جامعــة عبد الحق بن حمودة جيجــل

كلية العلوم الدقيقة والإعلام الآلي

قسم التعليم الأساسي للرياضيات و الإعلام الآلي **جانفي 2020**

السـنة الأولى **الوقت : ساعة و نصف**

امتحـان قصير المدى "الجـبر1"

التمرين الأول:

لتكن القضايا التالية :

.$(P_1) \quad \exists x \in \mathbb{R}: |x| < 1 \; et \; x^2 = 1$

$(P_2) \; \forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}: [2x + y > 3 \; ou \; x.y = 1]$.

.$(P_3) \quad \forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0: |x| < \alpha \; \Rightarrow \; |x^2| < \varepsilon$

.$(P_4) \quad t < 1 \; \Rightarrow [\exists \alpha > 0: t + \alpha < 1]$

أ- القضية P_1 صحيحة أم خاطئة؟ علل اجابتك.

ب- اكتب القضية P_2 على شكل استلزام منطقي.

ج- اكتب نفي القضية P_3

د-اكتب عكس نقيض القضايا $_4$ و P_3

2- لتكن الدالة العبارية : " $(7^n + 1)$ عدد مضاعف لـ 6 ": (P_n) حيث $n \in \mathbb{N}$

أ- برهن أنه اذا كانت (P_n) صحيحة فان (P_{n+1}) صحيحة.ماذا تستنتج عن صحة القضية؟.

ب- برهن مستخدما دستور ثنائي الحد أن القضية $\forall n \in \mathbb{N}: (P_n)$ خاطئة.

التمرين الثاني:

لتكن $\mathcal{R}$ علاقة معرفة على $\mathbb{R}^2$ بـ: $\forall (x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2: (x, y)\mathcal{R}(x', y') \; \Leftrightarrow |x - x'| \le y' - y$

1- برهن أن $\mathcal{R}$ علاقة ترتيب على $\mathbb{R}^2$.

2- هل $(3,4)$ على علاقة ب $(1,5)$

3- هل الترتيب كلي ام جزئي؟ علل اجابتك.

التمرين الثالث:

ليكن $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$ تطبيق معرف بـ

$$f(k) = \begin{cases} \frac{k}{2} & si \; k \; pair \\ -\frac{k+1}{2} & si \; k \; impair \end{cases}$$

1- احسب $f(\{0,1,2\})$ و $f^{-1}(\{-1,1\})$

2- برهن أن التطبيق f متباين و غامر و استنتج أنه تقابلي. عين التطبيق العكسي f^{-1}

<u>دستورثنائي الحد</u> : $(a + b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \cdots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + b^n$

حيث $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ و ذلك من اجل كل $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

بالتوفيق

الحل النمودجي للامتحان القصير للجبر1(جانفي 2020)

التمرين 1:

أ- حتى تكون القضية المركبة : $p \wedge q$ صحيحة يلزم ويكفي أن تكون p صحيحة و q صحيحة.

اذا كانت القضية $|x| < 1$ صحيحة فان $x \in]-1,1[$ ومنه $x^2 \neq 1$ وبالتالي القضية $[|x| < 1 \wedge x^2 = 1]$ خاطئة.

ب- كتابة P_2 على شكل استلزام منطقي: بما أن $\overline{p} \vee q \Leftrightarrow [p \Rightarrow q]$ اذن القضية تكتب بإحدى الاستلزامين :

$$(P_2): \ \forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}: [2x + y \leq 3 \ \Rightarrow \ x.y = 1].$$

او

$$(P_2): \ \forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}: [x.y \neq 1 \ \Rightarrow \ 2x + y > 3]$$

ج- كتابة نفي القضية : بما أن $\overline{p \Rightarrow q} \Leftrightarrow p \wedge \overline{q}$ اذن نفي (P_3) هي: $\exists \epsilon > 0, \ \forall \alpha > 0: |x| < \alpha \ \wedge \ |x^2| \geq \varepsilon$

د- بما أن عكس نقيض القضية $p \Rightarrow q$ هي $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ اذن عكس نقيض (P_4) هي $([\forall \alpha > 0: t + \alpha \geq 1] \ \Rightarrow t \geq 1)$

وعكس نقيض القضية (P_3) هي $[\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0: |x^2| \geq \varepsilon \ \Rightarrow \ |x| \geq \alpha]$

2- نفرض أن (P_n) صحيحة ونبرهن صحة (P_{n+1})

لدينا (P_n) صحيحة اذن $\exists k \in \mathbb{Z}: \ 7^n + 1 = 6k$

اذن $7^{n+1} + 1 = 77^n + 1 = 7(6k - 1) + 1 = 42k - 6 = 6(7k - 1)$ ومنه صحة (P_{n+1})

ومنه صحة (P_{n+1})

لدينا $\forall n \in \mathbb{N}: 7^n + 1 = (6 +)^n + 1 = 6^n + C_n^1 6^{n-1} + C_n^2 6^{n-2} + \cdots + C_n^{n-1} 6 + 2 = 6k' + 2$

حيث $k' = 6^{n-1} + C_n^1 6^{n-2} + C_n^2 6^{n-3} + \cdots + C_n^{n-1}$ اذن باقي قسمة $7^n + 1$ على 6 هو 2 ومنه (P_n) خاطئة دوما.

التمرين الثاني:

لتكن $\mathcal{R}$ علاقة معرفة على $\mathbb{R}^2$ ب: $\forall (x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2: (x, y)\mathcal{R}(x', y') \ \Leftrightarrow |x - x'| \leq y' - y$

إثبات أن $\mathcal{R}$ علاقة ترتيب: $(\mathcal{R}$علاقة ترتيب $) \Leftrightarrow \Big(\mathcal{R}$ انعكاسية ,ضد تناظرية ,متعدية$\Big)$

- $(\mathcal{R}$ انعكاسية$) \Leftrightarrow \Big(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2: (x, y)\mathcal{R}(x, y)\Big)$

لدينا $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2: |x - x| = 0 \leq y - y = 0$ ومنه $(x, y)\mathcal{R}(x, y)$, ادن $\mathcal{R}$ انعكاسية.

- $(\mathcal{R}$ ضد تناظرية$) \Leftrightarrow \Big(\forall (x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2: (x, y)\mathcal{R}(x', y') \wedge (x', y')\mathcal{R}(x, y) \Rightarrow (x, y) = (x', y')\Big)$

لدينا $\left.\begin{array}{l}(x, y)\mathcal{R}(x', y') \ \Leftrightarrow |x - x'| \leq y' - y \\ (x', y')\mathcal{R}(x, y) \ \Leftrightarrow |x' - x| \leq y - y'\end{array}\right\} \Rightarrow |x - x'| \leq 0 \Rightarrow x - x' = 0$ و $y - y' = 0$

اذن $(x', y') = (x, y)$ ومنه $\mathcal{R}$ علاقة ضد تناظرية.

- $(\mathcal{R}$ متعدية$) \Leftrightarrow \Big(\forall (x, y), (x', y'), (x", y") \in \mathbb{R}^2: (x, y)\mathcal{R}(x', y') \wedge (x', y')\mathcal{R}(x", y") \Rightarrow (x, y)\mathcal{R}(x", y")\Big)$

لدينا: $\left.\begin{array}{l}(x, y)\mathcal{R}(x', y') \ \Leftrightarrow |x - x'| \leq y' - y \\ (x', y')\mathcal{R}(x", y") \ \Leftrightarrow |x' - x"| \leq y" - y'\end{array}\right\} \Rightarrow |x - x"| \leq |x - x'| + |x' - x"| \leq y" - y$

اذن $(x, y)\mathcal{R}(x", y")$ ومنه $\mathcal{R}$ علاقة متعدية فهي علاقة ترتيب .

2- لدينا $|1 - 3| = 2 > 4 - 5 = -1$ و $|3 - 1| = 2 > 5 - 4 = 1$ اذن $(1, 5)$ و$(3, 4)$ غير مرتبطين بالعلاقة.

3- لدينا $(\mathcal{R}$علاقة ترتيب كلي$) \Leftrightarrow (\forall (x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2: (x, y)\mathcal{R}(x', y') \vee (x', y')\mathcal{R}(x, y))$

من السؤال الثاني يتبين ان الترتيب جزئي و غيركلي.

