Table des matières

Chapitre 3

Systèmes différentiels linéaires

1.1 Introduction

Définition 1.1.1 *Un système différentiel linéaire de premier ordre est un système de la forme*

$$Y'(t) = A(t)Y(t) + B(t), \quad t \in I \tag{1.1}$$

où I est un intervalle de $\mathbb{R}$, $Y : I \to \mathbb{K}^n$ est l'inconnue, $A : I \to \mathbb{K}^{n\times n}$ est une matrice à coefficients continus, $B : I \to \mathbb{K}^n$ est un vecteur à coefficients continus.

Théorème 1.1.2 *Pour chaque $(t_0, Y_0) \in I \times \mathbb{K}^n$ il passe une seule solution de (1.1) définie sur I.*

Preuve. Voir Chapitre 2. □

Ce résultat implique que

1. $S_0 = \{\text{solutions de } Y'(t) = A(t)Y(t)\}$ est un espace vectoriel de dimension n.
   Preuve. S_0, muni des opérations somme de deux solutions et produit d'un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ et d'une solution est un espace vectoriel. S_0 a dimension n, car si on fixe $t_0 \in I$, alors

$$\begin{array}{rccc} \Phi_{t_0} : & S_0 & \to & \mathbb{K}^n \\ & Y & \to & Y(t_0) \end{array}$$

   est un isomorphisme linéaire, grâce au théorème 1.1.2. □

2. $S = \{\text{solutions de } Y'(t) = A(t)Y(t) + B(t)\} = S_0 + Y_1$, Y_1 étant une solution de (1.1)
   Preuve. On prouve que $S = S_0 + Y_1$ par double inclusion. □

Remarque 1.1.3 *Pourquoi on appelle ces systèmes linéaires ? Parce qu'on peut les écrire sous la forme $\mathcal{A}(Y) = B$ où $\mathcal{A} := Y'(t) - A(t)Y(t)$ est un opérateur lináire.*

1.2 Etude de $Y'(t) = AY(t)$

On va étudier l'ensemble des solutions de ce systèmes et le problème de Cauchy associé.

Proposition 1.2.1 *Soient $Y_1, ..., Y_k$ k solutions de $Y' = AY$. Soit $t_0 \in \mathbb{R}$. Elles sont linéairement indépendentes si et seulement si $Y_1(t_0), ..., Y_k(t_0)$ sont k vecteurs linéairement indépendents.*

1. Soit A diagonalisable. Cela veut dire que A admet n vecteurs propres V_i linéairement indépendents, associés à n valeurs propres $\lambda_i \in \mathbb{K}$, non nécessairement distinctes ; cela est aussi équivalent à dire que $A = PDP^{-1}$ où P est une matrice dont les colonnes sont formées par les vecteurs propres de A et D est une matrice diagonale ayant sur la diagonale les valeurs propres de A. Alors, les n fonctions $t \to e^{\lambda_i t}V_i$ sont, à chaque instant t, linéairement indépendent et forment donc une base pour S_0. Cela implique que
   (a) La solution générale de $Y'(t) = AY(t)$ est $Y(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e^{\lambda_i t} V_i$, $\alpha_i \in \mathbb{K}$ ou également $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e^{\lambda_i (t-t_0)} V_i$.

(b) La solution de $Y'(t) = AY(t)$ qui passe par (t_0, V_0) est $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e^{\lambda_i(t-t_0)} V_i$ où les α_i sont tels que $V_0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i V_i$.

