التمرين 6:

$$G = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$$

$\forall (a,b) \in G, \ \forall (a',b') \in G :$

$$(a,b) \perp (a',b') = \left(aa', \frac{b'}{a} + b\right)$$

$(G,\perp)$ زمرة غير تبديلية $\Leftrightarrow$

1) $\perp$ قانون تركيب داخلي في G.
2) $\perp$ عملية تجميعية.
3) $\perp$ تقبل عنصر حيادي.
4) لكل عنصر من G نظير في G بالعملية $\perp$

1) $\perp$ قانون تركيب داخلي في G

$\forall (a,b), (a',b') \in G, \ (a,b) \perp (a',b') \in G$
(واضح)

العملية غير تبديلية (نترك للطالب)

2) $\perp$ تجميعية $\Leftrightarrow$

$\forall (a,b), (a',b'), (a'',b'') \in G :$

$$(a,b) \perp \big((a',b') \perp (a'',b'')\big) = \big((a,b) \perp (a',b')\big) \perp (a'',b'')$$

$(a,b) \perp \big((a',b') \perp (a'',b'')\big)$

$= (a,b) \perp \left(a'a'', \frac{b''}{a'} + b'\right)$

$= \left(aa'a'', \frac{b''}{aa'} + \frac{b'}{a} + b\right) \quad — ①$

$\big((a,b) \perp (a',b')\big) \perp (a'',b'')$

$= \left(aa', \frac{b'}{a} + b\right) \perp (a'',b'')$

$= \left(aa'a'', \frac{b''}{a} + \frac{b'}{a} + b\right) \quad — ②$

من ① و ② نستنتج أن $\perp$ تجميعية.

3) $\perp$ تقبل عنصر حيادي $\Leftrightarrow$

$\exists (e,e') \in G, \ \forall (a,b) \in G :$

$(e,e') \perp (a,b) = (a,b) \ \wedge$

$(a,b) \perp (e,e') = (a,b).$

$(e,e') \perp (a,b) = (a,b)$

$\Leftrightarrow \left(ea, \frac{b}{e} + e'\right) = (a,b)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} ea = a \\ \frac{b}{e} + e' = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e = 1, \\ e' = 0. \end{cases}$

ومنه $(e,e') = (1,0) \in G$.

$(a,b) \perp (e,e') = (a,b)$

$\Leftrightarrow \left(ae, \frac{e'}{a} + b\right) = (a,b)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} ae = a \\ \frac{e'}{a} + b = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e = 1 \\ e' = 0. \end{cases}$

إذاً $\perp$ تقبل عنصر حيادي $(1,0) \in G$.

4) لكل عنصر من G نظير في G $\Leftrightarrow$

$\forall (a,b) \in G, \ \exists (a',b') \in G :$

$$\begin{cases} (a,b) \perp (a',b') = (1,0) \\ (a',b') \perp (a,b) = (1,0) \end{cases}$$

$(a,b) \perp (a',b') = (1,0)$

$\Leftrightarrow \left(aa', \frac{b'}{a} + b\right) = (1,0)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} aa' = 1, \\ \frac{b'}{a} + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a' = \frac{1}{a} \quad (a \in \mathbb{R}^*) \\ b' = -ab. \end{cases}$

من جهة أخرى:

$(a',b') \perp (a,b) = (1,0)$

$\Leftrightarrow \left(a'a, \frac{b}{a'} + b'\right) = (1,0)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a'a = 1, \\ \frac{b}{a'} + b' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a' = \frac{1}{a}. \\ b' = \frac{-b}{a'} = -ab \end{cases}$

ومنه: نظير (a,b) في G هو $\left(\frac{1}{a}, -ab\right)$

إذاً من ①، ②، ③ و ④ نستنتج أن:

$(G,\perp)$ زمرة غير تبديلية.

التمرين 7

$\forall a,b\in\mathbb{R}:\quad a\oplus b = a+b+1$

$a\otimes b = ab+a+b$

العمليتان $\oplus$ و $\otimes$ داخليتان في $\mathbb{R}$.

