UMSB. Jijel. Faculté SE & I. Département de physique 2020/2021
3ème année licence PF et PM
Module : Méthode mathématique pour la physique

Les fonctions d'Euler bêta et gamma

Exercice 1:

1- Montrer que : $\beta(p,q) = \beta(q,p)$

2- Montrer que : $\int_0^{\pi/2}(\sin\theta)^n d\theta = \int_0^{\pi/2}(\cos\theta)^n d\theta$ puis calculer les intégrales.

3- Calculer : $\frac{\Gamma(6)}{2\Gamma(3)}, \frac{\Gamma(5/2)}{\Gamma(1/2)}, \frac{\Gamma(7)}{2\Gamma(4).\Gamma(3)}$

Exercice 2:

1- Exprimer chacune des intégrales ci-dessous en termes des fonctions bêta et gamma (ou factorielle) :

a) $I = \int_0^1 \left[\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right]^{a-1} dx$ b) $J = \int_0^1 x^m(1-x^n)^p dx$

c) $K = \int_a^b (b-x)^{m-1}(x-a)^{n-1} dx$

2- Evaluer : a) $\int_0^\infty \sqrt{y}\, e^{-y^3} dy$, b) $\int_0^{\pi/2} \sin^6\theta\, d\theta$

Exercice 3 :

1- Montrer que : $\int_0^\infty x^a e^{-bx^c} dx = \frac{\Gamma\left(\frac{a+1}{c}\right)}{cb^{(a+1)/c}}$

Avec a>-1, b>0, c>0 sont des constantes satisfont la convergence de cette intégrale.

2- Déduire : $I = \int_0^\infty e^{-x^2} dx$ $J = \int_0^\infty x^{1/2} e^{-x^{1/3}} dx$

Exercice 4 :

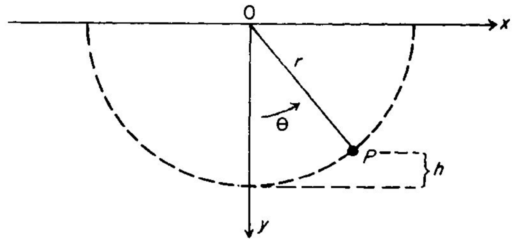
1- Montrer que : $2^{2x+1} x! \left(x+\frac{1}{2}\right)! = (2x+1)! \sqrt{\pi}$

Puis déduire : $\left(n-\frac{1}{2}\right)! = \frac{\sqrt{\pi}(2n)!}{2^{2n} n!}$

2- Montrer que : $\int_0^2 x\sqrt[3]{8-x^3} dx = \frac{16\pi}{9\sqrt{3}}$

Exercice 5 :

I - Soit un pendule pivotant sur un arc d'un angle 180°. Les coordonnées polaires de ce dernier sont r=OP= C^{te} et θ variant de $-\frac{\pi}{2}$ à $\frac{\pi}{2}$ comme le montre la figure 1.



1- Donner l'expression de l'énergie potentielle E_p à un instant t, si on considère que son origine ($E_p(0)=0$) est lorsque $\theta = 0$ (la position la plus basse).
2- Donner l'expression de l'énergie cinétique E_c en fontion de r et θ.

II- On considère que l'énergie du système (E_p+E_c) est conservée lors du movement du pendule, autrement dit, $E_p+E_c=C$ (C=cte)

3- Calculer C sachant que les conditions initiales du mouvement sont : t = 0, $\theta = \frac{\pi}{2}$, $v = r\frac{d\theta}{dt} = 0$
4- Donner l'expression de $\frac{d\theta}{dt}$ puis déduire dt.
5- Calculer le temps que met le pendule pour osciller de $\theta = 0$ à $\theta = \frac{\pi}{2}$