التمرين الثالث:

1) لدينا: $f(\{,1,2\}) = \{f(0), f(1), f(2)\} = \{-1, 0, 1\}$

كما لدينا $f^{-1}(\{-1, 1\}) = \{k \in \mathbb{N}, f(k) = -1 \ ou \ f(k) = 1\} = \{1, 2\}$.

2) نلاحظ اولا أن $f(k)$ موجب اذا كان k زوجي و سالب اذا كان k فردي

أ) - $(f$ متباين$) \Leftrightarrow (\forall (k, n) \in \mathbb{N}^2: f(k) = f(n) \Rightarrow \ k = n)$

نميز حالتين : $f(k) = f(n) \geq 0 \Rightarrow k \ pair \ et \ n \ pair \Rightarrow f(k) = \frac{k}{2} \wedge f(n) = \frac{n}{2} \Rightarrow \ k = n$ (1)

و : $f(k) = f(n) < 0 \Rightarrow k \ impair \ et \ n \ impair \Rightarrow f(k) = -\frac{k+1}{2} \wedge f(n) = -\frac{n+1}{2} \Rightarrow \ k = n$ (2)

ومنه f متباين.

ب) $(f$ غامر$) \Leftrightarrow \Big(\forall m \in \mathbb{Z}, \exists k \in \mathbb{N}: m = f(k)\Big)$

نميز حالتين : $m \geq 0 \Rightarrow f(k) = m \Leftrightarrow k \ pair \ et \ m = \frac{k}{2} \Rightarrow \ k = 2m \in \mathbb{N}$ (1)

و $m < 0 \Rightarrow m \leq -1 , f(k) = m \Leftrightarrow k \ impair \ et \ m = -\frac{k+1}{2} \Rightarrow \ k = -2m - 1 \geq 1 \Rightarrow \ k \in \mathbb{N}$ (2)

ومنه f غامر.

<u>إثبات أن f تقابلي</u> : (f تقابلي) $\Leftrightarrow$ (f غامر و متباين) وهو محقق.

تعيين التطبيق العكسي f^{-1}

مما سبق نجد أن $^{-1}: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$. بحيث $m \mapsto k = f^{-1}(\quad) = \begin{cases} \quad si\ m \geq 0 \\ -2m - 1\ si\ m < 0 \end{cases}$

وهو المطلوب

جامعــة عبد الحق بن حمودة جيجــل

كلية العلوم الدقيقة والإعلام الآلي

قسم التعليم الأساسي للرياضيات و الإعلام الآلي — ديسمبر 2018

السـنة الأولى — الوقت : ساعة و نصف

امتحان قصير المدى "الجـبر1"

التمرين الأول: (1.5 ن)

لتكن A, B, D ثلاثة مجموعات بحيث $A \cup B = A \cap D$

برهن أن $B \subset A \subset D$.

التمرين الثاني: (3.25 ن)

لتكن $\mathcal{R}$ علاقة ثنائية معرفة على $\mathbb{R}^2$ بـ:

$$(x,y)\mathcal{R}(x',y') \Leftrightarrow \exists a > 0, \exists b > 0 : x' = ax \ et \ y' = by \quad .$$

1- برهن أن $\mathcal{R}$ علاقة تكافؤ $\mathbb{R}^2$.

2- برهن أن صنف تكافؤ العنصر $(1,0)$ هو $]0,\infty[\times \{0\}$

التمرين الثالث: (4 ن)

ليكن $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ تطبيق معرف بـ $f(x) = |x-2| + 2x$.

1- برهن التكافؤ التالي : $[x \leq 2 \Leftrightarrow f(x) \leq 4]$.

2- برهن أن f متباين و غامر و احسب التطبيق العكسي f^{-1} *(استخدم السؤال الاول).*

التمرين الرابع: (3.25 ن)

لتكن القضايا التالية : (P_1), (P_2) و (P_3) حيث

(P_1) $\qquad (\forall x \in \mathbb{R}) : \sqrt{1+x^2} - |x| > 0$.

(P_2) $\qquad (\forall x \in \mathbb{R}) : x^2 \neq 3 \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{1+x^2}} \neq 1$.

(P_3) $\qquad (\forall n \in \mathbb{N}) : n^2 + n + 1 \ est \ impair$(فردي) .

1) اكتب نفي (P_1) و استخدم ذلك في اثبات صحة القضية.

2) برهن مستخدما عكس النقيض صحة القضية (P_2) .

3) استخدم طريقة البرهان حالة بحالة في اثبات صحة (P_3) .

بالتوفيق

Corriger type

Exercice 1 : on rappelle que $B \subset A \Leftrightarrow [\forall x : x \in B \Rightarrow x \in A]$. on a $A \cup B = A \cap D$ donc :

$.\forall x: x \in B \Rightarrow x \in A \cup B \Rightarrow x \in A \cap D \Rightarrow x \in A \; donc \; B \subset A$

$.\forall x: x \in A \Rightarrow x \in A \cup B \Rightarrow x \in A \cap D \Rightarrow x \in D \; donc \; A \subset D$

Exercice 2 : on a $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}^2$ si et seulement si elle est réflexive, Symétrique et transitive.

$\mathcal{R}$ réflexive $\Leftrightarrow \forall(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y)\mathcal{R}(x,y)$

Puisque $\mathrm{x} = 1.\mathrm{x}$ et $\mathrm{y} = 1.\mathrm{y} \Rightarrow (x,y)\mathcal{R}(x,y)$

Symétrique $\Leftrightarrow \forall(x,y),(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y)\mathcal{R}(x',y') \Rightarrow (x',y')\mathcal{R}(x,y)\mathcal{R}$

On a $(x,y)\mathcal{R}(x',y') \Leftrightarrow \exists a > 0, \exists b > 0 : x' = ax \; et \; y' = by \Rightarrow x = \frac{1}{a}.x' et \; y = \frac{1}{b}.y', \frac{1}{a} > 0 \; et \frac{1}{b} > 0 \Rightarrow (x',y')\mathcal{R}(x,y)$

et transitive $\Leftrightarrow \forall(x,y),(x',y'),(x",y") \in \mathbb{R}^2 : \mathcal{R}$

$.(x,y)\mathcal{R}(x',y') \; et (x',y')\mathcal{R}(x",y") \Rightarrow (x,y)\mathcal{R}(x",y")$

On a $(x,y)\mathcal{R}(x',y') \Leftrightarrow \exists a > 0, \exists b > 0 : x' = ax \; et \; y' = by$

Et $(x',y')\mathcal{R}(x",y") \Leftrightarrow \exists c > 0, \exists d > 0 : x" = cx' \; et \; y" = dy'$

Donc : x=acx et $\mathrm{y} = bdy, ac > 0 \; et \; bd > 0 \Rightarrow (x,y)\mathcal{R}(x",y")$

Et $\mathcal{R}$ et transitive alors c'est une relation d'équivalence.

Calcul de : $(\dot{1,0}) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (1,0)\mathcal{R}(x,y)\}$

$(1,0)\mathcal{R}(x,y) \Leftrightarrow \exists a > 0, \exists b > 0 : x = a \times 1 = a \; et \; y = b \times 0 = 0 \Leftrightarrow x > 0 \; et \; y = .0 \Leftrightarrow (x,y) \in]0,\infty[\times \{0\}$

Exercice 3 : on remarque que $f(x) = \begin{cases} x + 2 \; si \; x \leq 2 \\ 3x - 2 \; si \; x \geq 2 \end{cases}$

1) si $(\boldsymbol{x} \leq \mathbf{2} : f(x) = x + 2 \leq 4) \; et \; (si \; x \geq 2 : f(x) = 3x - 2 \geq 4)$

injective $\Leftrightarrow \forall(x,x') \in \mathbb{R}^2 : \mathrm{f(x)} = \mathrm{f(x')} \Rightarrow x = x' f$

D'après 1) si $\mathrm{f}(x) = \mathrm{f}(x') \leq 4 \Rightarrow x \leq 2 \; et \; x' \leq 2 \Rightarrow x + 2 = x' + 2 \Rightarrow x = x'$

Et si $\mathrm{f}(x) = \mathrm{f}(x') \geq 4 \Rightarrow x \geq 2 \; et \; x' \geq 2 \Rightarrow 3x - 2 = 3x' - 2 \Rightarrow x = x'$

Donc f injective

surjective $\Leftrightarrow \forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R} : \mathrm{y} = \mathrm{f(x)} f$

D'après 1) si $\mathrm{y} = \mathrm{f}(x) \leq 4 \Rightarrow x \leq 2 \; et \; \mathrm{y} = \mathrm{f}(x) = x + 2 \Rightarrow x = y - 2$

Et si $y = f(x) \geq 4 \Rightarrow x \geq 2 \; et \;\; y = f(x) = 3x - 2 \Rightarrow x = \frac{y+2}{3}$

Donc f surjective alors bijective.