1) $(\mathbb{R},\oplus,\otimes)$ حلقة تبديلية $\Leftrightarrow$

1) $(\mathbb{R},\oplus)$ زمرة تبديلية
2) $\otimes$ تجميعية
3) $\otimes$ توزيعية على $\oplus$
4) $\otimes$ تبديلية.

نقول أنها واحدية إذا كانت $\otimes$ تقبل عنصر حيادي.

$(\mathbb{R},\oplus)$ زمرة تبديلية $\Leftrightarrow$

- $\oplus$ تبديلية
- $\oplus$ تجميعية
- $\oplus$ تقبل عنصر حيادي
- لكل عنصر من $\mathbb{R}$ نظير في $\mathbb{R}$ بالعملية $\oplus$

$\oplus$ تبديلية $\Leftrightarrow$ $\forall a,b\in\mathbb{R}:$

$a\oplus b = b\oplus a.$

$a\oplus b = a+b+1 = b+a+1$

$= b\oplus a.$

$\oplus$ تجميعية $\Leftrightarrow$ $\forall a,b,c\in\mathbb{R}:$

$a\oplus(b\oplus c) = (a\oplus b)\oplus c$

$a\oplus\underbrace{(b\oplus c)}_{a'} = a\oplus a'$

$= a+a'+1$

$= a+(b\oplus c)+1$

$= a+(b+c+1)+1$

$= a+b+c+2$

$= (a+b+1)+c+1$

$= (a\oplus b)+c+1$

$= (a\oplus b)\oplus c$

$\oplus$ تقبل عنصر حيادي $\Leftrightarrow$

$\exists e\in\mathbb{R},\ \forall a\in\mathbb{R}:\ a\oplus e = e\oplus a = a$

$a\oplus e = a \Leftrightarrow a+e+1 = a$

$\Leftrightarrow e = -1$

لكل عنصر من $\mathbb{R}$ نظير في $\mathbb{R}$ بالعملية $\oplus$ $\Leftrightarrow$

$\forall a\in\mathbb{R},\ \exists a'\in\mathbb{R}:\ a\oplus a' = a'\oplus a = -1$

$a\oplus a' = -1 \Leftrightarrow a+a'+1 = -1$

$\Leftrightarrow a' = -a-2.$

ومنه نظير a في $\mathbb{R}$ هو $(-a-2)$

إذن: $(\mathbb{R},\oplus)$ زمرة تبديلية.

2) $\otimes$ تجميعية $\Leftrightarrow$ $\forall a,b,c\in\mathbb{R}:$

$a\otimes(b\otimes c) = (a\otimes b)\otimes c$

$a\otimes(b\otimes c) = a(b\otimes c)+a+(b\otimes c)$

$= a(bc+b+c)+a+(bc+b+c)$

$= abc+ab+ac+a+bc+b+c$ —(1)

$(a\otimes b)\otimes c = (a\otimes b)c+(a\otimes b)+c$

$= (ab+a+b)c+(ab+a+b)+c$

$= abc+ac+bc+ab+a+b+c$ —(2)

من (1) و (2) نجد أن $\otimes$ تجميعية.

3) $\otimes$ توزيعية على $\oplus$ $\Leftrightarrow$

$\forall a,b,c\in\mathbb{R}:$

$a\otimes(b\oplus c) = (a\otimes b)\oplus(a\otimes c)$

(1) توزيعية على $\oplus$ من اليسار

$(a\oplus b)\otimes c = (a\otimes c)\oplus(b\otimes c)$

$\otimes$ توزيعية على $\oplus$ من اليمين

لدينا

$a\otimes(b\oplus c) = a(b\oplus c)+a+(b\oplus c)$

$= a(b+c+1)+a+(b+c+1)$

$= ab+ac+a+a+b+c+1$

$(a\otimes b)\oplus(a\otimes c)$

$= (ab+a+b)\oplus(ac+a+c)$

$= ab+a+b+ac+a+c+1$

$= a\otimes(b\oplus c)$.

