Chapitre II

STATIQUE DES FLUIDES : HYDROSTATIQUE

L'hydrostatique étudie les conditions d'équilibre des liquides au repos. Ce chapitre aborde l'étude de la répartition de la pression, notamment en fonction de la distance verticale, ainsi que les forces qui en résultent

1. Notion de Pression

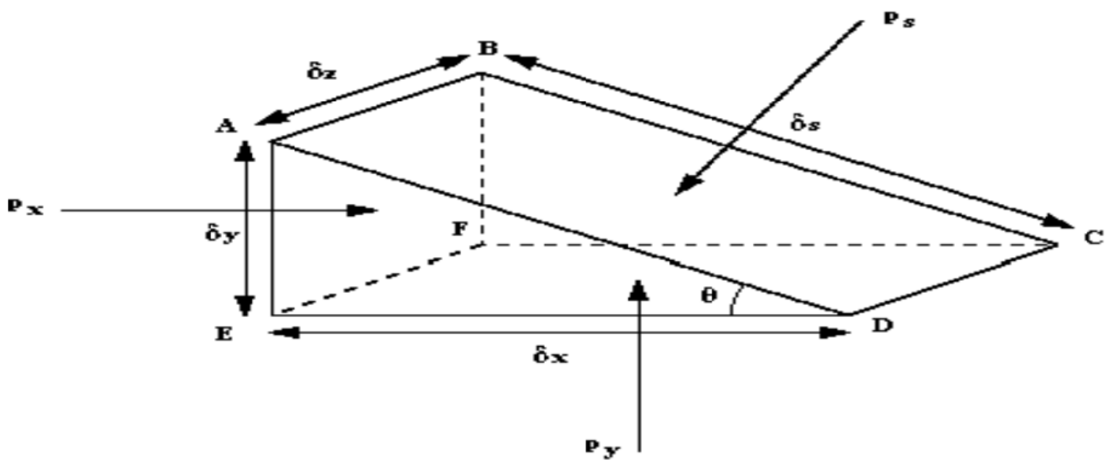
La pression est définie comme la force exercée par un fluide par unité de surface :

$P = F/S$

Unité : N/m^2 ou $kg.m^{-1}.s^{-2}$

Remarque : La pression peut aussi s'exprimer en :
Pascal (Pa) : 1 Pa = 1 N/m^2
Bar (Bar) : 1 Bar = 1 0^5 N/m

2. Loi de Pascal



Considérons un élément d'un fluide ABCDEF (prisme triangulaire) et soient Px , Py et Ps les pressions dans les 3
directions x , y et s .
Etablissons la relation entre Px , Py et Ps :

Selon la direction x :
▪ Force due à Px : $Fxx = Px.(ABFE)\ =Px.dydz$
▪ Force due à Py : $Fyx\ =0$

▪ Composante due à P_s : $F_{sx} = -P_s.(ABCD.\sin\theta) = -P_s.dsdz\dfrac{dy}{ds}$ car $\sin\theta = \dfrac{dy}{ds}$

donc : $F_{sx} = -P_s.dydz$

et puisque le fluide est en équilibre : $F_{xx} + F_{yx} + F_{sx} = 0$

d'où : $P_x.dydz - P_s.dydz = 0 \rightarrow \boxed{P_x = P_s}$

- Selon la direction y :

▪ Force due à P_y : $F_{yy} = P_y.(DCFE) = P_y.dxdz$

▪ Force due à P_x : $F_{xy} = 0$

▪ Composante due à P_s : $F_{sy} = -P_s.(ABCD.\cos\theta) = -P_s.dsdz\dfrac{dx}{ds}$ car $\cos\theta = \dfrac{dx}{ds}$