Calcul de l'application réciproque f^{-1}

$.f^{-1}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$.y \longrightarrow x = f^{-1}(y) = \begin{cases} y - 2 \; si \; y \leq 4 \\ \frac{y+2}{3} \; si \; y \geq 4 \end{cases}$$

<u>exercice 4</u> :

1) la négation de (P_1) est $(\exists x \in \mathbb{R}): \sqrt{1 + x^2} - |x| \leq 0$

impossible $\sqrt{1 + x^2} - |x| \leq 0 \Leftrightarrow \sqrt{1 + x^2} \leq |x| \Rightarrow 1 + x^2 \leq x^2 \Leftrightarrow 1 \leq 0$

Donc non (P_1) est faux et (P_1) vrai.

2) La contraposée de (P_2) est $(\forall x \in \mathbb{R}): \frac{2}{\sqrt{1+x^2}} = 1 \Rightarrow x^2 = 3$

Donc (P_2) vrai. $\frac{2}{\sqrt{1+x^2}} = 1 \Rightarrow \sqrt{1 + x^2} = 2 \Rightarrow x^2 + 1 = 4 \Rightarrow x^2 = 3$

3) démonstration de (P_3) $(\forall n \in \mathbb{N}): n^2 + n + 1 \; est \; impair$(فردي) .II

on a 2 cas :

si n pair alors $\exists k \in \mathbb{N}: n = 2k \Rightarrow n^2 + n + 1 = 2(2k^2 + k) + 1$ impair.

si n impair donc $\exists k \in \mathbb{N}: n = 2k + 1 \Rightarrow n^2 + n + 1 = 2(2k^2 + 3k + 1) +$ 1 impair.

D'où $(\forall n \in \mathbb{N}): n^2 + n + 1 \; est \; impair$

جامعـــة عبد الحق بن حمودة جيجـــل

كلية العلوم الدقيقة والإعلام الآلي

قسم التعليم الأساسي للرياضيات و الإعلام الآلي **ديسمبر 2017**

السـنة الأولى **الوقت : ساعة و نصف**

امتحـان قصير المدى "الجـبر1"

التمرين الأول:

لتكن $\mathcal{R}$ علاقة معرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^*: x\mathcal{R}\, y \;\Leftrightarrow \frac{y}{x} \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow\; \exists n \in \mathbb{N}^*: \frac{y}{x} = n$

3- برهن أن $\mathcal{R}$ علاقة ترتيب على $\mathbb{R}^*$.

4- هل الترتيب كلي ام جزئي؟

التمرين الثاني :

من أجل $x \in [0, \pi]$ برهن مستخدما البرهان بالتراجع المتراجحة التالية :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}: |sin(nx)| \leq n.sin(x)$$

.

التمرين الثالث :

ليكن $f: \mathbb{R} \longrightarrow]-1{,}1[$ تطبيق معرف بـ $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$

2- برهن أن: f متباين و غامر و استنتج انه تقابلي.

3- نعرف التطبيق $g:]-1{,}1[\longrightarrow \mathbb{R}$ بـ $g(x) = \frac{x}{1-|x|}$

أ) برهن أن $f \circ g = id_{]-1,1[}$ و $g \circ f = id_{\mathbb{R}}$

ب) استنتج التطبيق العكسي f^{-1}

التمرين الرابع :

لتكن E, F . مجموعات كيفية ، $\mathcal{P}(E)$ جميع اجزاء E و f تطبيق من E في F

نعرف القضية (P) بـ" $\forall\, B \in \mathcal{P}(E): f^{-1}(B) = \emptyset \Rightarrow B = \emptyset$ "

1- اكتب عكس نقيض الاستلزام

2- نفرض أن f غامر.برهن أن القضية (P) صحيحة

3- برهن أنه اذا كانت القضية (P) صحيحة فان f غامر.

توجيه : يمكن استخدام $B = \{y\}$ من اجل $y \in F$

4- اكتب نفي القضية ( )

ملاحظات :

1) $\forall\, x, y \in \mathbb{R} : sin(x + y) = sin(x).cos(y) + cos(x).sin(y)$,

2) id_E هو التطبيق الحيادي للمجموعة E

بالتوفيق

تصحيح الاختبار القصير "الجبر 1" ديسمبر 2017

التمرين الأول :

$$\forall x,y \in \mathbb{R}^*: x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \frac{y}{x} \in \mathbb{N}^* \qquad , E = \mathbb{R}^*$$

1) **إثبات أن علاقة ترتيب** : $\big(\mathcal{R}$علاقة ترتيب$\big) \Leftrightarrow \Big(\mathcal{R}$ انعكاسية , ضدتناظرية و متعدي$\Big)$

- $(\mathcal{R}$ انعكاسية$) \Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}^*: x\mathcal{R}y)$

لدينا $\forall x \in \mathbb{R}^*: \frac{x}{x} = 1 \in \mathbb{N}^*$ ومنه $x\mathcal{R}y$, ادن $\mathcal{R}$ انعكاسية.

- $(\mathcal{R}$ ضدتناظرية$) \Leftrightarrow (\forall x,y \in \mathbb{R}_+^*: x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x \Rightarrow y = x)$

لدينا $\left(x\mathcal{R}y \Rightarrow \frac{y}{x} = n \in \mathbb{N}^*\right) \wedge \left(y\mathcal{R}x \Rightarrow \frac{x}{y} = m \in \mathbb{N}^*\right) \Longrightarrow n.m = 1$

اذن $n = 1$ و منه $y = x$ و بالتالي $\mathcal{R}$ ضدتناظرية.

- $(\mathcal{R}$ متعدية$) \Leftrightarrow (\forall x,y,z \in \mathbb{R}^*: x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z)$

لدينا
$$\begin{cases} x\mathcal{R}y \\ \wedge \\ y\mathcal{R}z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{y}{x} \in \mathbb{N}^* \\ \wedge \\ \frac{z}{y} \in \mathbb{N}^* \end{cases} \Rightarrow \left\{ \frac{z}{x} = \frac{y}{x}.\frac{z}{y} \in \mathbb{N}^* \Longrightarrow x\mathcal{R}z \right.$$

ومنه $\mathcal{R}$ متعدية

مما سبق نجد آن $\mathcal{R}$علاقة ترتيب.

2) **الترتيب هل هو كلي ام جزئي :**

الترتيب كلي $\Leftrightarrow \forall x,y \in \mathbb{R}^*: x\mathcal{R}y \vee y\mathcal{R}x$

واضح أن هذا الشرط غير محقق دوما مثال: $\frac{2}{3} \notin \mathbb{N}^* \wedge \frac{3}{2} \notin \mathbb{N}^*$ اذن الترتيب جزئي

التمرين الثاني :

من اجل $x \in [0,\pi]$ نبرهن المتراجحة $\forall n \in \mathbb{N}: |sin(n.x)| \le n.sin(x)$ مستخدما البرهان بالتراجع

لاثبات دالة عبارية: $\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}: P(n)$ نثبت من اجل الشرط الابتدائي ثم نفرض صحة $P(n)$ و نثبت $P(n+1)$

2) **من اجل** $\boldsymbol{n = 0}$: لدينا من جهة $|sin(0.x)| = 0.sin(x) = 0$ و المتراجحة محققة

2) نفرض أن $|sin(n.x)| \le n.sin(x)$ و نبرهن أن $|((n+1).x)| \le (n+1).sin(x)$.

$|sin((n+1).x)| = |sin(nx).cos(x) + cos(n.x)sin(x)| \le$
$|sin(nx)|.|cos(x)| + |cos(n.x)||sin(x)| \le |sin(nx)| + |sin(x)| \le n.sin(x) + sin(x) =$
$(n+1).sin(x)$

لان $|cos(x)| \le 1 \wedge |cos(n.x)| \le 1$.

