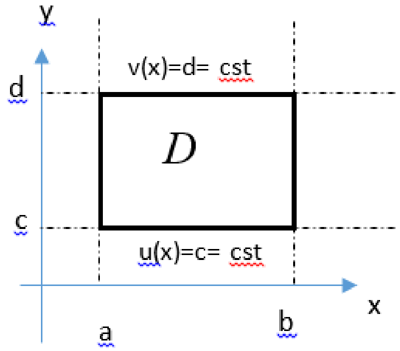
$$I = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left[\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx \right] dy$$



1.2.3 Calcul des surfaces connues à partir des intégrales doubles

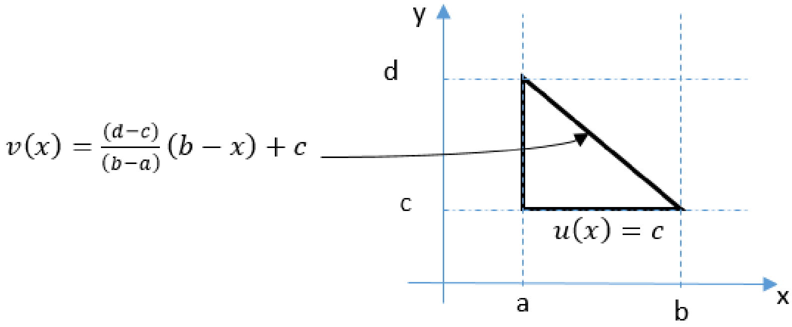
Pour le calcul des surfaces, la fonction est prise $\boldsymbol{f(x,y) = 1}$.

Rectangle



$$S_{rec} = \iint_D 1\,dx\,dy = \int_a^b \left[\int_{u(x)}^{v(x)} 1\,dy \right] dx = \int_a^b \left[\int_c^d 1\,dy \right] dx = (b-a)(d-c)$$

Triangle



$$S_{tri} = \iint_D 1\,dx\,dy = \int_a^b \left[\int_{u(x)}^{v(x)} 1\,dy \right] dx = \int_a^b \left[\int_c^{\frac{(d-c)}{(b-a)}(b-x)+c} 1\,dy \right] dx$$

$$S_{tri} = \int_a^b [y]_c^{\frac{(d-c)}{(b-a)}(b-x)+c} dx = \int_a^b \frac{(d-c)}{(b-a)}(b-x) \quad dx = \left[\frac{(d-c)}{(b-a)} \left(bx - \frac{x^2}{2} \right) \right]_a^b$$

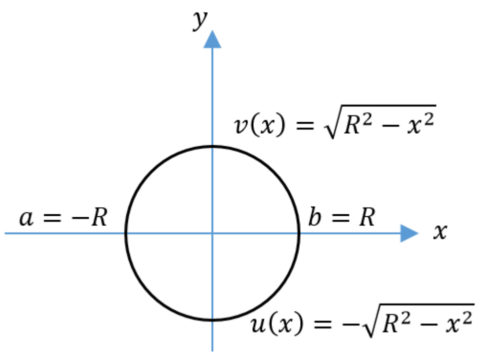
$$S_{tri} = \frac{(d-c)}{(b-a)} \left(b^2 - \frac{b^2}{2} - ba + \frac{a^2}{2} \right) = \frac{(d-c)}{(b-a)} \frac{1}{2} (b^2 - 2ba + a^2)$$

Finalement

$$S_{tri} = \frac{(d-c)}{(b-a)} \frac{1}{2} (b-a)^2 = \frac{(d-c)(b-a)}{2}$$

D'où la surface du triangle est la moitié que celle d'un rectangle.

CERCLE



$$S_{Cerc} = \iint_D 1\,dx\,dy = \int_a^b \left[\int_{u(x)}^{v(x)} 1\,dy \right] dx = \int_{-R}^{R} \left[\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} 1\,dy \right] dx$$

$$S_{Cerc} = \int_{-R}^{R} [y]_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{+\sqrt{R^2-x^2}} dx = \int_{-R}^{R} 2\sqrt{R^2 - x^2} \quad dx = \left[x\sqrt{R^2 - x^2} + R^2 \sin^{-1}\left(\frac{x}{R}\right)\right]_{-R}^{R}$$

$$S_{Cerc} = 2R^2 \sin^{-1}(1) = 2R^2\pi$$

1.2.4 Changement de variables

Théorème : $\varphi : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ de classe $\mathscr{C}^1$, $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ deux ouverts de $\mathbb{R}^2$.
D et Δ deux fermés bornés de $\mathbb{R}^2$, $\mathrm{D} \subset \mathcal{U}$, et, $\Delta \subset \mathcal{V}$.
De plus : $\varphi(\mathrm{D}) = \Delta$.
On suppose que les points de Δ qui ont plusieurs antécédents sont de surface nulle.
On note : $(x,y) = \varphi(u,v)$, $\dfrac{\mathrm{D}(x,y)}{\mathrm{D}(u,v)}$ le jacobien de φ en (u,v), et, $\left|\dfrac{\mathrm{D}(x,y)}{\mathrm{D}(u,v)}\right|$ la valeur absolue du jacobien.
Alors : $\displaystyle\iint_\Delta f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_\mathrm{D} g(u,v)\left|\frac{\mathrm{D}(x,y)}{\mathrm{D}(u,v)}\right| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$

On notera la valeur absolue du jacobien et la pseudo-simplification.