donc : $F_{sy} = -P_s.dxdz$

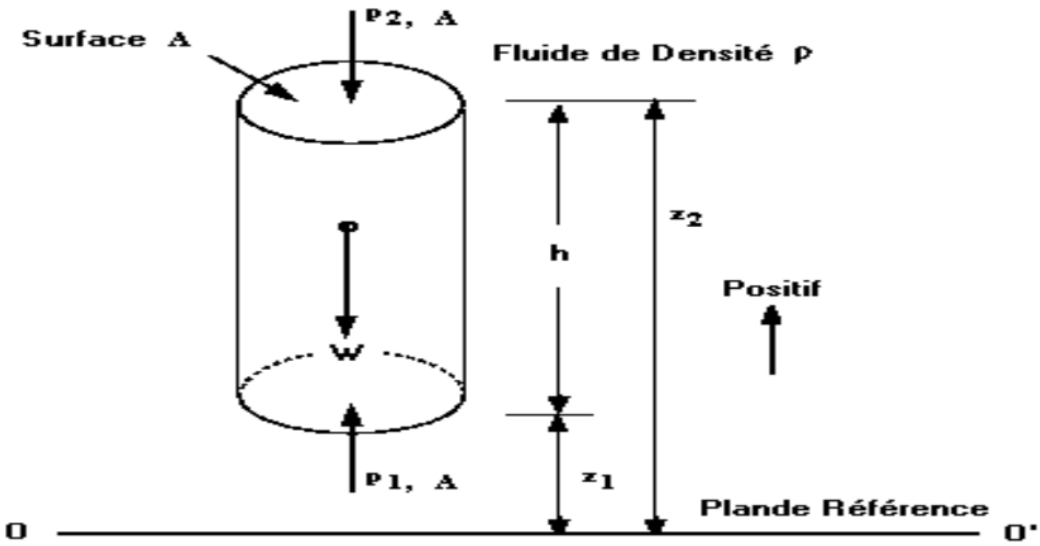
et puisque le fluide est en équilibre : $F_{yy} + F_{xy} + F_{sy} = 0$

d'où : $P_y.dxdz - P_s.dxdz = 0 \rightarrow \boxed{P_y = P_s}$

et finalement : $\boxed{P_x = P_y = P_s}$

Loi de Pascal : ‘’ *La pression d'un fluide en un point est la même dans toutes les directions* ‘’

3. Equation Fondamentale de l'Hydrostatique



Soit un élément de fluide de masse spécifique ρ représentant une colonne verticale de section transversale constante A . Considérons 2 sections situées à des distances Z_1 et Z_2 par rapport à un plan de référence OO' . Soient P_1 et P_2 les pressions dans ces 2 sections .

- Exprimons la variation de pression $P_1 - P_2$:

Le fluide étant en équilibre , la somme des forces dans la direction verticale est donc égale à Zéro :

- Force due à P_1 : $F_1 = P_1.A$
- Force due à P_2 : $F_2 = P_2.A$
- Force due au poids de la colonne du liquide : $W = mg = \rho g V = \rho g A(Z_2 - Z_1)$
  avec V = Volume de l'élément considéré = $\rho g.A.(Z_2-Z_1)$

Si l'on considère le sens positif vers le haut , la condition d'équilibre s'écrit donc :

$$F_1 - F_2 - W = 0 \Rightarrow P_1 A - P_2 A - \rho g A(Z_2 - Z_1) = 0$$

et donc : $\boxed{P_1 - P_2 = \rho g\left(Z_2 - Z_1\right)}$

<u>Remarques</u> :

1.- Loi de la statique des fluides

$$P_1 - P_2 = \rho g(Z_2 - Z_1) \Rightarrow P_1 + \rho g Z_1 = P_2 + \rho g Z_2 \Rightarrow \frac{P_1}{\rho g} + Z_1 = \frac{P_2}{\rho g} + Z_2$$

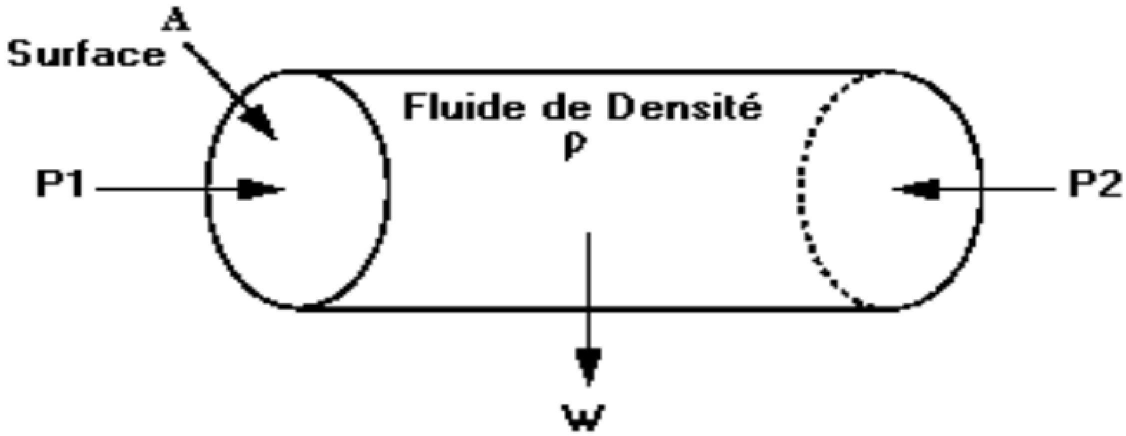
et donc : $\boxed{Z + \dfrac{P}{\rho g} = C^{ste}}$: Loi de la statique des fluides