ادن $\forall n \in \mathbb{N}: |sin(n.x)| \le n.sin(x)$.

التمرين الثالث :

1) $f: \mathbb{R} \longrightarrow]-1,1[$, $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$

أ) - $(f$ متباين$) \Leftrightarrow (\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}: f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)$

لدينا $f(\ \ _1) = (x_2) \Rightarrow \frac{x_1}{1+|x_1|} = \frac{x_2}{1+|x_2|} \Rightarrow x_1|x_2| + x_1 = |x_1|x_2 + x_2$

نلاحظ أن x_2 و x_1 من نفس الاشارة.

. $si\ x_1 \ge 0 \Rightarrow x_2 \ge 0\ , |x_1| = x_1, |x_2| = x_2\ et\ x_1x_2 + x_1 = x_1x_2 + x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$

$si\ x_1 < 0 \Rightarrow x_2 < 0\ |x_1| = -x_1, |x_2| = -x_2\ et\ -x_1x_2 + x_1 = -x_1x_2 + x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$.

ومنه f متباين.

- $\left(f \text{ غامر}\right) \Leftrightarrow \left(\forall y \in]-1,1[, \exists x \in \mathbb{R}: y = f(x)\right)$

نلاحظ اولا أن $|f(x)| = \left|\frac{x}{1+|x|}\right| < 1$ و $f(0) = 0$ كما نلاحظ أن x و y من نفس الاشارة

لدينا : $y = f(x) \Rightarrow \begin{cases} si\ y \geq 0 \Rightarrow |x| = x\ et\ y = \frac{x}{1+x} \Rightarrow x = \frac{y}{1-y} \\ si\ y \leq 0 \Rightarrow |x| = -x\ et\ y = \frac{x}{1-x} \Rightarrow x = \frac{y}{1+y} \end{cases}$

ومنه f غامر. بما انه متباين و غامر فهو تقابلي.

أ) – للتذكير : $g(E', G', \Gamma')$ و $f = (E, G, \Gamma)$ تطبيقين فان : $f = g \Leftrightarrow [E = E' \wedge G = G' \wedge \Gamma = \Gamma']$

اي $\forall x \in E: f(x) = g(x)$

بما أن $g \circ f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ لإثبات أن $g \circ f = id_{\mathbb{R}}$ يكفي اثبات $\forall x \in \mathbb{R}; g \circ f(x) = x$

و هو محقق $g \circ f(x) = \frac{f(x)}{1-|f(x)|} = x$

و بما أن $f \circ g:]-1,1[\to]-1,1[$ لإثبات أن $f \circ g = id_{]-1,1[}$ يكفي

اثبات $\forall x \in]-1,1[; f \circ g(x) = x$ و هو محقق $f \circ g(x) = \frac{g(x)}{1+|g(x)|} = x$

بما أن $g \circ f = id_{\mathbb{R}}$ و $f \circ g = id_{]-1,1[}$ اذن التطبيق العكسي لـ f هو g

اي $\forall x \in \mathbb{R}; f^{-1}(x) = g(x)$

التمرين الرابع :

القضية ( ) $"\ \forall \in \mathcal{P}(E): f^{-1}(B) = \phi \Rightarrow B = \phi\ "$

التطبيق f غامر$\Leftrightarrow "\ \forall y \in F, \exists x \in E; y = f(x)\ "$

1- عكس نقيض القضية (P) هي القضية $"\ \forall B \in \mathcal{P}(E): B \neq \phi \Rightarrow f^{-1}(B) \neq \phi\ "$

2- نذكر أن القضية ( ) وعكس نقيض القضية ( ) متكافئتين فلهما نفس النتيجة

نستخدم عكس النقيض لنثبت صحة الاستلزام اذا كان التطبيق غامر.

لدينا $x \in f^{-1}(\quad) \Leftarrow \exists x \in E; f(x) = y \Leftarrow f\ surjective \wedge \exists y \in B \Leftarrow B \neq \phi$

اذن $f^{-1}(B) \neq \phi$ و الاستلزام صحيح.

3- نفرض أن القضية (P) صحيحة و نثبت أن f غامر

ليكن $y \in F$ نضع $B = \{y\} \Longleftarrow B \neq \phi$ باستخدام عكس نقيض الاستلزام

فان $(x) = y \Leftarrow \exists x \in f^{-1}(\quad) \Leftarrow f^{-1}(\quad) \neq \phi$

و منه التطبيق f غامر.

4- نفي القضية (P) بما انه لدينا $p \wedge \bar{q} \Leftrightarrow \bar{\bar{p}} \wedge \bar{q} \Leftrightarrow \overline{\bar{p} \vee q} \Leftrightarrow \overline{p \Rightarrow q}$

اذن نفي القضية هي $"\ \exists B \in \mathcal{P}(E): f^{-1}(B) = \phi \wedge B \neq \phi\ "$

جامعـــة عبد الحق بن حمودة جيجـــل

كلية العلوم الدقيقة والإعلام الآلي

قسم التعليم الأساسي للرياضيات و الإعلام الآلي **نوفمبر2016**

السـنة الأولى **الوقت : ساعة و نصف**

امتحـان قصير المدى "الجـبر1"

التمرين الأول:

لتكن $\mathcal{R}$ علاقة معرفة على $\mathbb{R}_+^*$ بـ: $\forall\, x, y \in \mathbb{R}_+^* : x\mathcal{R}\, y \;\Leftrightarrow x \ln y \;= y \ln x$

5- برهن أن $\mathcal{R}$ علاقة تكافؤ $\mathbb{R}_+^*$.

6- احسب صنف التكافؤ $\dot{1}$.

7- من اجل $a \in \mathbb{R}_+^*$ حدد عدد العناصر في صنف التكافؤ $\dot{a}$.

التمرين الثاني:

I. ليكن $f: E \longrightarrow F$ تطبيق . A و B اجزاء من E .

4- برهن أن: $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

5- نضع : $F = \mathbb{R}, E = \mathbb{R} - \left\{\frac{3}{2}\right\}$ و $f(x) = \frac{4x+5}{2x-3}$

ت) هل f متباين ؟ f غامر؟

ث) احسب $f\left(\mathbb{R} - \left\{\frac{3}{2}\right\}\right)$ و $f^{-1}(\{2\})$

II. ليكن التطبيق $g: \mathbb{R} - \left\{\frac{3}{2}\right\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{2\}$ بحيث $g(x) = f(x)$

- بين أن g تقابلي و احسب و g^{-1} .

التمرين الثالث: لتكن القضايا المنطقية التالية : S, R, Q, P و T .

III. باستعمال جدول الحقيقة بين أن القضية التالية صحيحة

$$(P \Rightarrow Q) \Rightarrow [(P \wedge R) \Rightarrow (Q \wedge R)] \;.$$

IV. نفرض أن P قضية صحيحة و أن الاستلزامات التالية صحيحة

1) $P \Rightarrow R \vee S$, 2) $S \Rightarrow \bar{P} \vee Q$

3) $S \wedge Q \Rightarrow \bar{P}$, 4) $R \wedge (\overline{S \vee Q}) \Rightarrow T$

5) $R \Rightarrow \bar{P} \vee \bar{Q}$.

أ) هل القضية S صحيحة ؟ هل القضية T صحيحة ؟ مع التبرير.

ب) اكتب نفي والعكس النقيض للاستلزام 5) .

بالتوفيق

تصحيح الاختبار القصير "الجبر 1"   ديسمبر 2016

التمرين الأول :

$\forall x,y \in \mathbb{R}_+^*: x\mathcal{R}y \Leftrightarrow xlny = ylnx \qquad , E=\mathbb{R}_+^*$

3) **إثبات أن علاقة تكافؤ:** ($\mathcal{R}$علاقة تكافؤ) $\Leftrightarrow$ ($\mathcal{R}$ انعكاسية , تناظرية ,متعدية)

- ($\mathcal{R}$ انعكاسية) $\Leftrightarrow$ $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*: x\mathcal{R}y)$

لدينا $\forall x \in \mathbb{R}_+^*: xlny = ylnx$ ومنه $x\mathcal{R}y$, ادن $\mathcal{R}$ انعكاسية.