On rappelle que :

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

Notons qu'on fait un changement de variable :

- pour simplifier le domaine, ce qui est nouveau
- ou pour simplifier le calcul des primitives emboîtées. Notons enfin que le domaine change et donc sa description hiérarchisée aussi.

a. Changement de variables en coordonnées polaires

En coordonnées polaires, nous avons les relations suivantes

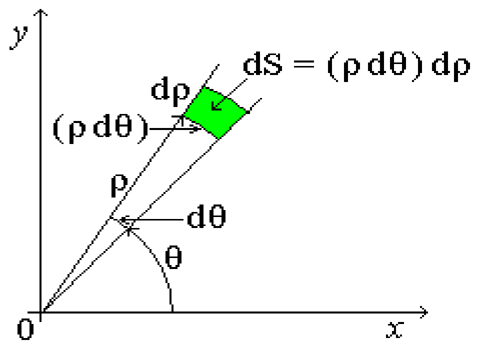
$$\begin{cases} x = \rho \cos(\theta) \\ y = \rho \sin(\theta) \end{cases}$$

Le jacobien dans ce cas s'écrira sous cette forme

$$\frac{D(x,y)}{D(\rho,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = \rho \geq 0$$

Le passage entre les intégrales doubles du cartésien en polaire se fera

$$\boxed{\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_\Delta g(\rho,\theta)\boldsymbol{\rho}\,d\rho\,d\theta = \iint_\Delta f(\rho\cos\theta\,,\rho\sin\theta)\boldsymbol{\rho}\,d\rho\,d\theta}$$



<u>Exemple calcul de la surface d'un cercle en coordonnées polaire</u>

Le passage des coordonnées cartésien aux coordonnées polaires par changement de repère s'effectue comme suit :

$$S_{Cerc} = \iint_D 1\,dx\,dy = \int_a^b \left[\int_{u(x)}^{v(x)} 1\,dy\right] dx = \int_0^R \int_0^{2\pi} 1\,\boldsymbol{\rho} d\theta d\rho$$

$$S_{Cerc} = \int_0^R \left[\int_0^{2\pi} 1\,d\theta\right] \boldsymbol{\rho} d\rho = 2\pi \int_0^R \boldsymbol{\rho} d\rho = 2\pi\frac{R^2}{2} = \pi R^2$$

<u>NB</u>

Le calcul de la surface d'un cercle par les coordonnées polaire est beaucoup plus simple car les variables et les bornes d'intégration sont simultanément indépendants contrairement au même cas en coordonnées cartésienne (passage de D à Δ.

1.3 Intégrales triples

1.3.1 Description hiérarchisée d'une partie fermée bornée de R^3

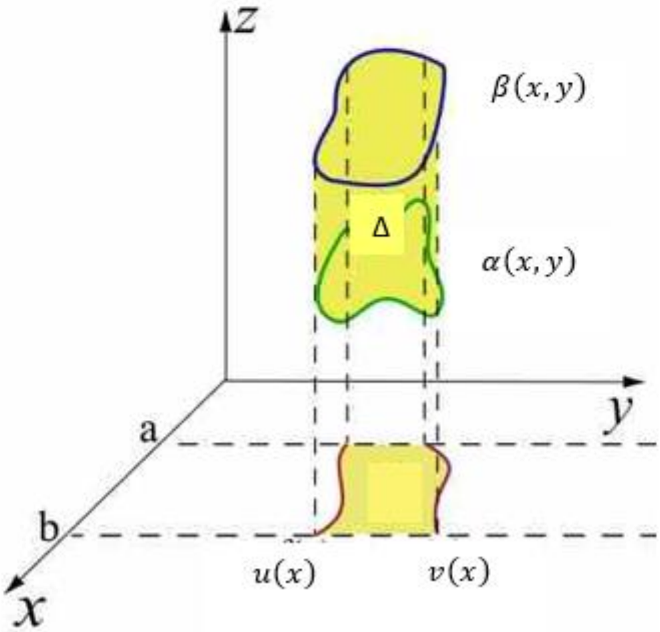
Δ un fermé borné de R^3, une description hiérarchisée de Δ est de la forme :

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \in \Delta \leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{x} \in [\mathbf{a},\mathbf{b}] \\ \mathbf{y} \in [\mathbf{u}(\mathbf{x}),\mathbf{v}(\mathbf{x})] \\ \mathbf{z} \in [\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x},\mathbf{y}),\boldsymbol{\beta}(\mathbf{x},\mathbf{y})] \end{cases}$$

On peut avoir les variables dans un autre ordre, l'important est que les bornes de chacune ne soient définies qu'en fonction des précédentes.