2. Supposons que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, et que A ne soit pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$, mais sur $\mathbb{C}$. Soient $\lambda_1, \overline{\lambda_1}, \lambda_2, \overline{\lambda_2}, ...\lambda_m, \overline{\lambda_m} \in \mathbb{C}$, $\mu_1, \mu_2, ...\mu_l \in \mathbb{R}$ les valeurs propres de A (pas nécessairement distinctes) et $V_1, \overline{V_1}, V_2, \overline{V_2}, ..., V_m, \overline{V_m} (\in \mathbb{C}^n), W_1, W_2, ...W_l (\in \mathbb{R}^n)$ les vecteurs propres associés ($2m+l = n$). Les fonctions $t \to Re(e^{\lambda_i t} V_i), t \to Im(e^{\lambda_i t} V_i)$, $i = 1, ..., m$, $t \to e^{\mu_i t} W_i, i = 1, ..., l$ sont $2m + l$ solutions réelles linéairement indépendentes sur $\mathbb{R}$.

   N.B. : Un e deuxième méthode pour obtenir la solution générale réelle consiste à considérer la partie réelle de la solution générale complexe.

3. Dans le cas général on travaille avec l'exponentielle de A : $e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$

Proposition 1 *(a)* $\frac{d}{dt}(e^{tA}) = Ae^{tA} = e^{tA}A$

(b) Si $AB = BA$ *alors* $e^{A+B} = e^A e^B$

(c) Pour toute matrice A *on a* $(e^A)^{-1} = e^{-A}$

Comment calculer e^A ?

(a) Si A est diagonale, avec a_{ii} sur la diagonale, e^A est la matrice diagonale ayant $e^{a_{ii}}$ sur la diagonale.

(b) Si $A = PDP^{-1}$ où D est diagonale, alors $e^A = Pe^D P^{-1}$.

(c) Supposons que $A = \lambda I + N$ où N est une matrice triangulaire supérieure, dont la diagonale est composée par des 0. Alors $N^p = 0$ pour tout $p \geq n$. Alors $e^A = e^\lambda \sum_{i=0}^{p-1} \frac{N^k}{k!}$

(d) Supposons que A soit une matrice diagonale à blocs, de blocs A_1, A_2... de la forme précédente. Alors e^A est une matrice diagonale à blocs, de blocs e^{A_1}, e^{A_2}....

(e) Supposons que A soit semblable à une matrice B de la forme précédente : $A = PBP^{-1}$. Alors $e^A = Pe^B P^{-1}$.

N.B. : Toute matrice A peut s'écrire sous cette forme, grâce à la réduction de Jordan.

Proposition 1.2.2 $det\, e^A = e^{trA}$ *pour toute matrice* A*.*

Preuve. Grâce à la décomposition de Jordan on a que A est semblable à une matrice J à p blocs $J_i = \lambda_i I + N_i$ où N_i est une matrice nilpotente. Or, $det(e^{J_i}) = det(e^{\lambda_i I + N_i}) = e^{\lambda_i m_i} det\, e^{N_i} = e^{\lambda_i m_i}$. Par conséquent $det(e^A) = det(Me^J M^{-1}) = det(e^J) = det(e^{J_1})...det(e^{J_p}) = e^{trJ_1}...e^{trJ_p} = e^{trJ} = e^{trMAM^{-1}} = e^{trA}$. □

Théorème 1.2.3 *La solution générale de* $Y'(t) = AY(t)$ *est* $e^{tA}V$*, pour* $V \in \mathbb{K}^n$ *ou également* $e^{(t-t_0)A}V$*.*

Preuve. $Y(t) = e^{tA}V$ est une solution grâce aux propriétés de l'exponentielle d'une matrice. Par ailleurs toute autre solution est de cette forme. En fait soit $\tilde{Y}$ une solution. Alors il est facile de montrer que

$$\frac{d}{dt}(e^{-(t-t_0)A}\tilde{Y}) = 0$$

ce qui implique que $e^{-(t-t_0)A}\tilde{Y} = \tilde{Y}(t_0) = V_0$ et donc $\tilde{Y} = e^{(t-t_0)A}V_0$. □

Théorème 1.2.4 *La solution du problème* $Y'(t) = AY(t)$ *qui passe par* (t_0, Y_0) *est* $e^{(t-t_0)A}Y_0$*.*

Une deuxième méthode de construir une solution dans le cas où A n'est pas diagonalisable est la suivante.