2.- En posant $Z_2-Z_1 = h$ et $P_2 = P_0$, On aura :

- $\boxed{P_1 = P_0 + \rho g h}$
- Et si $P_0 = 0$: $P_1 = \rho g h$

La pression augmente donc linéairement en fonction de la profondeur

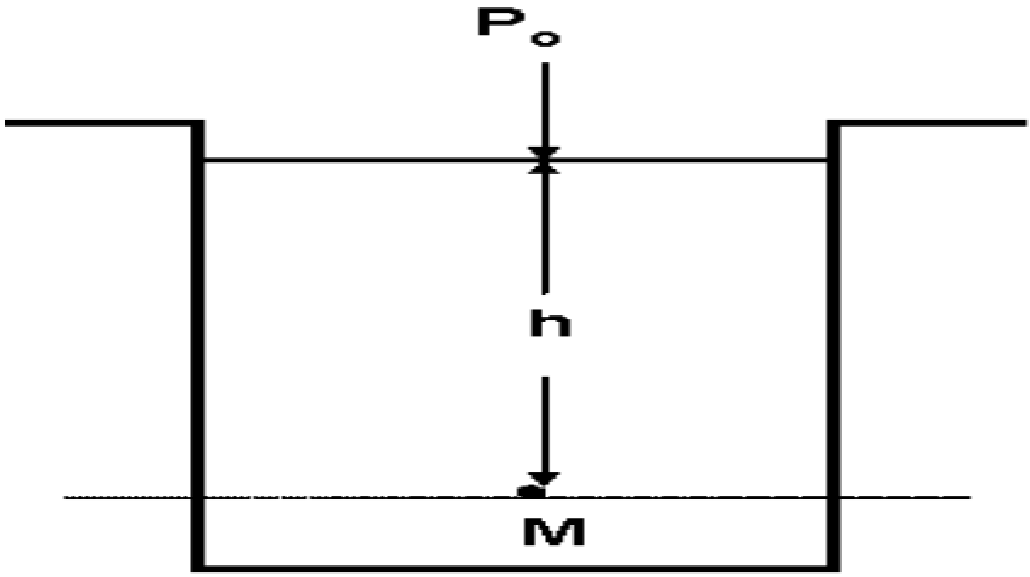
Egalité des pressions sur un même plan horizontal :



Si l'on considère la direction horizontale , on aura :
$P1\ A - P2\ A \Rightarrow 0 = 0 + P1 = P2$ (car la c*omposante du poids W selon l'horizontale est nulle)*

Sur un même plan horizontal , toutes les pressions sont égales (Pressions Isobares)

4.Pression effective et Pression absolue :



Au point M , la pression est égale à :
$PM = Po + \rho gh$
A la surface libre du fluide , la pression est généralement représentée par la pression atmosphérique Patm , d'où :

$$\boxed{P_M = P_{atm} + \rho g h}$$: **Pression Absolue**

Et si l'on néglige l'influence de la pression atmosphérique ($P_{atm} = 0$) :

$$\boxed{P_M = \rho g h}$$: **Pression Effective**

5. Charge piézométrique , hauteur piézométrique :

On a vu que : $Z + \frac{P}{\rho g} = C^{ste}$ avec :

- $Z[L]$: hauteur de position ou côte géométrique
- $\frac{P}{\rho g}[L]$: Hauteur piézométrique
- $Z + \frac{P}{\rho g}[L]$: Hauteur ou charge totale

6.Notion de hauteur du vide :

Dans certains cas , la pression absolue est inférieure à la pression atmosphérique :
$PM = Patm + \rho gh \langle Patm$
Il se crée alors une dépression dont la hauteur correspondante , appelée ‘’ Hauteur du Vide ‘’ , est égale à :

$$\boxed{h_{vide} = \frac{P_{atm} - P_{abs}}{\rho g}}$$

7. Signification énergétique de l'équation de la statique des fluides :

On a vu que : $Z + \frac{P}{\rho g} = C^{ste} = E_p$

Si l'on multiplie les 2 termes de cette équation par le poids élémentaire mg , on aura :