On définit alors l'intégrale triple de f continue sur Δ par :

$$I = \iiint_{\Delta} f(x,y,z)\, dx\, dydz = \int_a^b \left[\int_{u(x)}^{v(x)} \left[\int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x,y,z)\, dz \right] dy \right] dx$$



1.3.2 Changement de variables

Sous les mêmes hypothèses que celle en 2D

$$(x,y,z) = \varphi(u,v,w), \qquad (x,y,z)\epsilon D \leftrightarrow (u,v,w)\epsilon\Delta, et\ f(x,y,z) = g(u,v,w)$$

On a alors

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dydz = \iiint_\Delta g(u,v,w)\left|\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}\right| du\,dvdw$$

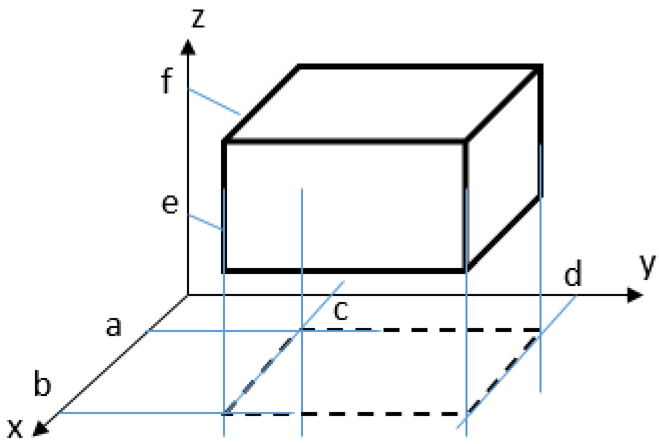
Le Jacobien dans ce cas

$$\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

1.3.3 Calcul des volumes à partir des intégrales triples

Pour le calcul de volume, la fonction est prise $\underline{\boldsymbol{f(x,y,z) = 1}}$.

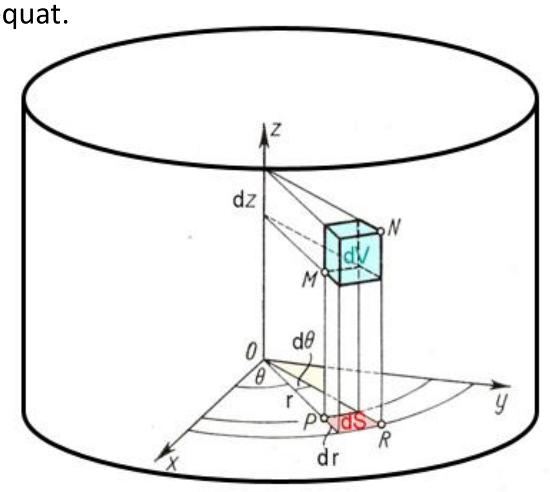
<u>Cube</u>



$$S = \iiint_\Delta 1\,dx\,dydz = \int_a^b \left[\int_c^d \left[\int_e^f 1\,dz\right] dy\right] dx = (b-a)(d-c)(f-e)$$

<u>Cylindre</u>

Pour le cylindre, on adopte le changement de variable adéquat.

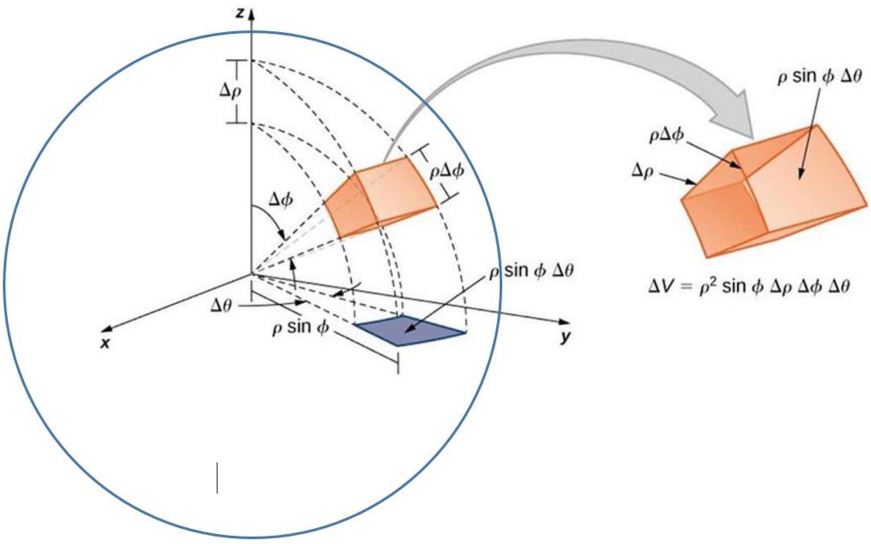


$$\begin{cases} x = \rho\cos(\theta) \\ y = \rho\sin(\theta) \\ \quad z = z \end{cases}$$

Le jacobien dans ce cas :

$$\frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\theta,z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \rho\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \boldsymbol{\rho}$$

$$\iiint_D 1\,dx\,dydz = \iiint_\Delta 1\boldsymbol{\rho}\,d\rho\,d\theta dz = \int_0^h \left[\int_0^{2\pi}\left[\int_0^R \rho\,d\rho\right] d\theta\right] dz = h\pi R^2$$