Définition 1.2.5 *Soit $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ une matrice. Soit λ une valeur propre de multiplicité algébrique m. L'espace propre généralisé relatif à λ est $Ker_g(\lambda) = \{v \in \mathbb{C}^n$ tel qu'il existe $m : (A-\lambda I)^m v = 0\}$*

Théorème 1.2.6 *Soit $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ une matrice ayant $\lambda_1, ..., \lambda_k$ comme valeurs propres distinctes, avec multiplicités algébriques $m_1, ...m_k$ respectivement ($m_1 + ... + m_k = n$). Supposons que pour chaque $j = 1, ..., k$, les vecteurs α_{ij}, $i = 1, ..., m_j$, forment une base de $Ker_g(\lambda_j)$. Alors*

1. *Les vecteurs α_{ij} forment une base de $\mathbb{C}^n$.*
2. *Soit $P_{ij}(t) = \sum_{p=0}^{m_j-1} \frac{t^p}{p!}(A-\lambda_j I)^p \alpha_{ij}$. Alors $e^{\lambda_j t}P_{ij}(t), j = 1, ..., k, i = 1, ..., m_j$ sont n solutions complexes linéairement indépendantes de $Y' = AY$.*

En pratique, pour chaque valeur propre λ de la matrice A, de multiplicité algébrique m on cherche une base $\alpha_i, i = 1..m$ de $Ker_g(\lambda)$. On calcule

$$P_i(t) = \sum_{p=0}^{m-1} \frac{t^p}{p!}(A-\lambda I)^p \alpha_i = \alpha_i + t(A-\lambda I)\alpha_i + ... \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}(A-\lambda I)^{m-1}\alpha_i$$

et on écrit $e^{\lambda t}P_i(t)$ pour chaque i. Si on fait cela pour chaque valeur propre on obtient une base de solutions.

Remarque 1.2.7 *Soit λ une valeur propre de A. Comment trouver un base de $Ker_g(\lambda)$? Supposons que la multiplicité algébrique de λ soit m.*

1. *L'ensemble des chaines de Jordan relatives aux vecteurs propres de A correspondants à λ forment une base de $Ker_g(\lambda)$.*
2. *Après avoir trouvé les vecteurs propres relatifs à λ, on cherche tous les vecteurs v tels que $(A-\lambda I)^2 v = 0$ et $(A-\lambda I)v \neq 0$. Si cela ne nous donne pas m vecteurs linéairement indépendants, on cherche tous les vecteurs v tels que $(A-\lambda I)^3 v = 0$ et $(A-\lambda I)^2 v \neq 0$...*

1.3 Matrice fondamentale de solutions

Définition 1.3.1 *Une matrice fondamentale de solutions est une matrice X dont les colonnes sont n solutions linéairement indépendentes de $Y'(t) = AY(t)$.*

Théorème 1.3.2

1. *e^{tA} est une matrice fondamentale de solutions, c'est-à-dire que ses colonnes sont n solutions linéairement indépendantes de $Y' = AY$.*
2. *N'importe quelle matrice fondamentale X satisfait $X(t) = e^{At}X(0)$.*

Remarque 1.3.3 *La solution générale de $Y' = AY$ est $Y(t) = X(t)V$ ($V \in \mathbb{K}$) si $X(t)$ est une matrice fondamentale des solutions.*

1.4 Etude de $Y'(t) = AY(t) + B(t)$

On connait déjà la structure des solutions de ce système : toute solution est de la forme $Y_1 + S_0$, où Y_1 est une solution particulière. Comment trouver une solution Y_1 ? Il y a deux méthodes :