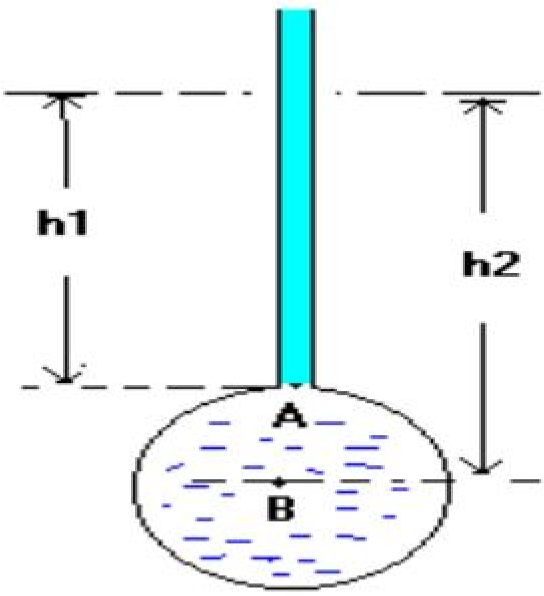
$mgZ + mg\frac{P}{\rho g} = mgE_p$ avec :

- $mgZ[Nm]$: Energie potentielle de position
- $mg\frac{P}{\rho g}[Nm]$: Energie potentielle de pression
- $mgE_p[Nm]$: Energie potentielle totale

II.- Dispositifs de mesure de la pression

Mesure des pressions par les tubes manométriques :

1. Le tube manométrique simple ou piézomètre :

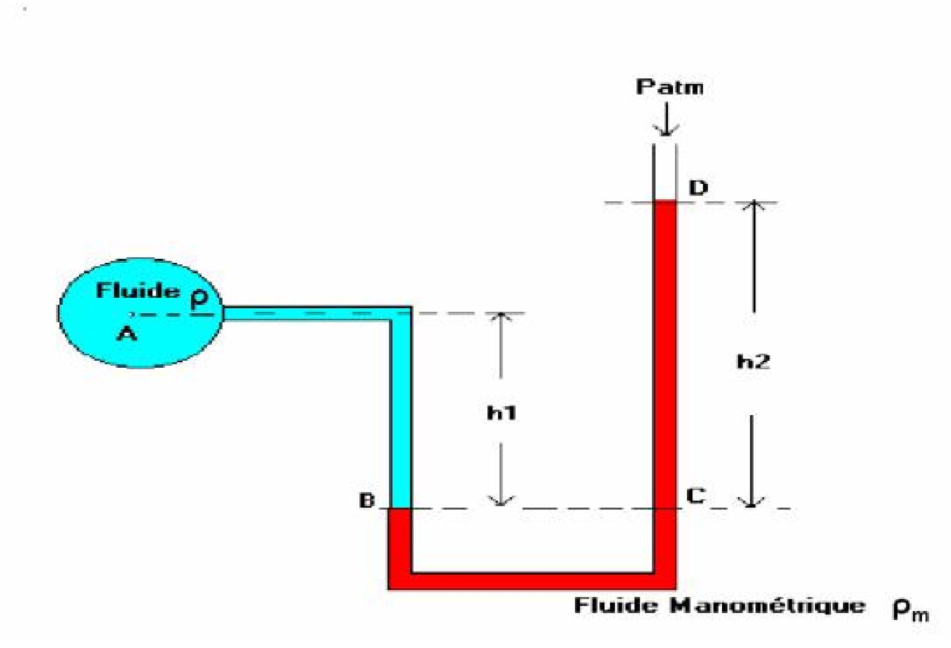


Tube piézomètrique

$PA = \rho gh1$
$PB = \rho gh2$

PA et PB sont appelées ‘’ Pressions Manométriques ‘’
h1 et h2 sont appelées ‘’ Hauteurs Manométriques ‘’