- ($\mathcal{R}$ تناظرية) $\Leftrightarrow$ $(\forall x,y \in \mathbb{R}_+^*: x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x)$

لدينا $x\mathcal{R}y \Rightarrow xlny = ylnx \Rightarrow ylnx = xlny \Rightarrow y\mathcal{R}x$

و منه $\mathcal{R}$ تناظرية.

- ($\mathcal{R}$ متعدية) $\Leftrightarrow$ $(\forall x,y,z \in \mathbb{R}_+^*: x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z)$

لدينا
$$\begin{cases} x\mathcal{R}y \\ \wedge \\ y\mathcal{R}z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xlny = ylnx \\ \wedge \\ ylnz = zlny \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{lny}{y} = \frac{lnx}{x} \\ \wedge \\ \frac{lnz}{z} = \frac{lny}{y} \end{cases} \Longrightarrow \frac{lnz}{z} = \frac{lnx}{x} \Longrightarrow xlnz = zlnx \Longrightarrow x\mathcal{R}z$$

ومنه $\mathcal{R}$ متعدية

مما سبق نجد آن $\mathcal{R}$علاقة تكافؤ.

4) **حساب صنف التكافؤ** :

$\dot{1} = \{x \in \mathbb{R}_+^*: 1\mathcal{R}x\} = \{x \in \mathbb{R}_+^*: 1lnx = xln1\} = \{x \in \mathbb{R}_+^*: lnx = 0\} = \{1\}$.

5) **تحديد عدد العناصر في** $\dot{a}$: $(a \in \mathbb{R}_+^*)$ لدينا

$$\dot{a} = \{x \in \mathbb{R}_+^*: a\mathcal{R}x\} = \{x \in \mathbb{R}_+^*: alnx = xlna\} = \left\{x \in \mathbb{R}_+^*: \frac{lnx}{x} = \frac{lna}{a}\right\}.$$

و باستعمال بيان الدالة $\frac{lnx}{x}$ نجد أنه

لما $\boldsymbol{a} \in]\boldsymbol{0},\boldsymbol{1}] \cup \{\boldsymbol{e}\}$ عدد عناصر الصنف $\dot{1}$ هو 1 و لما $\boldsymbol{a} \in]\boldsymbol{1},\boldsymbol{e}[\cup]\boldsymbol{e},+\infty[$ عدد عناصر الصنف $\dot{1}$ هو 2.

التمرين الثاني :

3) **إثبات أن** $\boldsymbol{(A \cup B) = f(A) \cup f(B)}$: لدينا من جهة $y \in f(A \cup B) \Rightarrow \exists x \in A \cup B: y = f(x)$

$$\Rightarrow \exists x: (x \in A: y = f(x)) \vee (x \in B: y = f(x)$$
$$\Rightarrow y \in f(A) \vee y \in f(B)$$
$$\Rightarrow y \in f(A) \cup f(B)$$

ادن $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$.

و من جهة أخرى $y \in f(A) \cup f(B) \Rightarrow y \in f(A) \vee y \in f(B)$

$$\Rightarrow (\exists x_1 \in A: y = f(x_1)) \vee (\exists x_2 \in B: y = f(x_2)).$$
$$\Rightarrow (\exists x_1 \in A \cup B: y = f(x_1)) \vee (\exists x_2 \in A \cup B: y = f(x_2)).$$
$$\Rightarrow \exists x \in A \cup B: y = f(x).$$
$$\Rightarrow y \in f(A \cup B)$$

و منه $f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$. مما سبق نجد المساواة .

2) $f: \mathbb{R} - \left\{\frac{3}{2}\right\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{4x+5}{2x-3}$

أ) - (f متباين) $\Leftrightarrow$ $\left(\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} - \left\{\frac{3}{2}\right\}: f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2\right)$

لدينا $f(\ _1) = (x_2) \Rightarrow \frac{4x_1+5}{2x_1-3} = \frac{4x_2+5}{2x_2-3} \Rightarrow 8x_1x_2 - 12x_1 + 10x_2 - 15 = 8x_1x_2 - 12x_1 + 10x_2 - 15$

$$\Rightarrow -22x_1 = -22x_2$$
$$\Rightarrow x_1 = x_2$$

ومنه f متباين.

- (f غامر) $\Leftrightarrow$ $\left(\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{3}{2}\right\}: y = f(x)\right)$

لدينا $y = f(x) \Rightarrow y = \frac{4x+5}{2x-3} \Rightarrow 2xy - 3y = 4x + 5 \Rightarrow x = \frac{3y+5}{2y-4}$

من أجل $y=2$ لايمكن حساب السابقة ومنه f ليس غامر.

ب) – $f\left(\mathbb{R}-\left\{\frac{3}{2}\right\}\right)=f\left(\left]-\infty,\frac{3}{2}\right[\cup\left]\frac{3}{2},+\infty\right[\right)=f\left(\left]-\infty,\frac{3}{2}\right[\right)\cup f\left(\left]\frac{3}{2},+\infty\right[\right)=\left]-\infty,2\right[\cup\left]2,+\infty\right[$

ملاحظة : نستعمل تعريف صورة مجموعة و أن $f(x)=2+\frac{11}{2x-3}$

- $f^{-1}(\{2\})=\left\{x\in\mathbb{R}-\left\{\frac{3}{2}\right\}:f(x)\in\{2\}\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}-\left\{\frac{3}{2}\right\}:\frac{3y+5}{2y-4}=2\right\}$

. $=\left\{x\in\mathbb{R}-\left\{\frac{3}{2}\right\}:4x+5=4x-6\right\}=\emptyset$

$g(x)=f(x)\ ,\ \ g:\mathbb{R}-\left\{\frac{3}{2}\right\}\longrightarrow\mathbb{R}-\{2\}$

<u>إثبات أن g تقابلي</u> :: $(g$ تقابلي$)\Leftrightarrow($ g غامر و متباين$)$

مما سبق نجد أن $g\left(\mathbb{R}-\left\{\frac{3}{2}\right\}\right)=\mathbb{R}-\{2\}$ ومنه g غامر وبما أن f متباين فإن g متباين و ينتج أن g تقابلي و يقبل تطبيق عكسي g^{-1} بحيث :

$g^{-1}:\mathbb{R}-\{2\}\longrightarrow\mathbb{R}-\left\{\frac{3}{2}\right\}$.

. $y\longmapsto x=g^{-1}(y)=\frac{3y+5}{2y-4}$

التمرين الثالث:

- جدول الحقيقة

P	Q	R	$P\Rightarrow Q$,	$P\wedge R$,	$Q\wedge R$,	$(P\wedge R)\Rightarrow(Q\wedge R)$,	$(P\Rightarrow Q)\Rightarrow[(P\wedge R)\Rightarrow(Q\wedge R)]$,
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	V	V
V	F	V	F	V	F	F	V
V	F	F	F	F	F	V	V
F	V	V	V	F	V	V	V
F	V	F	V	F	F	V	V
F	F	V	V	F	F	V	V
F	F	F	V	F	F	V	V

أ) – **القضية S خاطئة لأن :**

إذا كانت S صحيحة باستعمال الاستلزام (2) نجد أن صحيحة $\overline{P}\vee Q$ و بما أن $\overline{P}$ خاطئة فإن Q صحيحة
و باستعمال الاستلزام (3) بما أن $S\wedge Q$ صحيحة (S صحيحة و Qصحيحة) تكون $\overline{P}$ صحيحة , تناقض .

- **القضية T صحيحة لأن:**

باستعمال الاستلزام (1) بما أن P صحيحة فإن $R\vee S$ صحيحة و بما أن S صحيحة فإن R صحيحة .
و باستعمال الاستلزام (5) بما أن R صحيحة فإن $\overline{P}\vee\overline{Q}$ صحيحة و بما أن $\overline{P}$ صحيحة فإن $\overline{Q}$ صحيحة أي Q خاطئة. و باستعمال الاستلزام (4) بما أن R صحيحة و $\overline{S\vee Q}$ صحيحة (S خاطئة و Qخاطئة)فإن T صحيحة .