1. Si on connait e^{tA}, on cherche une solution de la forme $e^{tA}W(t)$. On trouve que $\int_{t_0}^t e^{(t-s)A}B(s)ds$ est une solution particulière.
2. En général, si $X(t)$ est une matrice fondamentale de solutions, où $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ sont ses n colonnes on peut chercher une solution de la forme $\alpha_1(t)Y_1(t) + ... + \alpha_n(t)Y_n(t)$. On trouve que

$$\begin{pmatrix} \alpha_1' \\ ... \\ \alpha_n' \end{pmatrix} = X(t)^{-1}B(t)$$

Théorème 1.4.1 $Y_1(t) = \int_{t_0}^t e^{(t-s)A}B(s)ds$ *est une solution de $Y' = AY + B$.*

Théorème 1.4.2 *$Y_1(t) = e^{(t-t_0)A}V_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-s)A}B(s)ds$ est la solution de $Y' = AY + B$, avec $Y(t_0) = V_0$.*

Théorème 1.4.3 *$Y(t) = X(t)\int_{t_0}^t X^{-1}(s)B(s)ds$ est une solution du système $Y' = AY + B$.*

Théorème 1.4.4 *$Y(t) = X(t)X^{-1}(t_0)Y(t_0) + X(t)\int_{t_0}^t X^{-1}(s)B(s)ds$ est la solution du système $Y' = AY + B$ qui passe par (t_0, Y_0).*

Proposition 1.4.5 *Soit $Y' = AY + B$.*

1. *Soit $B(t) = e^{\mu t}\beta$, où μ n'est pas une valeur propre de A. Alors $Y(t) = -e^{\mu t}(A - \mu I)^{-1}\beta$ est une solution.*
2. *Soient $B(t)$ un polynôme de degré r et A une matrice inversible. Alors le système admet comme solution un polynôme de degré r.*
3. *Soit $B(t) = e^{\mu t}P(t)$, où μ n'est pas une valeur propre de A et P est un polynôme de degré r. Alors le système admet une solution sous la forme $e^{\mu t}Q(t)$ où Q est un polynôme de degré r.*

Remarque 1.4.6 *Soit $Y' = AY + B$, avec $Y(0) = Y_0$, où $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ est inversible et $B \in \mathbb{K}^n$. Il suffit de poser $C = A^{-1}B$ et $Z(t) = Y(t) + C$. Le système est alors équivalent à $Z' = AZ$ avec $Z(0) = Y_0 + C$.*

1.5 Équations différentielles d'ordre p à coefficients constants

1. Homogènes : $a_py^{(p)} + a_{p-1}y^{(p-1)} + ...a_1y' + a_0y = 0$
   Cette équation peut s'écrire sous la forme de système linéaire de premier ordre sur $\mathbb{K}^{p\times p}$: $Y' = AY$, où $Y = (y\ y'...y^{(p-1)})^T$ et

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & ... \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ -\frac{a_0}{a_p} & -\frac{a_1}{a_p} & ... & ... & ... & -\frac{a_{p-1}}{a_p} \end{pmatrix}$$

   L'ensemble des solutions est donc un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension p.
   Quelle est une base ? On définit $P(\lambda) = a_p\lambda^{(p)} + a_{p-1}\lambda^{(p-1)} + ...a_1\lambda + a_0$. Supposons que les racines de ce polynôme soient $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_s \in \mathbb{C}$, de multiplicité $m_1, m_2, ..., m_s$.

   Lemma 1.5.1 *Soient $\lambda_1, ..., \lambda_s$ s nombres complexes distincts et $n_1, ..., n_s$ s nombres naturels. Alors les fonctions $t \to t^qe^{\lambda_jt}$, $1 \le j \le s$, $0 \le q \le n_j - 1$ sont linéairement indépendantes.*

   Le lemme précédent et le fait que $t \to t^qe^{\lambda_jt}$, $1 \le j \le s$, $0 \le q \le m_j - 1$ sont solutions de $a_py^{(p)} + a_{p-1}y^{(p-1)} + ...a_1y' + a_0y = 0$ impliquent