MANOMÈTRE EN U



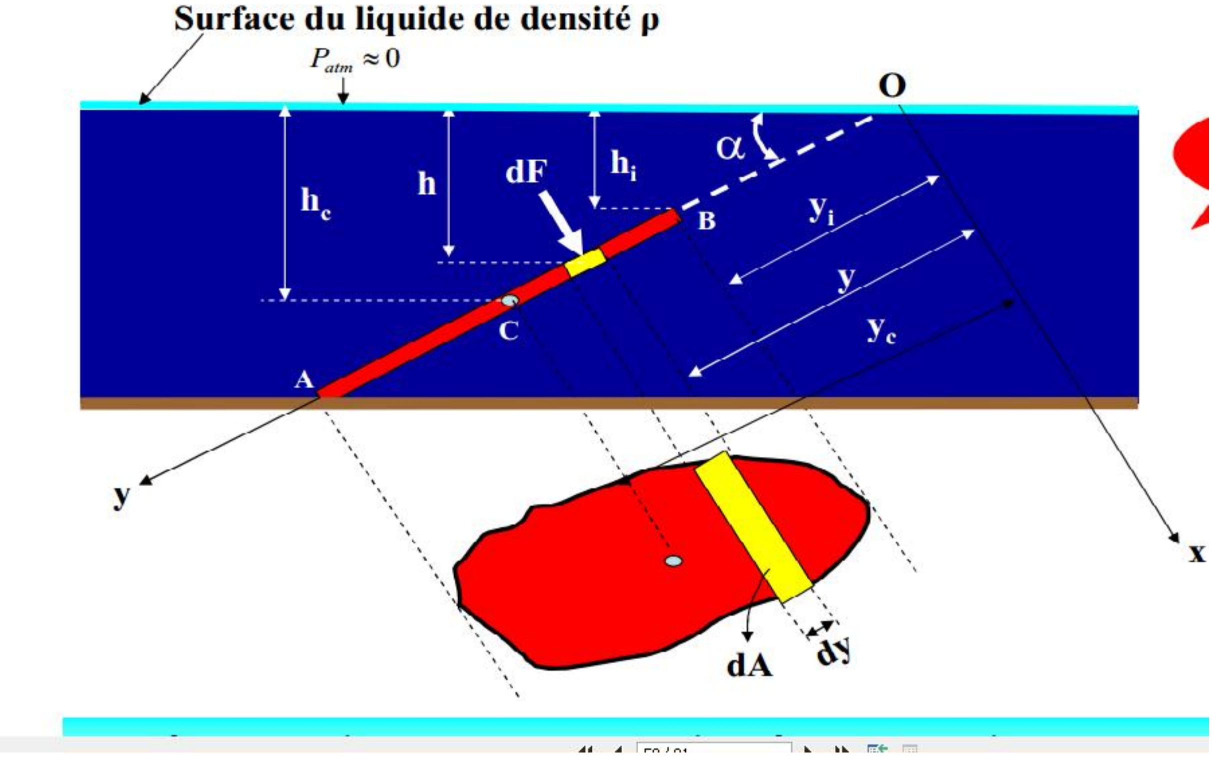
On a : $P_B = P_C$

- Partie Gauche : $P_B = P_A + \rho g h_1$
- Partie Droite : $P_C = P_D + \rho_m g h_2 = P_{atm} + \rho_m g h_2$

Puisque l'on mesure une pression manométrique , on soustrait donc P_{atm} : → $P_C = \rho_m g h_2$

et comme $P_B = P_C \Rightarrow P_A + \rho g h_1 = \rho_m g h_2 \Rightarrow P_A = \rho_m g h_2 - \rho g h_1$

III **- Forces de Pression des Fluides sur les Surfaces:**



Soit une surface plane AB inclinée d'un angle α par rapport à l'horizontale et immergée dans un fluide de densité massique ρ et C son centre de gravité .
Etablissons l'expression de la force Résultante F des forces exercées par le fluide sur la surface AB (voir diagramme des forces exercées) : Considérons pour cela la force élémentaire dF s'exerçant sur une surface élémentaire dA :

$$dF = PdA = (P_{atm} + \rho gh)dA = P_{atm}dA + \rho ghdA$$

La force résultante F est égale à l'intégrale de dF sur toute la surface AB :

$$F = \int_A dA = \int_A P_{atm}dA + \int_A \rho ghdA$$

or , $h = y\sin\alpha$ d'ou :

$$F = P_{atm}A + \int_A \rho gy\sin\alpha dA = P_{atm}A + \rho g\sin\alpha\int_A ydA =$$

Le terme $\int_A ydA$ représente le '' ***Moment Statique*** '' de la surface AB par rapport à Ox : $\int_A ydA = y_c A$ avec $\mathbf{y_c}$ **:** Ordonnée du centre de gravité de la surface AB .