ب) $\overline{(5)}\Leftrightarrow\overline{\left(R\Rightarrow(\overline{P}\vee\overline{Q})\right)}\Leftrightarrow R\wedge\overline{(\overline{P}\vee\overline{Q})}\Leftrightarrow R\wedge\left(\overline{\overline{P}}\wedge\overline{\overline{Q}}\right)\Leftrightarrow R\wedge P\wedge Q$

- العكس النقيض لاستلزام (5) هو $\left(\overline{(\overline{P}\vee\overline{Q})}\Rightarrow\overline{R}\right)\Leftrightarrow(P\wedge Q)\Rightarrow\overline{R}$

كلية العلوم الدقيقة والإعلام الآلي

قسم التعليم الأساسي للرياضيات و الإعلام الآلي

فيفري 2016

السنة الأولى

الوقت:ساعة ونصف

امتحان تعويضي "الجبر 1"

التمرين الأول:

لتكن $(G,*)$ زمرة.

1) برهن أن $\forall(a,b)\in G^2 : (a*b)^{-1} = b^{-1}*a^{-1}$

2) برهن تكافؤ الخواص التالية:

أ) القانون * تبديلي

ب) $\forall(a,b)\in G^2 : (a*b)^2 = a^2*b^2$

ج) $\forall(a,b)\in G^2 : (a*b)^{-1} = a^{-1}*b^{-1}$

للعلم أن: $x^2 = x*x$

التمرين الثاني:

لتكن α إحدى الجذور العقدية للمعادلة $x^3-2=0$

نضع $A=\{x=a+b.\alpha+c.\alpha^2;(a,b,c)\in Q^3\}$.

برهن أن A حقل جزئي من $(C,+,.)$.

التمرين الثالث:

ليكن $q=-1-X+X^2+X^3$ و $p=2-4X+3X^2-2X^3+X^4$

1) عين القاسم المشترك $D=PGCD(p,q)$

2) استنتج ان p يقبل جذر حقيقي α ما هي رتبته؟

ب) حلل p في $\Re[X]$ ثم في $C[X]$.

بالتوفيق

جامعـــة عبد الحق بن حمودة جيجـــل

كلية العلوم الدقيقة والإعلام الآلي

قسم التعليم الأساسي للرياضيات و الإعلام الآلي — ديسمبر 2015

السنة الأولى — **الوقت:ساعة وربع**

امتحان قصير المدى"الجبر 1"

التمرين الأول:

لتكن عائلة المجموعات $(A_n)_{n\in N^*}$ معرفة بـ $A_n = \left]\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right]$

برهن أن $(A_n)_{n\in N^*}$ هي تجزئة لـ $]0,1]$

التمرين الثاني:

لتكن العلاقة الثنائية $\prec$ معرفة على $E =]1,\infty[$ بـ: $\forall(a,b)\in E^2 : a\prec b \Leftrightarrow \frac{a}{1+a^2}\le\frac{b}{1+b^2}$

1) تأكد أن $\forall(a,b)\in E^2 : a.b\in E$

2) برهن أن $\prec$ علاقة ترتيب.

3) هل الترتيب كلي؟

التمرين الثالث:

تطبيق معرف بـ: $f:\Re-\{1\}\mapsto\Re$ ليكن $\forall x\in\Re-\{1\}:\ f(x)=\frac{2x+5}{x-1}$

1) احسب $f^{-1}(\{2\})$

2) برهن أن التطبيق f متباين.هل التطبيق f غامر؟

3) ليكن التطبيق $g:\Re-\{1\}\mapsto\Re-\{2\}$ المعرف بـ $g(x)=f(x)$.

برهن أن g تقابلي و احسب التطبيق العكسي g^{-1}

التمرين الرابع:

لتكن R,Q,P ثلاث قضايا.

1) اكتب تعريف الاستلزام المنطقي $[P\Rightarrow Q]$

2) استخدم جدول الحقيقة في اثبات:

$$[(P\Rightarrow Q)\wedge(Q\Rightarrow R)]\Rightarrow(P\Rightarrow R)$$

بالتوفيق

الحل النموذجي للامتحان القصير "الجبر 1"

التمرين الأول:

$\left]0,1\right]$ تجزئة لـ $(A_n)_{n\in N^*} \Leftrightarrow \begin{cases} 1)\ \bigcup\limits_{n\in N^*} A_n = \left]0,1\right] \\ 2)\ \forall (n,m)\in (N^*)^2 : n\neq m \to A_n \cap A_m = \phi \end{cases}$

من جهة لدينا: $1)\ \forall n\in N^* A_n = \left]\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right] \subset \left]0,1\right] \to \bigcup\limits_{n\in N^*} A_n \subset \left]0,1\right]$

نعرف الجزء الصحيح لـ x بـ $E(x)$ اذن: $\left(\forall x\in \left]0,1\right] \to \frac{1}{x}\geq 1\right) \to E\left(\frac{1}{x}\right)\geq 1$ نختار $n=E\left(\frac{1}{x}\right)$

$$E\left(\frac{1}{x}\right)\leq \frac{1}{x} < E\left(\frac{1}{x}\right)+1 \to n\leq \frac{1}{x} < n+1 \to \frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n} \to x\in A_n \to x\in \bigcup_{n\in N^*} A_n$$

$$\left]0,1\right] \subset \bigcup_{n\in N^*} A_n \ d'ou \ \left]0,1\right] = \bigcup_{n\in N^*} A_n$$

$$2)\ \forall (n,m)\in (N^*)^2 : n\neq m \ \text{sup}osons\, n<m \to n+1\leq m \to \frac{1}{m}\leq \frac{1}{n+1} \to A_n\cap A_m = \phi$$

التمرين الثاني:

لتكن العلاقة الثنائية $\prec$ معرفة على $E=\left]1,\infty\right[$ بـ: $\forall (a,b)\in E^2 : a\prec b \Leftrightarrow \frac{a}{1+a^2}\leq \frac{b}{1+b^2}$

1) لدينا : $\forall (a,b)\in E^2 : a>1 \wedge b>1 \to a.b>1 \to a.b\in E$

2) برهن أن $\prec$ علاقة ترتيب $\Leftrightarrow$ $\prec$ انعكاسية ضد تناظرية و متعدية

$\prec$ انعكاسية $\Leftrightarrow \forall a\in E : a\prec a$ و هذا محقق لأن $\frac{a}{1+a^2}\leq \frac{a}{1+a^2} \Leftarrow a\prec a$

$\prec$ ضد تناظرية $\Leftrightarrow \left[\forall (a,b)\in E^2 : a\prec b \wedge b\prec a \to a=b\right]$

$$\forall (a,b)\in E^2 : a\prec b \wedge b\prec a \Leftrightarrow \frac{a}{1+a^2}=\frac{b}{1+b^2} \Rightarrow a+ab^2=b+ba^2 \Rightarrow (a-b)(1-ab)=0$$

$$\overset{ab>1}{\Rightarrow} a-b=0 \Rightarrow a=b$$

$\prec$ متعدية $\Leftrightarrow \left[\forall (a,b,c)\in E^3 : a\prec b \wedge b\prec c \to a\prec c\right]$

$$\forall (a,b,c)\in E^3 : a\prec b \wedge b\prec c \Rightarrow \frac{a}{1+a^2}\leq \frac{b}{1+b^2} \wedge \frac{b}{1+b^2}\leq \frac{c}{1+c^2} \Rightarrow \frac{a}{1+a^2}\leq \frac{c}{1+c^2} \Rightarrow a\prec c$$

اذن $\prec$ علاقة ترتيب

$\prec$ علاقة ترتيب كلي $\Leftrightarrow \left[\forall (a,b)\in E^2 : a\prec b \vee b\prec a\right]$

بما ان $\leq$ اذن $\Re$ علاقة ترتيب كلي على $\left[\forall (x,y)\in \Re^2 : x\leq y \vee y\leq x\right]$

اذن $\left[\forall (a,b)\in E^2 : \frac{a}{1+a^2}\leq \frac{b}{1+b^2} \vee \frac{b}{1+b^2}\leq \frac{a}{1+a^2}\right] \Rightarrow a\prec b \vee b\prec a$

و منه $\prec$ علاقة ترتيب كلي E

التمرين الثالث:

1) حساب: $f^{-1}(\{2\})=\{x\in\Re-\{1\};\ f(x)=2\}$

$$f(x)=2\rightarrow\frac{2x+5}{x-1}=2\rightarrow 2x+5=2x-2\ \ impossible\rightarrow f^{-1}(\{2\})=\phi$$