من جهة أخرى:

$((a\oplus b)\otimes c) = (a\oplus b)c + (a\oplus b) + c$

$= (a+b+1)c + a+b+1+c$

$= ac+bc+c+a+b+c+1$.

$(a\otimes c)\oplus(b\otimes c)$

$= (ac+a+c)\oplus(bc+b+c)$

$= ac+a+c+bc+b+c+1$

$= (a\oplus b)\otimes c$

ومنه $\otimes$ توزيعية على $\oplus$.

إذن: $(R,\oplus,\otimes)$ حلقة.

$\otimes$ تبديلية $\Leftrightarrow$

$\forall a,b\in R$:

$a\otimes b = b\otimes a$.

$a\otimes b = ab+a+b$

$= ba+b+a$

$= b\otimes a$

ومنه: $(R,\oplus,\otimes)$ حلقة تبديلية.

$\otimes$ تقبل عنصر حيادي $\Leftrightarrow$

$\exists e\in R, \forall a\in R$:

$e\otimes a = a\otimes e = a$.

$e\otimes a = a \Leftrightarrow ea+e+a=a$

$\Leftrightarrow e(a+1)=0$

$\Leftrightarrow e=0$

إذن $(R,\oplus,\otimes)$ حلقة تبديلية وأحادية عنصريها الحياديين هما:

$\boxed{0_R=-1 \wedge 1_R=0}$

2) $(R,\oplus,\otimes)$ حلقة تامة إذا كانت لا تحتوي على قواسم الصفر أي:

$\forall x,y\in R,\ x\otimes y=0 \Rightarrow x=0_R \vee y=0_R$

لدينا:

$x\otimes y=0 \Leftrightarrow xy+x+y=0$

$\Leftrightarrow (x+1)(y+1)=0$

$\Rightarrow x=-1 \vee y=-1$

ومنه: $(R,\oplus,\otimes)$ حلقة تامة.

3) العناصر القابلة للقلب:

نقول أن $a\in R$ $(a\neq 0_R)$ أنه قابل للقلب إذا وجد $b\in R$ و $b\neq 0_R$ بحيث $a\otimes b=1_R$.

$a\otimes b = 1_R = 0$.

$\Leftrightarrow ab+a+b=0$

$\Leftrightarrow b(a+1)=-a$

$\Leftrightarrow b=\frac{-a}{a+1}\ /\ a\neq -1$

ومنه: جميع العناصر قابلة للقلب إذن $(R,\oplus,\otimes)$ حقل تبديلي.

التمرين 8:

1) برهن أن $\mathbb{Z}_{(3)}$ حلقة جزئية من $(\mathbb{Q},+,\cdot)$

$\mathbb{Z}_{(3)}$ حلقة جزئية من $(\mathbb{Q},+,\cdot)$ $\Leftrightarrow$

1) $\mathbb{Z}_{(3)}\neq\emptyset$

2) $\forall x,y\in\mathbb{Z}_{(3)};\ x+y\in\mathbb{Z}_{(3)}$

3) $\forall x\in\mathbb{Z}_{(3)};\ (-x)\in\mathbb{Z}_{(3)}$

4) $\forall x,y\in\mathbb{Z}_{(3)};\ x\times y\in\mathbb{Z}_{(3)}$

نلاحظ أولا أن: bb' لا مضاعف لـ 3 $\Leftrightarrow$ (b لا مضاعف لـ 3) $\vee$ (b' لا مضاعف لـ 3)

• $\left(0=\frac{0}{1} \wedge 1=\frac{1}{1}\right) \Rightarrow 0,1 \in \mathbb{Z}_{(3)}$

$\Rightarrow \mathbb{Z}_{(3)} \neq \emptyset$

• $\begin{cases} x \in \mathbb{Z}_{(3)} \\ \wedge \\ y \in \mathbb{Z}_{(3)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{a}{b} \text{ ; } b \text{ لا يقبل القسمة على } 3 \\ \wedge \\ y = \frac{a'}{b'} \text{ ; } b' \text{ لا يقبل القسمة على } 3 \end{cases}$

$x+y = \frac{a}{b} + \frac{a'}{b'} = \frac{ab'+a'b}{bb'} = \frac{a''}{b''}$

$b''=bb'$ لا يقبل القسمة على 3

ومنه: $x+y \in \mathbb{Z}_{(3)}$.

