Département de mathématiques, Université de Jijel
3ième année Licence, 2020/2021

TD 01: ESPACES VECTORIELS NORMÉS

Exercice 1.

Dites si les propositions suivantes sont vraies ou fausses:

1. Si (E, N) est un espace vectoriel normé, $x \in E, r > 0$ et $B(x, r)$ est la boule de centre x et de rayon $r > 0$, alors pour tout $\lambda > 0$, $\lambda B(x, r) = B(x, \lambda r)$.
2. $N : (x, y) \mapsto |5x + 3y|$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$.
3. Si N_1 et N_2 sont deux normes équivalentes sur un evn E, et si on note $B_1 = \{x \in E; N_1(x) \leq 1\}$ et $B_2 = \{x \in E; N_2(x) \leq 1\}$, alors il existe $a, b \geq 0$ tels que $aB_1 \subset B_2 \subset bB_1$.
4. Soit (u_n) une suite de l'espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ et soit $l \in E$. Alors (u_n) converge vers l si et seulement si $(\|u_n - l\|)$ tend vers 0.
5. Une suite (u_n) de l'espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ converge si et seulement si toute suite extraite de (u_n) converge.

Exercice 2.

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, $x, y \in E$. Démontrer que

$$x + B(y, r) \;=\; B(x + y, r).$$

Exercice 3.

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Démontrer que, pour tous $x, y \in E$, on a

$$\|x\| + \|y\| \leq \|x + y\| \;+\; \|x - y\|.$$

En déduire que

$$\|x\| + \|y\| \leq 2 \max(\|x + y\|,\; \|x - y\|).$$

Exercice 4.

Soient N_1 et N_2 deux normes sur un espace vectoriel E. On pose $N = \max(N_1, N_2)$. Démontrer que N est une norme sur E.