2) f **متباين** $\Leftrightarrow\left(\forall(x,x')\in E^2:\ f(x)=f(x')\rightarrow x=x'\right)$

$$f(x)=f(x')\rightarrow\frac{2x+5}{x-1}=\frac{2x'+5}{x'-1}\rightarrow(2x+5)(x'-1)=(2x'+5)(x-1)\rightarrow x=x'$$

f **غامر** $\Leftrightarrow\left(\forall y\in\Re,\exists x\in\Re-\{1\}:\ y=f(x)\right)$

بما أن $f^{-1}(\{2\})=\phi$ اذن $f(x)=2$ ليست لها حلول و منه التطبيق غير غامر

3) g تقابلي $\Leftrightarrow g$ متباين و غامر

يكفي اثبات أن g غامر أي $\left(\forall y\in\Re-\{2\},\exists x\in\Re-\{1\}:\ y=g(x)\right)$

$$\forall y\in\Re-\{2\}:\ y=g(x)\rightarrow\frac{2x+5}{x-1}=y\rightarrow x(y-2)=y+5\rightarrow x=\frac{y+5}{y-2}\neq 1$$

$$\rightarrow g\ surjective$$

حساب التطبيق العكسي g^{-1}

$$g^{-1}:\Re-\{2\}\rightarrow\Re-\{1\}$$

$$y\rightarrow g^{-1}(y)=x=\frac{y+5}{y-2}$$

التمرين الرابع:

1) $[P\Rightarrow Q]\Leftrightarrow\overline{P}\vee Q$

2) اثبات الاستلزام $[(P\Rightarrow Q)\wedge(Q\Rightarrow R)]\Rightarrow(P\Rightarrow R)$

P	Q	R	$\overline{P}$	$P\Rightarrow Q$	$\overline{Q}$	$Q\Rightarrow R$	$P\Rightarrow Q\wedge Q\Rightarrow R$	$\overline{P\Rightarrow Q\wedge Q\Rightarrow R}$	$P\Rightarrow R$	$[P\Rightarrow Q\wedge Q\Rightarrow R]\Rightarrow P\Rightarrow R$
V	V	V	F	V	F	V	V	F	V	V
V	V	F	F	V	F	F	F	V	F	V
V	F	V	F	F	V	V	F	V	V	V
V	F	F	F	F	V	V	F	V	F	V
F	V	V	V	V	F	V	V	F	V	V
F	V	F	V	V	F	F	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V	F	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V	F	V	V

نلاحظ أن الاستلزام صحيح دوما.

جامعــة جيجــل

كلية العلوم الدقيقة والإعلام الآلي

قسم التعليم الأساسي للرياضيات و الإعلام الآلي　　　　جانفي 2015

السنة الأولى　　　　**الوقت:ساعة ونصف**

امتحان قصير تعويضي"الجبر 1"

التمرين الأول:

1) لتكن B, A أجزاء من E

برهن تكافؤ $A \cup B - B = A \Leftrightarrow A \cap B = \phi$

2) أعط نفي القضية P حيث " $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in N, \forall (k,l) \in N^2 : k \geq l \geq n_0 \Rightarrow |u_k - u_l| < \varepsilon$ " P

3) **برهن أنه** من أجل كل $n \in N$: $n^3\ impair \Leftrightarrow n\ impair$

التمرين الثاني:

تطبيقين معرفين بـ: $g : \Re \mapsto \Re$ و $f : \Re - \{1\} \mapsto \Re$ لين $f(x) = \dfrac{x+2}{1+x} \wedge g(x) = x^2$

1) أحسب $f^{-1}(\{1\})$ ، $f^{-1}(]2,3])$ و $f(]-1,1[)$.

2) برهن أن التطبيق f متباين.هل هو غامر؟

3) عين $f \circ g$ و $g \circ f$ إن أمكن.

التمرين الثاني:

لتكن E, F مجموعتين ، $f : E \to F$ تطبيق و δ علاقة ثنائية على F

نعرف العلاقة $\Re$ على E ب: $\forall (x, y) \in E^2 : x \Re y \Leftrightarrow f(x) \delta f(y)$

1) برهن انه إذا كانت δ علاقة تكافؤ على F فان $\Re$ علاقة تكافؤ على E

2) برهن انه إذا كانت δ علاقة ترتيب على F و f متباين فان $\Re$ علاقة ترتيب على E

بالتوفيق

جامعــة عبد الحق بن حمودة جيجــل
كلية العلوم الدقيقة والإعلام الآلي
قسم التعليم الأساسي للرياضيات و الإعلام الآلي
ديسمبر2013
السنة الأولى
الوقت:ساعة و نصف

امتحان قصير المدى"الجبر1"

التمرين الأول:(2ن)

ثلاثة إخوة أحمد,علي و سالم يشغلون ثلاث وظائف مختلفة:طبيب,أستاذ و صيدلي.

نفرض أن القضايا الأربع التالية صحيحة:

أحمد طبيب $\Leftarrow$ علي أستاذ (P_1)

أحمد أستاذ $\Leftarrow$ علي صيدلي (P_2)

علي غير طبيب $\Leftarrow$ سالم أستاذ (P_3)

سالم صيدلي $\Leftarrow$ أحمد أستاذ (P_4)

(1) أكتب نفي (P_3) وعكس النقيض (P_1)

(2) من بين الإجابات المقترحة بين الخاطئة من الصحيحة.

a) أحمد طبيب,علي أستاذ و سالم صيدلي

b) أحمد أستاذ,علي صيدلي و سالم طبيب

c) أحمد صيدلي,علي طبيب و سالم أستاذ

التمرين الثاني: (2.5ن)

لتكن R علاقة ثنائية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ: $\forall(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2 : pRq \Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{N}^* : p=q^k$

برهن أن R علاقة ترتيب.

هل الترتيب كلي أم جزئي؟علل إجابتك.

التمرين الثالث: (3.5ن)

ليكن $f:\Re\mapsto\Re$ تطبيق معرف بـ: $\forall x\in\Re : f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$

1) نضع $A=\left\{0,\dfrac{1}{2},1,2\right\}$ أحسب $f(A)$. هل التطبيق f متباين؟

2) عين قيم $y\in\Re$ التي من أجلها تكون المعادلة $f(x)=y$ لها حلول.

3)استنتج أن $f(\Re)=\left[\dfrac{-1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$. هل التطبيق f غامر؟

4) أحسب $f^{-1}(B)$ حيث $B=[-1,0]$

التمرين الرابع: (4ن)

لتكن $G=\Re^*\times\Re$ مزودة بالعملية $\perp$ حيث

$$\forall(a,b)\in G,\forall(a',b')\in G : (a,b)\perp(a',b')=\left(a.a',\frac{b'}{a}+b\right)$$

برهن أن $(G,\perp)$ زمرة غير تبديليه.

الحل النموذجي للامتحان القصير "الجبر1"

التمرين1:

نفي (P_3) هي $\overline{(P_3)} \Leftrightarrow$ "$ali\ non\ medecin\ et\ salem\ non\ enseignant$"

عكس النقيض لـ (P_1) هي "$ali\ non\ enseignant \Rightarrow ahmed\ non\ medecin$"

a) fausse car si Ahmed médecin , Ali enseignant et Salem pharmacien alors (P_4) est faux

b) fausse car si Ahmed enseignant , Ali pharmacien et Salem médecin alors (P_3) est faux

c) vrai car les quatre implications sont vrais.

التمرين2:

R علاقة ترتيب $\Leftrightarrow R$ علاقة انعكاسية,ضد تناظرية و متعدية على $\mathbb{N}^*$.

R انعكاسية $\Leftrightarrow [\forall p \in (\mathbb{N}^*): pRp]$ واضحة لان: $p = p^1 \Rightarrow pRp$

R ضد تناظرية $\Leftrightarrow \left[\forall (p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2 : pRq \wedge qRp \Rightarrow p = q\right]$

$$\forall (p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2 : pRq \wedge qRp \Rightarrow (\exists k \in \mathbb{N}^* : p = q^k) \wedge (\exists l \in \mathbb{N}^* : q = p^l) \Rightarrow p = p^{kl} \Rightarrow kl = 1 \Rightarrow k = l = 1 \Rightarrow p = q$$

R متعدية $\Leftrightarrow \left[\forall (p,q,r) \in (\mathbb{N}^*)^3 : pRq \wedge qRr \Rightarrow pRr\right]$

$$\forall (p,q,r) \in (\mathbb{N}^*)^3 : pRq \wedge qRr \Rightarrow (\exists k \in \mathbb{N}^* : p = q^k) \wedge (\exists l \in \mathbb{N}^* : q = r^l) \Rightarrow p = r^{kl}\ et\ kl \in \mathbb{N}^* \Rightarrow pRr$$

إذن R علاقة ترتيب.