L'expression de F devient : $F = P_{atm}A + \rho g\sin\alpha y_c A$

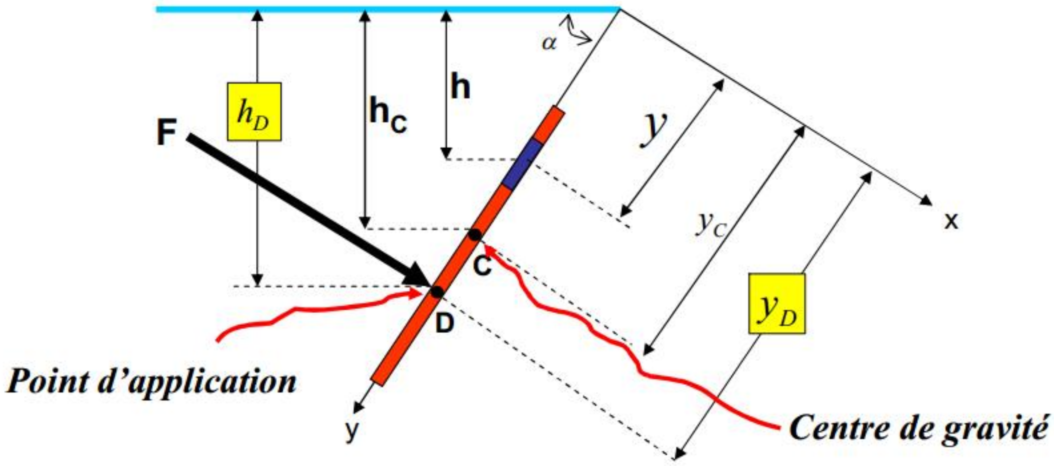
et comme $y_c\sin\alpha = h_c$: Profondeur du centre de gravité de la surface AB :

$$F = P_{atm}A + \rho gh_c A$$

En général , la pression P_{atm} est négligée et donc l'expression finale de F devient :

$\boxed{F = \rho gh_c A}$ *Remarque* : En hydrostatique , $\rho = \rho_w$ (Eau) : $\boxed{F = \rho_w gh_c A}$

b.- Position du point d'application de la Force de Pression :



Déterminons **hD** , la profondeur du point d'application de la force résultante F :
Pour cela , utilisons le principe des moments :

$$\mathrm{M}_o F = \sum_{AB} \mathrm{M}_i$$

avec :

$\mathrm{M}_o F = F.y_D$ et $\sum_{AB} \mathrm{M}_i = \int_{AB} y dF = \int_{AB} y.\rho g y \sin \alpha dA = \int_{AB} \rho g y^2 \sin \alpha dA = \rho g \sin \alpha \int_{AB} y^2 dA$

le terme $\int_{AB} y^2 dA$ représente le '' ***Moment d'Inertie*** '' de la surface AB par rapport à l'axe Ox = I_{ox}

On aura donc : $\rho g \sin \alpha y_D A = \rho g \sin \alpha I_{ox}$ Et donc : $\boxed{y_D = \dfrac{I_{ox}}{y_c A}}$

__Remarque__ : Utilisation du théorème de Huygens :

Ce théorème nous permet d'écrire que : $I_{ox} = I_{cc} + y_c^2 A$ avec :

I_{cc} : Moment d'inertie de la surface AB par rapport à un axe passant par son centre de gravité C .

Dans ce cas , la formule précédente devient :

$$\boxed{y_D = y_c + \frac{I_{cc}}{y_c A}} \quad \text{ou bien} \quad \boxed{h_D = h_c + \frac{I_{oo}}{h_c A'}}$$

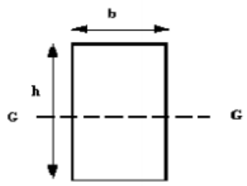
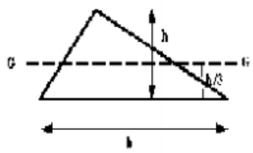
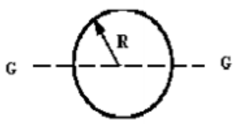
avec :

- A' : Projection verticale de la surface AB
- I_{oo} : Moment d'inertie de la surface A' par rapport à l'axe passant par son centre de gravité .