Sphère

Pour la sphère, on a

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta\sin\varphi \\ y = \rho\sin\theta\sin\varphi \\ \quad z = \rho\cos\varphi \end{cases}$$

En appliquant le jacobien:

$$\frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\theta,\varphi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta\sin\varphi & -\rho\sin\theta\sin\varphi & \rho\cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \rho\cos\theta\sin\varphi & \rho\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\varphi & 0 & -\rho\sin\varphi \end{vmatrix} = \boldsymbol{\rho^2\sin\varphi}$$

$$\iiint_D 1\,dx\,dydz = \iiint_\Delta 1\boldsymbol{\rho^2}\sin\varphi\;d\rho\,d\theta d\varphi = \int_0^\pi \left[\int_0^{2\pi}\left[\int_0^R \rho^2\,d\rho\right] d\theta\right] \sin\varphi\,d\varphi = 4\pi\frac{R^3}{3}$$

<u>Différents exemples avec des fonctions multiples seront traités au TD</u>

Chapitre 2 : Séries et suites de fonctions

I. Les Séries

En mathématiques, la notion de série permet de généraliser la notion de somme finie.

Étant donnée une suite de terme général u_n, étudier la série de terme général u_n c'est étudier la suite obtenue en prenant la somme des premiers termes de la suite (u_n), autrement dit la suite de terme général S_n défini par :

$$S_n = u_o + u_1 + \ldots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

L'étude d'une série peut passer par la recherche d'une écriture simplifiée des sommes finies en jeu et par la recherche éventuelle d'une limite finie quand n tend vers l'infini. Quand cette limite existe, la série est dite convergente, et la limite de la suite (S_n) est alors appelée somme de la série, et notée

$$s = \sum_{0}^{+\infty} u_n$$

I.1 Série convergente, série divergente.

Soit (u_n) une suite de nombres réels ou complexes, et, pour tout $n \in N$, soit

$$S_n = u_o + u_1 + \ldots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

la somme des $n + 1$ premiers termes de cette suite.

Si la suite (S_n) est convergente, on dit que la série de terme général u_n (ou série $\sum u_n$) est convergente. La limite, notée s, de la suite (S_n) est la ***somme*** de la série $\sum u_n$. On écrit alors :

$$s = \sum_{0}^{+\infty} u_n \; .$$

Si la suite (S_n) est divergente, on dit que la série de terme général u_n (ou série $\sum u_n$) est divergente.

I.2 Série de Riemann

Pour **α** un nombre complexe, on appelle **série de Riemann** la série suivante :

$$S = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

La série harmonique en est un cas particulier, pour α = 1 :

La série de Riemann de paramètre complexe α converge absolument si Re(α) > 1,
et diverge si Re(α) ≤ 1.

I.2.1 Étude de la série de terme général $u_n = (-1)^n$

On a, pour tout entier h : $s_{2h} = 1$ et $s_{2h+1} = 0$. La suite (s_n) n'a pas de limite et la série de terme général $u_n = (-1)^n$ est divergente.

I.2.2 Étude de la série de terme général $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}(n \geq 1)$

On a, pour tout entier $n \geq 1 : s_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$.

Donc la suite (s_n) tend vers $+\infty$ et la série de terme général $\frac{1}{\sqrt{n}}(n \geq 1)$ est divergente.

I.2.4 Étude de la série géométrique

On considère la série (appelée série géométrique de raison x) de terme général $u_n = x^n (x \in R)$

On a : $s_n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n$.

Dans le cas où $x = 1$, on a : $\forall n \geq 0, s_n = n + 1$. La suite (s_n) tend vers $+\infty$ et la série diverge.

Sinon, pour $x \neq 1$, on a : $s_n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$. La suite (s_n) est convergente si et seulement si la suite x^n est convergente. On distingue donc les cas $|x| < 1$ et $|x| \geq 1$.

- Si x vérifie $|x| \geq 1$, la suite (x^n) est divergente et la série $\sum x^n$ l'est également.
- Si x vérifie $|x| < 1$, la suite (x^n) est convergente et a pour limite 0. La série géométrique $\sum x^n$ est convergente et a pour somme $\frac{1}{1-x}$. Le reste r_n vérifie, pour tout entier n , $|r_n| \leq \frac{|x|^{n+1}}{1-x}$ et la convergence de la série est d'autant plus rapide que $|x|$ est petit.

Pour tout x appartenant à l'intervalle $]-1, 1[$, on a : .

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

I.3 Séries à termes positifs

L'intérêt de l'étude des séries à termes positifs, outre la simplicité du théorème fondamental lié à la croissance de la suite des sommes partielles, réside dans le fait qu'elle conduit à des règles de convergence absolue.