R علاقة ترتيب كلي $\Leftrightarrow \left[\forall (p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2 : pRq \vee qRp\right]$

ليست علاقة ترتيب كلي لأن مثلا العددان 2و3 ليست لهم علاقة بينهما حيث

2^k زوجي بينما 3^k فردي.فهي ترتيب جزئي.

التمرين3:

$$f(0) = 0,\ f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{5},\ f(1) = \frac{1}{2},\ f(2) = \frac{2}{5} \Rightarrow f(A) = \{f(x) : x \in A\} = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{5}\right\}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = f(2) = \frac{2}{5} \Rightarrow f\ non\ injective$$

$$f(x) = y \Rightarrow yx^2 - x + y = 0\ ;\ l'equation\ a\ une\ solution \Leftrightarrow \Delta = 1 - 4y^2 \geq 0 \Leftrightarrow y \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$$

$$f(\Re) = \{y \in \Re ; \exists x \in \Re : y = f(x)\} = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] ; comme\ f(\Re) \neq \Re \Rightarrow f\ non\ surjective$$

$$f^{-1}([-1,0]) = \{x \in \Re ; f(x) \in [-1,0]\} \Rightarrow \frac{x}{1+x^2} \in [-1,0] \Rightarrow x \leq 0 \Rightarrow f^{-1}([-1,0]) = \Re_- =]-\infty, 0]$$

التمرين4:

$(G,\perp)\ groupe \Leftrightarrow \perp$ داخلية,تجميعية,تقبل عنصر حيادي و لكل عنصر نظير

$$\forall (a,b) \in G, \forall (a',b') \in G : (a,b) \perp (a',b') \in G \Leftrightarrow \perp\ interne$$

$$(a,b) \perp (a',b') = \left(a.a', \frac{b'}{a} + b\right) \in G\ car\ a.a' \in \Re^*\ et\ \frac{b'}{a} + b \in \Re$$

$$\forall (a,b) \in G, \forall (a',b') \in G, \forall (a'',b'') \in G : [(a,b) \perp (a',b')] \perp (a'',b'') = (a,b) \perp [(a',b') \perp (a'',b'')] \Leftrightarrow \perp\ associative$$

$$(1)\quad [(a,b) \perp (a',b')] \perp (a'',b'') = \left(a.a', \frac{b'}{a} + b\right) \perp (a'',b'') = \left(a.a'a'', \frac{b''}{aa'} + \frac{b'}{a} + b\right)$$

$$(2)\quad (a,b)\perp\left[(a',b')\perp(a'',b'')\right]=(a,b)\perp\left(a'.a'',\frac{b''}{a'}+b'\right)=\left(a.a'a'',\frac{\frac{b''}{a'}+b'}{a}+b\right)=\left(a.a'a'',\frac{b''}{aa'}+\frac{b'}{a}+b\right)$$

$(1)=(2)\Rightarrow\perp$ *associative*

$\exists(e,e')\in G,\forall(a,b)\in G:(a,b)\perp(e,e')=(e,e')\perp(a,b)=(a,b)\Leftrightarrow$ تقبل عنصر حيادي

$$(a,b)\perp(e,e')=(a,b)\Leftrightarrow\left(ae,\frac{e'}{a}+b\right)=(a,b)\Leftrightarrow(ae=a)\wedge\frac{e'}{a}+b=b\Rightarrow e=1\wedge e'=0$$

$$(1,0)\perp(a,b)=\left(1.a,\frac{b}{1}+0\right)=(a,b)\Rightarrow(1,0)\ element\ neutre$$

$\forall(a,b)\in G,\exists(a',b')\in G:(a,b)\perp(a',b')=(a',b')\perp(a,b)=(1,0)\Leftrightarrow$ لكل عنصر نظير

$$(a,b)\perp(a',b')=(1,0)\Leftrightarrow\left(aa',\frac{b'}{a}+b\right)=(1,0)\Leftrightarrow(aa'=1)\wedge\left(\frac{b'}{a}+b=0\right)\Rightarrow a'=\frac{1}{a}\wedge b'=-ab$$

$$\left(\frac{1}{a},-ab\right)\perp(a,b)=\left(\frac{1}{a},ba-ab\right)=(1,0)\Rightarrow(a',b')=\left(\frac{1}{a},-ab\right)\ est\ l'element\ inverse$$

$\perp$ ليست تبديليه: مثال

$$(2,3)\perp(2,4)=(4,5)\wedge(2,4)\perp(2,3)=\left(4,\frac{11}{2}\right)\Rightarrow(2,3)\perp(2,4)\neq(2,4)\perp(2,3)$$

إذن $(G,\perp)$ هي زمرة غير تبديليه.

جامعــة جيجــل

كلية العلوم الدقيقة والإعلام الآلي

قسم التعليم الأساسي للرياضيات و الإعلام الآلي ديسمبر2013

السنة الأولى **الوقت:ساعة و نصف**

امتحان قصير تعويضي "الجبر1"

التمرين الأول:(1ن)

لتكن القضية $P \qquad \forall x \in \Re : x^3 = 2 \Rightarrow x < 2$

أعط نفي القضية $\overline{P}$ و عكس النقيض.هل القضية P صحيحة أم خاطئة؟

التمرين الثاني: (2ن)

لتكن $\lambda \in \Re$ و R علاقة ثنائية معرفة على $\Re$ بـ: $\forall (a,b) \in \Re^2 : aRb \Leftrightarrow a^3 - b^3 = \lambda (a^2 - b^2)$

برهن أن R علاقة تكافؤ.

من أجل $\lambda = 7$ عين صنف التكافؤ العدد6

التمرين الثالث: (3ن)

ليكن $f : \Re \mapsto \Re$ تطبيق معرف بـ: $\forall x \in \Re : f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$

1) نضع $A = \left\{0, \frac{1}{2}, 1, 2\right\}$ أحسب $f(A)$.هل التطبيق f متباين؟

2) عين قيم $y \in \Re$ التي من أجلها تكون المعادلة $f(x) = y$ لها حلول.

3)استنتج أن $f(\Re) = \left[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.هل التطبيق f غامر؟

4) أحسب $f^{-1}(B)$ حيث $B = [-1,0]$

التمرين الرابع: (4ن)

لتكن $G = \Re^* \times \Re$ مزودة بالعملية $\perp$ حيث

$$\forall (a,b) \in G, \forall (a',b') \in G : (a,b) \perp (a',b') = \left(a.a', \frac{b'}{a} + b\right)$$

برهن أن $(G,\perp)$ زمرة غير تبديليه.

بالتوفيق

جامعـــة عبد الحق بن حمودة جيجـــل

كلية العلوم الدقيقة والإعلام الآلي

قسم الرياضيات **ديسمبر2012**

السنة الأولى رياضيات و إعلام آلي **الوقت:ساعة و نصف**

امتحان قصير المدى"الجبر1"

التمرين الأول:(1ن)

لتكن A,B,D ثلاثة أجزاء من E.

برهن الاستلزام التالي: $A\cap B=A\cap D\Rightarrow A\cap C_E B=A\cap C_E D$

التمرين الثاني: (2ن)

لتكن R علاقة معرفة على $\Re$ بـ: $\forall(a,b)\in\Re^2 : aRb\Leftrightarrow a^2-b^2=a-b$

برهن أن R علاقة تكافؤ.

عين صنف التكافؤ a

التمرين الثالث: (3ن)

نعرف التطبيق:

$$f: Z^2\to Z^2\ \ tq\ \ f(x,y)=(2x+y,x+y)$$

برهن أن f تقابلي.

عين التطبيق f^{-1} .

التمرين الرابع: (4ن)

لتكن $E=]-1,\infty[$ مزودة بالعملية Δ حيث $\forall(x,y)\in E^2 : x\Delta y=\dfrac{xy+x+y-2}{3}$

برهن أن Δ قانون تركيب داخلي في E (يمكن حساب $x\Delta y+1$)

برهن أن (E,Δ) زمرة تبديليه.

بالتوفيق