   Théorème 1.5.2 *Les fonctions $t \to t^qe^{\lambda_jt}$, $1 \le j \le s$, $0 \le q \le m_j - 1$ forment une base de solutions complexes de $a_py^{(p)} + a_{p-1}y^{(p-1)} + ...a_1y' + a_0y = 0$.*

   Remarque 1.5.3 *Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ alors il suffit de prendre la partie réelle des solutions complexes.*

2. Avec second membre : $a_py^{(p)} + a_{p-1}y^{(p-1)} + ...a_1y' + a_0y = b(t)$
   La solution générale est la somme de la solution générale de $a_py^{(p)} + a_{p-1}y^{(p-1)} + ...a_1y' + a_0y = 0$ et d'une solution particulière.
   Comment trouver une solution particulière ? Soit $v_1(t), v_2(t), ..., v_p(t)$ la base de solutions de $a_py^{(p)} + a_{p-1}y^{(p-1)} + ...a_1y' + a_0y = 0$ trouvée dans la section précédente. Alors

$$V_i = \begin{pmatrix} v_i \\ v_i' \\ ... \\ \\ v_i^{(p-1)} \end{pmatrix}, i = 1, ..., n$$

   sont una base pour le système $Y' = AY$, où A et Y sont définis dans la section précédente. On peut alors chercher une solution particulière sous la forme $Y(t) = \sum_{i=1}^p \alpha_i(t)V_i(t)$. Celle-là est une solution particulière si et seulement si $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i'(t)V_i(t) = B(t) = (0\ 0\ ...\frac{b(t)}{a_p})^T$. On a donc un système de p équations dans les p inconnues $\alpha_i'(t)$. Ce système a surement une solution car les $V_i(t)$ sont linéairement indépendants.

Proposition 1.5.4 *Soit $ay'' + by' + cy = a_0 + a_1t + ... + a_nt^n$. Montrer que*

1. $\psi(t) = A_0 + A_1t + ... + A_nt^n$ *est une solution, si* $c \neq 0$.
2. $\psi(t) = t(A_0 + A_1t + ... + A_nt^n)$ *est une solution, si* $c = 0$ *et* $b \neq 0$.
3. $\psi(t) = t^2(A_0 + A_1t + ... + A_nt^n)$ *est une solution, si* $c = b = 0$.

Proposition 1.5.5 *Soit $ay'' + by' + cy = (a_0 + a_1t + ... + a_nt^n)e^{\alpha t}$. Alors*

1. $\psi(t) = (A_0+A_1t+...+A_nt^n)e^{\alpha t}$ *est une solution, si* $e^{\alpha t}$ *n'est pas une solution de* $ay'' + by' + cy = 0$.
2. $\psi(t) = t(A_0 + A_1t + ... + A_nt^n)e^{\alpha t}$ *est une solution, si* $e^{\alpha t}$ *est une solution de* $ay'' + by' + cy = 0$, *mais pas* $te^{\alpha t}$.
3. $\psi(t) = t^2(A_0+A_1t+...+A_nt^n)e^{\alpha t}$ *est une solution, si* $e^{\alpha t}$, $te^{\alpha t}$ *sont solutions de* $ay'' + by' + cy = 0$.

Proposition 1.5.6 *Soit $y(t) = u(t) + iv(t)$ une solution complexe de l'équation $ay'' + by' + cy = g_1(t) + ig_2(t)$, où $a, b, c \in \mathbb{R}$. Alors u résoud $ay'' + by' + cy = g_1(t)$ et v résoud $ay'' + by' + cy = g_2(t)$.*

1.6 Etude des systèmes linéaires à coefficients variables

1. Etude de $Y'(t) = A(t)Y(t)$
   Soit $S = \{$solutions de $Y'(t) = A(t)Y(t)\}$. Soit

$$\begin{array}{cccc} \Phi_{t_0}: & S & \to & \mathbb{K}^n \\ & Y & \to & Y(t_0) \end{array}$$

Définition 1.6.1 *Pour tout $(t, t_0) \in I \times I$, la résolvante de $Y'(t) = A(t)Y(t)$ est $\Phi_t \circ \Phi_{t_0}^{-1}$.*