I.3.1 Convergence selon les règles de Cauchy et de d'Alembert

Soit k un réel positif ; on sait que la série de terme général k^n est convergente si $k < 1$, divergente si $k \geq 1$. Les règles que nous donnons ici concernent des séries qu'on peut comparer à une série géométrique. Dans cette optique, on étudie la suite $(\sqrt[n]{u_n})$, ce qui conduit à la règle de Cauchy, et, lorsqu'elle existe, la suite $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$, ce qui conduit à la règle de d'Alembert.

I.3.2 **Théorème : Règle de Cauchy.**

Soit (u_n) une suite à termes positifs. On suppose que la suite $(\sqrt[n]{u_n})$ a une limite L quand n tend vers $+\infty$. Alors :

- si $L < 1$, la série de terme général u_n est convergente ;
- si $L > 1$, la série de terme général u_n est divergente.

Preuve

On compare la série initiale avec une série géométrique.

1. Supposons $L < 1$; il existe un réel k tel que $L < k < 1$. Pour n assez grand, on a : $\sqrt[n]{u_n} < k$, d'où $u_n < k^n$. La série de terme général u_n est convergente.
2. Si $L > 1$, on a, pour n assez grand, $\sqrt[n]{u_n} \geq 1$, d'où $u_n \geq 1$. Le terme général u_n ne tend pas vers 0. La série de terme général u_n est donc divergente.

Exemple

La règle de Cauchy n'est bien adaptée qu'à l'étude des séries dont le terme général contiennent essentiellement des puissances.

1. ***Étude de la série de terme général*** $u_n = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2} \; (n \geq 1)$

On a : $\sqrt[n]{u_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$.

On en déduit : $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \frac{1}{e} < 1$. La série est convergente.

2. ***Étude de la série de terme général*** $u_n = \frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n} (n \geq 2)$

   On a : $\sqrt[n]{u_n} = \frac{n^{\frac{\ln n}{n}}}{\ln n} = \frac{\exp\frac{(\ln n)^2}{n}}{\ln n}$. Or $\lim_{n\to+\infty} \frac{(\ln n)^2}{n} = 0$, d'où $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = 0$. La série est convergente.

I.3.3 Théorème : Règle de d'Alembert.

Soit (u_n) une suite à termes positifs. On suppose que la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ est définie pour n assez grand et a une limite L quand n tend vers $+\infty$. Alors

- si $L < 1$, la série de terme général u_n est convergente ;
- si $L > 1$, la série de terme général u_n est divergente.

Preuve

1. Supposons $L < 1$. Il existe un réel k tel que $L < k < 1$ et il existe un entier n_0 tel que, pour tout entier $n \geq n_0$, on ait $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq k$. On en déduit, pour tout entier i : $u_{n_0+i} \leq k^i u_{n_0}$. La série de terme général u_n est convergente.
2. Si $L > 1$, il existe un entier n_1 tel que, pour tout entier $n \geq n_1$, on ait $u_n > 0$ et $u_{n+1} > u_n$ d'où $u_n \geq u_{n_1} > 0$. Le terme général u_n ne tend pas vers 0. La série de terme général u_n est donc divergente.

Exemple

La règle de d'Alembert est bien adaptée aux cas où u_n s'exprime à l'aide de produits, en particulier quand u_n contient des puissances ou des factorielles. On le verra dans le cas des séries entières.

1. ***Étude de la série de terme général*** $u_n = \frac{x^n}{n!} \ (x \in \mathbb{R}_+^*)$

   Il s'agit d'une série à termes tous strictement positifs. On a : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{x^n} = \frac{x}{n+1}$. On en déduit : $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0 < 1$.

La série est convergente (on retrouve le fait que le terme général $u_n = \frac{x^n}{n!} (x \in \mathbb{R}_+^*)$ tend vers 0).

On peut même calculer la somme de la série : en appliquant la formule de Taylor-Lagrange (cf. chapitre sur les fonctions de classe C^n) à la fonction exponentielle sur l'intervalle $[0, x]$, pour tout x réel strictement positif, on obtient l'égalité :

$\exp x = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$, c'est-à-dire, $\exp x = \sum_{0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$.

On reviendra sur ce point de vue dans le chapitre sur les séries entières.

Étude de la série de terme général $u_n = \frac{n!}{n^n} \ (n \geq 1)$

Tous les termes de la série sont strictement positifs. On a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{n!} \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}.$$

On en déduit : $\lim_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{e} < 1$.

La série est donc convergente. On en déduit en particulier que le terme général $u_n = \frac{n!}{n^n}$ tend vers 0.

Ainsi, quand on considère les trois infiniment grands $x^n (x > 0)$, $n!$, n^n , on a, pour n assez grand : $x^n < n! < n^n$.

En fait on a montré que, quand n tend vers $+\infty$, $x^n (x > 0)$ est négligeable devant $n!$ et $n!$ est négligeable devant n^n , ce qui signifie qu'on a :

$x^n = n! \epsilon_1(n)$ et $n! = n^n \epsilon_2(n)$ avec $\lim_{n \to +\infty} \epsilon_1(n) = \lim_{n \to +\infty} \epsilon_2(n) = 0$.