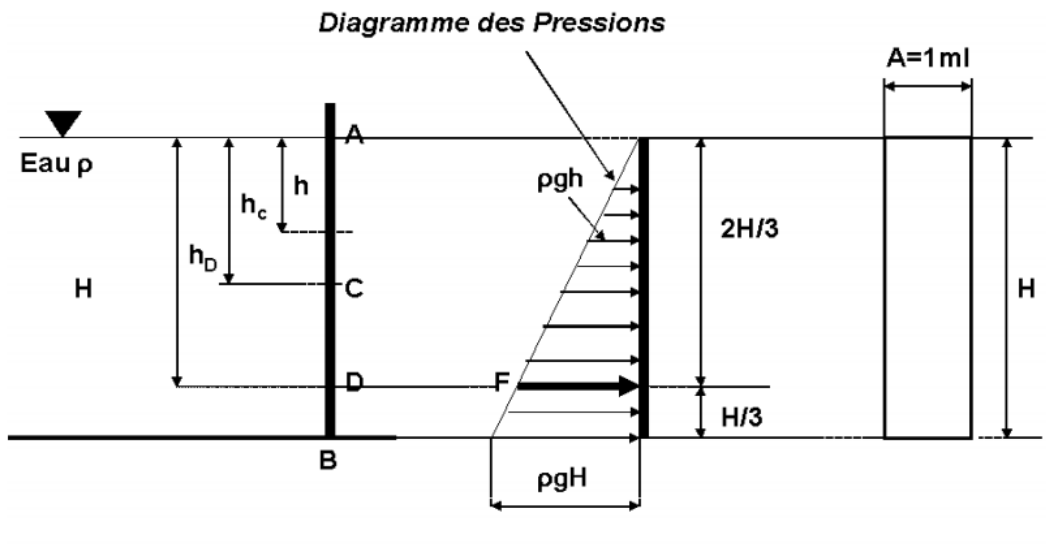
Le point d'application de la résultante F se trouve toujours plus bas que le centre de gravité d'une

distance égale à : $\dfrac{I_{oo}}{h_c A'}$

Le tableau suivant résume les moments d'inertie de quelques surfaces particulières :

Type	Surface	Moment d'Inertie I_{CC}
Rectangle 	bh	$\dfrac{bh^3}{12}$
Triangle 	$\dfrac{bh}{2}$	$\dfrac{bh^3}{36}$
Cercle 	πR^2	$\dfrac{\pi R^4}{4}$

c.- Cas d'une surface verticale – Diagramme des pressions :



Cas d'une surface plane verticale

Soit une plaque AB plane verticale retenant une hauteur d'eau H . Le schéma représente le diagramme des
pressions exercées sur la surface AB . Exprimons la résultante F des forces de pressions sur la surface AB de 2
façons différentes :

1 .- D'après le diagramme des pressions :

Le diagramme des pressions est représenté par un triangle dont la surface est égale à la résultante des forces de pressions :

$\boxed{F = \frac{\rho g H . H}{2} = \frac{1}{2}\rho g H^2}$ et F passe par le centre de gravité du triangle , d'où : $\boxed{h_D = \frac{2}{3}H}$

2.- D'après les formules de l'hydrostatique :

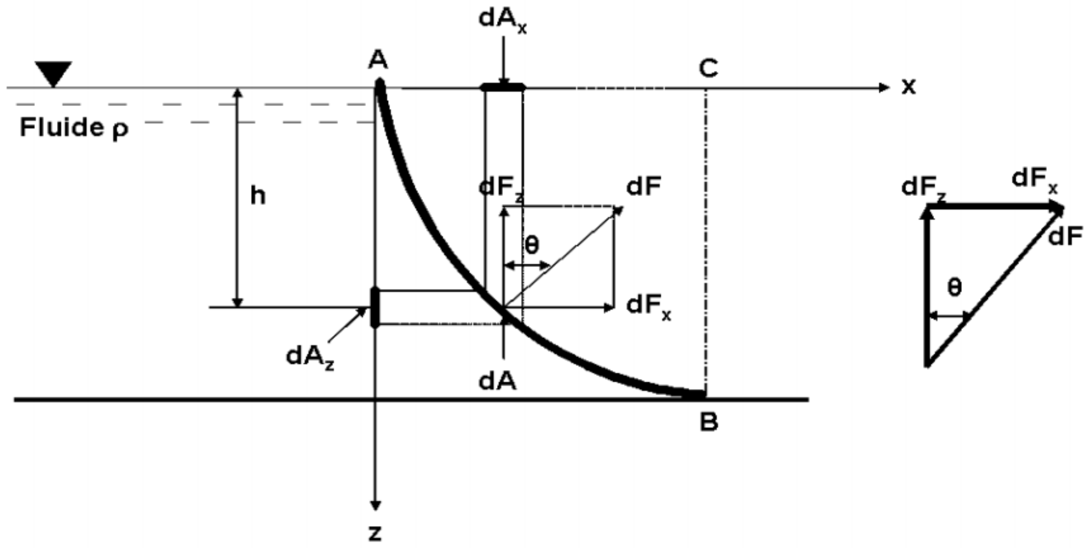
$$\boxed{F = \rho g h_c A = \rho g \frac{H}{2} H.1ml = \frac{1}{2}\rho g H^2}$$