Remarque 1.6.2 *Toute solution de $Y'(t) = A(t)Y(t)$ est $R(t, t_0)V$ oï£¡ $V = Y(t_0)$. $R(t, t_0)$ est un isomorphisme linéaire ; il peut donc être représenté à travers une matrice.*

Proposition 2 *(a) $R(t, t_0)$ est la seule application qui vérifie $\dfrac{dM}{dt} = A(t)M$ et $M(t_0) = I$.*
(b) $R(t_2, t_1)R(t_1, t_0) = R(t_2, t_0)$

Théorème 1.6.3 *Si $A(t)A(s) = A(s)A(t)$ alors $R(t, t_0) = e^{\int_{t_0}^{t} A(s)ds}$.*

Preuve. On va montrer que $R(t, t_0)$ vérifie la propriété 1 de la proposition précédente. Puisque $A(t)A(s) = A(s)A(t)$ alors

$$\int_a^b A(s)ds \int_c^d A(s)ds = \int_c^d A(s)ds \int_a^b A(s)ds = \int_{(a,b)\times(c,d)} A(s)A(t)dsdt\,.$$

Soit $M(t) = e^{\int_{t_0}^{t} A(s)ds}$. Alors

$$M(t+h) = e^{\int_{t}^{t+h} A(s)ds} M(t)$$

grâce à la formule précédente. Or, $\displaystyle\int_t^{t+h} A(s)ds = hA(t) + o(h)$ et donc

$$M(t+h) = [I + hA(t) + o(h)]M(t) = M(t) + hA(t)M(t) + o(h)\,.$$

□

Remarque 1.6.4 *Si $A(t) = f(t)U + g(t)V$, où f et g sont deux fonctions réelles et $UV = VU$, alors $A(t)A(s) = A(s)A(t)$.*

Définition 1.6.5 *Soient $Y_1, ..., Y_n$ n solutions de $Y'(t) = A(t)Y(t)$. Le wronskien est $W(t) = det(Y_1(t)...Y_n(t))$.*

Théorème 1.6.6 *(a)* $det\, R(t, t_0) = e^{\int_{t_0}^{t} tr(A(s))ds}$.
(b) $W(t) = e^{\int_{t_0}^{t} tr(A(s))ds} det(Y_1(t_0) ... Y_n(t_0))$.

Remarque 1.6.7 *Ce résultat nous dit que* n *solutions* $Y_i(t)$ *de* $Y'(t) = A(t)Y(t)$ *sont linéairement indépendantes si et seulement si* $Y_i(t_0), i = 1, ..., n$ *sont* n *vecteurs linéairement indépendants.*

Lemma 1.6.8 *Soit* $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. *Alors* $det\,(I + hA) = 1 + \alpha_1 h + \alpha_2 h^2 + ... + \alpha_n h^n$ *où* $\alpha_1 = trA$.

Lemma 1.6.9 *Soit* $\Delta(t) = det\, R(t, t_0)$. $\Delta(t)$ *vérifie* $\Delta'(t) = tr(A(t))\Delta(t)$.

Preuve. Par les propriétés de la résolvante et du déterminant on a $\Delta(t + h) = \det(R(t + h, t)R(t, t_0)) = det(R(t+h, t))\Delta(t)$. La formule de Taylor nous donne $R(t+h, t) = I+hA(t)+o(h)$. Le lemme précédent implique que $det(R(t + h, t)) = 1 + htr(A) + o(h)$ et donc $\Delta(t + h) = [1+htr(A)+o(h)]\Delta(t)$. Pour terminer la preuve il suffit de passer à la limite pour $h \to 0$. □

On peut maintenant prouver le théorème 1.6.6 :