Remarque

Dans le cas de la règle de Cauchy comme dans le cas de la règle de d'Alembert, **si la limite L est égale à 1 on ne peut pas conclure**.

Le champ d'application de ces règles est restreint : il s'agit de séries dont la convergence est rapide (convergence géométrique) ou dont la divergence est rapide (divergence géométrique). Dans le cas de la divergence, on doit, en principe s'en être rendu compte avant : le terme général ne tend pas vers 0.

Attention ! Il ne suffit pas qu'on ait, pour tout n, $\sqrt[n]{u_n} < 1$ ou $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ pour que la série soit convergente. Dans le cas de la série harmonique, on a pour tout $n \geq 1$, $0 < \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ et la série est divergente. On remarque que l'une et l'autre des preuves utilisent explicitement l'existence d'un réel k vérifiant $L < k < 1$.

Remarque

Dans le cas de la règle de Cauchy comme dans le cas de la règle de d'Alembert, **si la limite L est égale à 1 on ne peut pas conclure**.

Le champ d'application de ces règles est restreint : il s'agit de séries dont la convergence est rapide (convergence géométrique) ou dont la divergence est rapide (divergence géométrique). Dans le cas de la divergence, on doit, en principe s'en être rendu compte avant : le terme général ne tend pas vers 0.

Attention ! Il ne suffit pas qu'on ait, pour tout n, $\sqrt[n]{u_n} < 1$ ou $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ pour que la série soit convergente. Dans le cas de la série harmonique, on a pour tout $n \geq 1$, $0 < \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ et la série est divergente. On remarque que l'une et l'autre des preuves utilisent explicitement l'existence d'un réel k vérifiant $L < k < 1$.

I.3 Séries de fonctions

Définition : Soit$(f_n)_n$ une suite des fonctions telles que $\forall n \geq 0, f_n : I \to R$. On appelle série de fonctions de terme général f_n , notée $\sum_{n\geq 0} f_n$, la suite de fonctions des sommes partielles $(S_n)_n$, où pour tout entier n on a $S_n = \sum_{k\geq 0}^{n} f_k$ ou encore $S_n(x) = \sum_{k\geq 0}^{n} f_k(x), \quad \forall x \in I.$

1. Convergence simple d'une série de fonctions :

Définition : Soit la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ telle que $\forall n \geq 0, f_n : I \to \mathbb{R}$.

- Si pour tout $x \in D \subseteq I$, la série numérique $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ converge, on dit que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge simplement sur D.

- D est dit le domaine de convergence de la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$.
- Si $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge sur$I$, on définit la fonction $f: I \to \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\,, \forall x \in I$$

  f est la somme de la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$.
- On définit le reste de la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$, noté (R_n), par

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)\,, \forall x \in I$$

Exemples :

- Soit $\sum_{n\geq 0} f_n$ telle que $\forall n \geq 0, f_n(x) = x^n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k = \begin{cases} \dfrac{1 - x^{k+1}}{1 - x} \; si\; x \neq 1 \\ (n+1) si\; x = 1 \end{cases}$$

  Donc $\sum_{n\geq 0} x^n$ est une série géométrique qui converge si et seulement si$|x| < 1$. D'où $\sum_{n\geq 0} x^n$ converge simplement sur l'intervalle$]-1,1[$, vers la fonction $S(x) = \frac{1}{1-x}$.
- Soit la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ où

$$\forall n \geq 0, \quad f_n : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{x^n}{n!} \end{array}$$

  On a $\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right| = \frac{|x|}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Donc la série $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$converge absolument pour tout réel x, d'après le critère de D'Alembert de convergence absolue.
- La série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ où

$$\forall n \geq 1, \quad f_n : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{x^2+n^2}} \end{array}$$

La série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{x^2+n^2}}$ est une série alternée convergente pour tout réel x, car la suite $\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+n^2}}\right)_n$ est positive décroissante vers 0 quand n tend vers l'infinie.

Remarque : Etudier la convergence simple d'une série de fonctions revient à fixer $x \in I$, et étudier la série numérique $\sum_{n\geq 0} f_n\,(x)$.

2. Convergence uniforme d'une série de fonctions :

Définition : Soit la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ telle que$\forall n \geq 0, f_n: I \to \mathbb{R}$.

On dit que $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge uniformément vers une fonction f sur I si et seulement si la suite de fonctions $(S_n)_n$ converge uniformément vers f sur$I$.

i.e. ssi $S_n \rightrightarrows f$ sur I

i.e. ssi $\lim_{n\to+\infty}(sup_{x\in I}|S_n(x) - f(x)|) = 0$

i.e. ssi $\lim_{n\to+\infty}(sup_{x\in I}|R_n(x)|) = 0$ $ou\ encore\ R_n \rightrightarrows 0$sur I

D'où : une série de fonctions converge uniformément sur I si et seulement si son reste converge uniformément vers 0 sur$I$.