• $x \in \mathbb{Z}_{(3)} \Leftrightarrow x = \frac{a}{b}$, b لا يقبل القسمة على 3

$\Leftrightarrow -x = \frac{-a}{b} = \frac{a'}{b}$

ومنه: $-x \in \mathbb{Z}_{(3)}$.

• $\begin{cases} x \in \mathbb{Z}_{(3)} \\ \wedge \\ y \in \mathbb{Z}_{(3)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{a}{b} \text{ ; } b \text{ لا يقبل القسمة على } 3 \\ \wedge \\ y = \frac{a'}{b'} \text{ ; } b' \text{ لا يقبل القسمة على } 3 \end{cases}$

$x \cdot y = \frac{a}{b} \cdot \frac{a'}{b'} = \frac{aa'}{bb'} = \frac{a''}{b''}$

b'' لا يقبل القسمة على 3 ومنه:

$xy \in \mathbb{Z}_{(3)}$.

• نقول أن $\mathbb{Z}_{(3)}$ حقل إذا كانت جميع العناصر قابلة للقلب و $\mathbb{Z}_{(3)}$ حلقة تبديلية واحدية.

لدينا: $\frac{3}{5} \in \mathbb{Z}_{(3)}$ لكن $\left(\frac{3}{5}\right)^{-1} = \frac{5}{3} \notin \mathbb{Z}_{(3)}$

غير قابل للقلب في $\mathbb{Z}_{(3)}$.

ومنه: $\mathbb{Z}_{(3)}$ ليس حقل.

ب) نبرهن أن:

$\forall x \in \mathbb{Q}:$

$x \in \mathbb{Z}_{(3)} \vee x^{-1} \in \mathbb{Z}_{(3)}$.

نفرض أن:

$x \notin \mathbb{Z}_{(3)} \Leftrightarrow x = \frac{a}{b}$;

b يقبل القسمة على 3.

أي b مضاعف لـ 3 ومنه a لا يقبل القسمة على 3 إذن: $x^{-1} = \frac{b}{a} \in \mathbb{Z}_{(3)}$

التمرين 09

$\forall a,b\in A;\ a*b=ab-ba$

1) * توزيعي على الجمع (+)

$\forall a,b,c\in A:$

$$\begin{cases} a*(b+c)=(a*b)+(a*c) \\ (a+b)*c=(a*c)+(b*c). \end{cases}$$

لدينا:

$a*(b+c) = a(b+c)-(b+c)a$

$= ab+ac-ba-c$

$(a*b)+(a*c) = (ab-ba)+$

$(ac-ca)$

$= a*(b+c)$

$(a+b)*c = (a+b)c - c(a+b)$

$= ac+bc-ca-cb$

$= (ac-ca)+(bc-c$

$= (a*c)+(b*c).$

ومنه * توزيعيا على الجمع.