Preuve. On a que $\Delta(t_0) = 1$. Grâce au lemme précédent $\Delta(t) = e^{\int_{t_0}^{t} tr(A(s))ds}$.
Si $Y_i(t), i = 1, ..., n$ sont n solutions, alors $(Y_1(t)\ Y_2(t)\ ...Y_n(t) = R(t, t_0)(Y_1(t_0)\ Y_2(t_0)\ ...Y_n(t_0))$. Par conséquent

$$det((Y_1(t)\ Y_2(t)\ ...Y_n(t)) = det(R(t, t_0))det((Y_1(t_0)\ Y_2(t_0)\ ...Y_n(t_0))) = e^{\int_{t_0}^{t} tr(A(s))ds}\ W(t_0).$$

□

2. Etude de $Y'(t) = A(t)Y(t) + B(t)$

   On connait déjà la structure des solutions de ce système. Il faut trouver une solution particulière. Soit $R(t, t_0)$ la résolvante du système $Y'(t) = A(t)Y(t)$. Si on cherche une solution particulière de la forme $Y(t) = R(t, t_0)V(t)$, il suffit que $V(t)$ soit telle que $R(t, t_0)V'(t) = B(t)$.

   Un solution particulière est alors $Y(t) = \displaystyle\int_{t_0}^{t} R(t, s)B(s)ds$.

   Théorème 1.6.10 *La solution de* $Y'(t) = A(t)Y(t) + B(t)$ *qui passe par* (t_0, V_0) *est*

$$Y(t) = R(t, t_0)V_0 + \int_{t_0}^{t} R(t, s)B(s)ds\,.$$

   Remarque 1.6.11 *Si on connait une base* $Y_1, ..., Y_n$ *de solutions de* $Y'(t) = A(t)Y(t)$, *on peut chercher une solution particulière de* $Y'(t) = A(t)Y(t) + B(t)$ *de la forme* $Y(t) = a_1(t)Y_1(t) + ... + a_n(t)Y_n(t)$. Y *est une solution si et seulement si* $a_1'(t)Y_1(t) + ... + a_n'(t)Y_n(t) = B(t)$.

1.7 Exercices

Exercice 1.7.1 *Trouver toutes les solutions du système* $Y'(t) = AY(t)$ *pour*

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} -7 & 0 & 6 \\ 0 & 5 & 0 \\ 6 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Exercice 1.7.2 *Trouver la solution du système* $Y'(t) = AY(t)$ *qui passe par* $(0, Y_0)$ *pour*

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

   $Y_0 = (2, 3)^T$

2. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

   $Y_0 = (1, -2, -1)^T$

Exercice 1.7.3 *Soit* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. *Trouver la solution générale du système* $Y'(t) = AY(t)$, *pour*

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

Exercice 1.7.4 *Trouver la solution du système* $Y'(t) = AY(t)$ *qui passe par* $(0, Y_0)$ *pour*

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$ *et* $Y_0 = (1, 2)^T$

2. $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $Y_0 = (0, 1, 0)^T$

Exercice 1.7.5 *Déterminer tous les vecteurs* Y_0 *tels que la solution du problème* $\begin{cases} Y' = AY \\ Y(0) = Y_0 \end{cases}$, *pour* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, *est une fonction périodique en* t.

Exercice 1.7.6 *Trouver la solution générale du système*

$$\begin{cases} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = 2x(t) - y(t) + e^{-t} \end{cases}$$

Exercice 1.7.7 *Résoudre*

$$Y'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 1.7.8 *Trouver la solution du système*

$$Y'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^t \cos(2t) \end{pmatrix}$$

telle que $Y(0) = (0, 1, 1)^T$.