Exemples :

- Soit la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ telle que $\forall n \geq 1,$ $\begin{array}{ll} f_n: & \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \\ & x \to \frac{(-1)^n}{x+n} \end{array}$

  $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{x+n}$ est une série alternée convergente pour toute valeur positive x, car la suite $\left(\frac{1}{x+n}\right)_{n\geq 1}$ est positive décroissante vers 0. Donc cette série des fonctions converge simplement sur$\mathbb{R}^+$.
  Pour montrer qu'elle converge uniformément sur$\mathbb{R}^+$, il faut et il suffit de montrer que son reste converge uniformément vers 0 :
  Comme $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{x+n}$ est une série alternée convergente, alors

$$|R_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}\right| \leq |f_{n+1}(x)| = \frac{1}{x+n+1}$$

  D'où $\forall x \geq 0, |R_n(x)| \leq \frac{1}{n+1} \Rightarrow 0 \leq sup_{x\geq 0}|R_n(x)| \leq \frac{1}{n+1}$
  Ce qui prouve que $\lim_{n\to+\infty}(sup_{x\geq 0}|R_n(x)|) = 0\ i.e\ R_n \rightrightarrows 0\ sur\ \mathbb{R}^+$.

Proposition 01 : Si la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge uniformément sur$I$, alors la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers la fonction nulle sur I.

$$\sum_{n\geq 1} f_n \text{ converge uniformément sur } I \Longrightarrow (f_n \rightrightarrows 0\ sur\ I)$$

Remarque: La convergence uniforme de la suite $(f_n)_n$vers la fonction nulle est une condition nécessaire non suffisante pour la convergence uniforme de la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$. Donc si $(f_n)_n ne\ converge\ pas\ uniformément\ vers\ 0\ sur\ I\ alors\ la\ série\ \sum_{n\geq 1} f_n$ ne converge pas uniformément sur I .

Exemple : Considérons la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ telle que $\forall n \geq 1,\begin{cases} f_n: & \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \\ & x \to nx^2e^{-x\sqrt{n}} \end{cases}$

Exemple : Considérons la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ telle que $\forall n \geq 1, \begin{cases} f_n: & \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \\ & x \to nx^2e^{-x\sqrt{n}} \end{cases}$

La série $\sum_{n\geq 1} nx^2e^{-x\sqrt{n}}$ est à termes positifs pour toute valeur réelle de x, on applique le critère de Riemann :

$\lim_{n\to+\infty} n^2 f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} n^2\, nx^2e^{-x\sqrt{n}} = 0, \forall x \geq 0.$

Donc la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} nx^2e^{-x\sqrt{n}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$.

Vérifions que cette série de fonctions ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}^+$; pour cela on montre que la suite de fonctions $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément vers la fonction nulle :

On a $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} nx^2e^{-x\sqrt{n}} = 0, \forall x \geq 0$, ce qui signifie que la suite $(f_n)_n$ converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}^+$. Les fonctions $f_n'(x) = nx(2 - x\sqrt{n})e^{-x\sqrt{n}}, \forall x \geq 0$, donc

$sup_{x\in\mathbb{R}^+}|f_n(x)| = f_n\left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right) = \frac{4}{e^2} \nrightarrow 0$. D'où ne converge pas uniformément vers la fonction nulle, et par conséquence la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ ne converge pas uniformément sur l'ensemble des réels positifs.

Proposition 02 :

- Si la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge uniformément vers f sur$I$, alors elle converge simplement vers f sur$I$.
- Si les séries de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ et $\sum_{n\geq 0} g_n$ convergent uniformément vers les fonctions $f\ et\ g$ sur$I$, alors pour toute valeur réelleα, la série $\sum_{n\geq 0}(f_n + \alpha g_n)$ converge uniformément vers $(f + \alpha g)$ sur$I$.

Théorème d'Abel de convergence uniforme : La série $\sum_{n\geq 0} f_n(x)g_n(x)$ converge uniformément sur I, si

- $\exists M > 0\ tq\ \forall n \geq 0, |\sum_{k=0}^{n} f_k(x)| \leq M, \forall x \in I$
- La suite de fonctions $(g_n(x))_n$ positive, décroissante et $g_n \rightrightarrows 0$ sur I.

3. La convergence normale d'une série de fonctions :

Définition : Soit la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ définie sur un domaine D (i.e. la série converge simplement sur D). S'il existe une série numérique positive convergente $\sum_{n\geq 0} a_n$ vérifiant :

$$\forall x \in D, |f_n(x)| \leq a_n$$

Alors on dit que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge normalement sur D.

Autrement dit, la série converge normalement sur D si :

$$\exists a_n \geq 0, \forall n \geq 0, \forall x \in D, |f_n(x)| \leq a_n\ et \sum_{n\geq 0} a_n\ converge$$

i.e. $\exists a_n \geq 0, \forall n \geq 0, sup_{x\in D}|f_n(x)| \leq a_n\ et \sum_{n\geq 0} a_n\ converge$

i.e. $\sum_{n\geq 0}\|f_n\|$ converge.