$\forall a,b\in A:\ a*b=-b*a$

لدينا:

$a*b=ab-ba$

$(-b)*a = (-b)a - a(-b)$

$= -ba-(-ab)$

$= -ba+ab$

$= ab-ba$

$= a*b$

3) $x*(y*z)+y*(z*x)+z*(x*y)=0$

$x*(y*z)= x*(yz-zy)$

$= x(yz-zy)-(yz-zy)x$

$= xyz-xzy-yzx-(-zy)$

ت) $x*(y*z)=xyz-xzy-yzx+zyx$ ——①

$y*(z*x) = y(z*x)-(z*x)y$

$= y(zx-xz)-(zx-xz)y$

$= yzx-yxz-zxy+xzy$ ——②

$z*(x*y) = z(x*y)-(x*y)z$

$= zxy-zyx-xyz+yxz$ ——③

من ① و ② و ③ نجد:

$x*(y*z)+y*(z*x)+z*(x*y)=0$

$x*(y*z)-(x*y)*z$

$= x*(y*z)+z*(x*y)+0_A$

$= x*(y*z)+z*(x*y)+y*(z*x)$

$-y*(z*x)$

من السؤال (3-1) لدينا:

$x*(y*z)+y*(z*x)+z*(x*y)=0$

ومنه:

$x*(y*z)-(x*y)*z$

$= -y*(z*x)$

$= (z*x)*y.$

التمرين 10:

1) $(\mathbb{R}^2,\oplus,\otimes)$ حلقة تبديلية (يترك للطالب)

$\otimes$ تقبل عنصر حيادي (e,e')

$\exists (e,e')\in\mathbb{R}^2, \forall (a,b)\in\mathbb{R}^2:$

$(e,e')\otimes(a,b)=(a,b)\otimes(e,e')=(a,b).$

$(e,e')\otimes(a,b)=(a,b)$

$\Leftrightarrow (ea-e'b,\ eb+e'a)=(a,b)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} ea-e'b=a\\ eb+e'a=b\end{cases} \Leftrightarrow (e,e')=(1,0).$

أي: $1_{\mathbb{R}^2}=(1,0)$

2) العناصر القابلة للقلب

نقول أن $(a,b)\in\mathbb{R}^2/(a,b)\neq(0,0)$ قابل للقلب إذا وجد: $(a',b')\in\mathbb{R}^2/(a',b')\neq(0,0)$ و:

$(a,b)\otimes(a',b')=1_{\mathbb{R}^2}$

$(a,b)\otimes(a',b')=(1,0)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} aa'-bb'=1, & \times b\\ ab'+ba'=0 & \times a\end{cases}$

والطرح نجد: $b'=\dfrac{-b}{a^2+b^2}$

بالتعويض نجد: $a'=\dfrac{b}{a^2+b^2}$

ومنه جميع عناصر $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ قابلة للقلب إذن: $(\mathbb{R}^2,\oplus,\otimes)$ حقل تبديلي.

3) $i^2=-1_{\mathbb{R}^2}$ حيث $i=(0,1)$ ؟

لدينا: $i^2=i\otimes i=(0,1)\otimes(0,1)$

$=(-1,0)=(-1)(1,0)=-1_{\mathbb{R}^2}$

$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2:$

$(x,y)=(x,0)\oplus(0,y)$

$=x(1,0)\oplus y(0,1)$

$=x.1_{\mathbb{R}^2}\oplus y.i$

$=x+iy.$

التمرين 11:

$(\mathbb{Q},+,\times)$ حقل و $K\subset\mathbb{Q}$ $(K\neq\emptyset)$

نبرهن أنه إذا كان K حقل جزئي من $\mathbb{Q}$ فإن: $K=\mathbb{Q}$.

نفرض أن K حقل جزئي من $\mathbb{Q}$

ومنه: $0,1\in K$.

لدينا: $2=1+1\in K$ و $3=2+1\in K$

ومنه بالتراجع، نبرهن أن $\mathbb{N}\subset K$

باستعمال خاصية الاستقرار بالنسبة للعنصر النظير نجد أن: $\mathbb{Z}\subset K$

ومنه إذا كان: $x=\frac{p}{q}$ حيث: $p\in\mathbb{Z}$ و $q\in\mathbb{N}^*$ إذن: $p\in K$ و $q\in K$ $(q\neq 0)$

ومنه: $\frac{p}{q}\in K$ إذن: $\mathbb{Q}\subset K$.

"بالتوفيق"