et : $\boxed{h_D = h_c + \frac{I_{oo}}{h_c A} = \frac{H}{2} + \frac{1.H^3}{12\frac{H}{2}H.1} = \frac{H}{2} + \frac{H}{6} = \frac{2}{3}H}$

2.- Cas des Forces de Pression exercées par les Fluides sur des Surfaces Courbes

a.- Expression générale de la Force de Pression

Force de Pression sur une surface Courbe



Soit une paroi courbe AB retenant un fluide de densité massique ρ .
Soit un élément dA de la surface AB situé à une profondeur h et sur lequel s'exerce une force élémentaire dF qui se décompose en 2 forces :

- Une force dF_x , agissant sur la surface dA_z projection de dA sur l'axe z .
- Une force dF_z , agissant sur la surface dA_x projection de dA sur l'axe x .

On sait que : $dF = \rho ghdA$ d'où :

$$dF_x = dF.\sin\theta = \rho ghdA \sin\theta = \rho ghdA_z \quad \text{car} \quad dA\sin\theta = dA_z$$

$$dF_z = dF.\cos\theta = \rho ghdA \cos\theta = \rho ghdA_x \quad \text{car} \quad dA\cos\theta = dA_x$$

d'où :

$$\int dF_x = F_H = \rho g \int_{Az} hdA_z = \rho gh_c A_z \rightarrow \underline{F_H = \rho gh_c A_z}$$

avec : A_z : Projection verticale de la surface courbe AB .

Le calcul de la composante horizontale FH est ramené au calcul d'une force de pression sur une surface plane verticale

De même : $\int dF_z = F_v = \rho g \int_{Ax} hdA_x = \rho g \int_W dW = \rho gW \rightarrow \underline{F_v = \rho gW}$

Avec W : Volume délimité par :

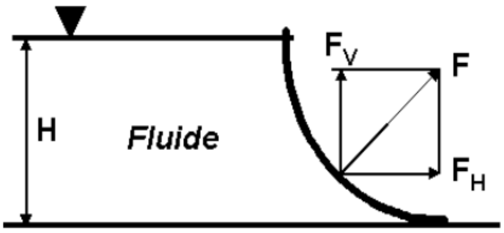
- La surface courbe AB
- La surface libre du fluide
- Les 2 verticales menées des 2 extrémités A et B de la surface .

Le calcul de la composante horizontale FV se résume donc au calcul *du* Poids du fluide *représenté par le volume déplacé par la surface AB .*

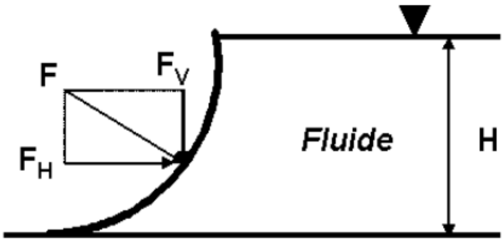
Le calcul des 2 composantes FH et FV permet ensuite de déterminer la résultante F par l'expression suivante :

$$F = \sqrt{F_H^{\,2} + F_V^{\,2}}$$

Selon que la surface AB en contact avec l'eau est concave ou convexe , on aura :



F_V dirigée vers le haut



F_V dirigée vers le bas

b.- Position du point d'application de la Force de Pression :

Le point d'application de la résultante F est obtenu si l'on connaît les composantes F_H et F_V .
Dans le cas général , il faudra établir l'équation de la courbe AB et celle du segment représentant la force F (équation d'une droite) en tenant compte que l'angle d'inclinaison de la force résultante F par rapport à l'horizontale est obtenu par la formule suivante :

$$\theta = arctg \frac{F_v}{F_H}$$