Exemple :

- Soit la série de fonctions $\sum_{n\geq 1}\frac{\cos nx}{n^2}, x \in \mathbb{R}$
  On a $\forall x \in \mathbb{R}, \left|\frac{\cos nx}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$, et la série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente. Donc la série $\sum_{n\geq 1}\frac{\cos nx}{n^2}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.
- Soit la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} ne^{-x\sqrt{n}}, x \in [1, +\infty[$.
  On a $f_n(x) = ne^{-x\sqrt{n}}$, et $f_n'^{(x)} = -n\sqrt{n}e^{-x\sqrt{n}} \leq 0, \forall x \in [1, +\infty[$.
  Donc $sup_{x\in[1,+\infty[}|f_n(x)| = f_n(1) = ne^{-\sqrt{n}}$, et la série $\sum_{n\geq 0} ne^{-\sqrt{n}}$ converge d'après le critère de Riemann, car $\lim_{n\to+\infty} n^2 ne^{-\sqrt{n}} = 0$. D'où la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} ne^{-x\sqrt{n}}$ converge normalement sur $[1, +\infty[$.

Remarques :

- La convergence normale entraine la convergence absolue, en effet :

  La série converge normalement sur D si :

$$\exists a_n \geq 0, \forall n \geq 0, \forall x \in D, |f_n(x)| \leq a_n \; et \sum_{n\geq 0} a_n \; converge$$

Donc, et d'après le critère de comparaison, la série $\sum_{n\geq 0}|f_n(x)|$ converge ce qui signifie que la série $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ converge absolument sur D.

- La convergence normale entraine la convergence uniforme, en effet :

  La série converge normalement sur D si :

$$\exists a_n \geq 0, \forall n \geq 0, \forall x \in D, |f_n(x)| \leq a_n \; et \sum_{n\geq 0} a_n \; converge$$

Ce qui implique $|\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_n(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_n$, comme $\sum_{n\geq 0} a_n \; converge$ son reste tendra vers 0 (indépendamment de x), d'où

$$0 \leq \lim_{n\to+\infty}(sup_{x\in D}|R_n(x)|) \leq \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_n = 0$$

i.e. $R_n \rightrightarrows 0$ sur D$\Longrightarrow \sum_{n\geq 0} f_n$ converge uniformément sur D.

$$\boxed{\begin{array}{ccc} La\ convergence\ normale & \Longrightarrow & La\ convergence\ uniforme \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ La\ convergence\ absolue & \Longrightarrow & La\ convergence\ simple \end{array}}$$

Exemples :

Exemples :

- On a déjà démontré que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{x+n}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$, mais $\left|\frac{(-1)^n}{x+n}\right| = \frac{1}{x+n} \sim \frac{1}{n}$ $\forall x \geq 0$, comme la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge, donc la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{x+n}$ ne converge pas absolument sur $\mathbb{R}^+$.

  D'autre part, $sup_{x\geq 0} \left|\frac{(-1)^n}{x+n}\right| = \frac{1}{n}$ *et* $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge, donc la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{x+n}$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}^+$.

  Ainsi la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{x+n}$ converge uniformément, mais pas normalement, ni absolument sur $\mathbb{R}^+$.

- Soit la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{x^2n^2+n}$ *avec* $x \in]0,1]$.

  On a $\left|\frac{(-1)^n}{x^2n^2+n}\right| = \frac{1}{x^2n^2+n} \leq \frac{1}{x^2n^2}$ $\forall x \in]0,1]$

  Or $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{x^2n^2}$ converge (série de Riemann), donc la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{x^2n^2+n}$ converge absolument sur $]0,1]$.

  Etudions sa convergence uniforme : $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{x^2n^2+n}$ est une série alternée convergente sur $]0,1]$, alors son reste est majoré par

$$\forall x \in]0,1], |R_n(x)| \leq f_{n+1}(x) = \frac{1}{x^2(n+1)^2+n+1} \Rightarrow \forall x \in]0,1], |R_n(x)| \leq \frac{1}{n+1}$$

$$D'où\ 0 \leq sup_{x\in]0,1]} |R_n(x)| \leq \frac{1}{n+1}$$

i.e. $R_n \rightrightarrows 0$ $sur]0,1]$, la série est donc uniformément convergente $sur]0,1]$.

Mais: $sup_{]0,1]} \frac{1}{x^2n^2+n} = \frac{1}{n}$, ce qui signifie que la série ne converge pas normalement, bien qu'elle est absolument et uniformément convergente.

Récapitulatif des différentes techniques pour démontrer la convergence uniforme :

- ✓ Déterminer le domaine de convergence simple , puis montrer que la suite de fonctions des restes $(R_n)_n$ converge uniformément vers la fonction nulle sur ce domaine.
- ✓ Montrer la convergence normale, en

$$\begin{cases} trouvant\ a_n \geq 0\ tel\ que\ |f_n(x)| \leq a_n, pour\ tout\ x\ et \sum_{n\geq 0} a_n\ converge \\ ou\ bien, en\ calculant\ sup_{x\in D} |f_n(x)| = b_n\ et \sum_{n\geq 0} b_n\ converge \end{cases}$$

- ✓ Appliquer le théorème d'Abel de convergence uniforme.