Exercice 1.7.9 *Résoudre le système* $Y' = AY + B$ *pour*

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

   $B = (0, t, 0)^T$

2. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

   $B = (t + 1, 0, 0)^T$

Exercice 1.7.10 *Trouver la solution du système* $Y' = AY$ *pour*

1. $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 1.7.11 *Trouver une base de solutions du système $Y' = AY$ pour*

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ 2. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ 3. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Exercice 1.7.12 *Résoudre les équations suivantes :*

1. $x''(t) + x(t) = 0$
2. $x''(t) + 4x(t) = \sin(2t)$
3. $x''(t) - 4x'(t) + 4x(t) = (1 + t + t^2 + ...t^{27})e^{2t}$
4. $x''(t) - 3x'(t) + 2x(t) = (1 + t)e^{3t}$
5. $x^{(3)}(t) - x'(t) = t$
6. $x^{(3)}(t) - 3x'(t) + 2x(t) = e^{-2t}t$

Exercice 1.7.13 *On considère*

$$\begin{cases} (1 + t^2)x' - tx - y = 2t^2 - 1 \\ (1 + t^2)y' + x - ty = 3t \end{cases}$$

1. *Montrer que $(1, -t)^T, (t, 1)^T$ sont deux solutions linéairement indépendantes de*

$$\begin{cases} (1 + t^2)x' - tx - y = 0 \\ (1 + t^2)y' + x - ty = 0 \end{cases}$$

2. *Chercher une solution particulière*
3. *En déduire la solution générale.*

Exercice 1.7.14 *Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice ayant n vecteurs propres v_i linéairement indépendants, avec valeurs propres λ_i distinctes. On considère le système $x' = Ax + v_1e^{\lambda_1 t}$.*

1. *Montrer que $\psi(t) = ae^{\lambda_1 t}, a \in \mathbb{R}^n$, n'est pas une solution particulière.*
2. *Chercher une solution particulière de la forme $\psi(t) = (a + bt)e^{\lambda_1 t}$, $a, b \in \mathbb{R}^n$.*

1.8 Eléments de correction

Exercice 1.7.1

1. Les valeurs propres de A sont $1, 3, -2$. A est donc digonalisable. Les vecteurs propres sont $(-1, 4, 1)^T$, $(1, 2, 1)^T$, $(-1, 1, 1)^T$ respectivement. La solution générale est donc une combinaison linéaire de $e^t(-1, 4, 1)^T$, $e^{3t}(1, 2, 1)^T$ et de $e^{-2t}(-1, 1, 1)^T$.
2. Les valeurs propres de A sont 5, avec multiplicité algébrique 2 et -10. Pour savoir si A est digonalisable, il faut aller chercher les vecteurs propres. On trouve respectivement $(1, 0, 2)^T$, $(1, 1, 2)^T$, $(-2, 0, 1)^T$, et donc A est diagonalisable. La solution générale est donc une combinaison linéaire de $e^{t5}(1, 0, 2)^T$, $e^{5t}(1, 1, 2)^T$ et de $e^{-10t}(-2, 0, 1)^T$.

Exercice 1.7.2

1. Les valeurs propres de A sont $-1, 3$. A est donc digonalisable. Les vecteurs propres sont $(1, -2)^T$ et $(1, 2)^T$ respectivement. La solution générale est donc $Y(t) = \alpha_1 e^{3t}(1, 2)^T + \alpha_2 e^{-t}(1, -2)^T$. On impose maintenant la condition initiale : on trouve $\alpha_1 = \frac{7}{4}$ et $\alpha_2 = \frac{1}{4}$.
2. Les valeurs propres de A sont 2, avec multiplicité algébrique 2 et 1. Pour savoir si A est digonalisable, il faut aller chercher les vecteurs propres. On trouve respectivement $(1, 0, 1)^T$, $(0, 1, 1)^T$, $(1, 1, 3)^T$, et donc A est diagonalisable. La solution générale est donc $Y(t) = \alpha_1 e^t(1, 1, 3)^T + \alpha_2 e^{2t}(1, 0, 1)^T + \alpha_3 e^{2t}(0, 1, 1)^T$. On impose maintenant la condition initiale : on trouve $\alpha_1 = 1$ et $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = -2$.

Exercice 1.7.3

1. Les valeurs propres de A sont $1, 1 + i, 1 - i$. A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Les vecteurs popres sont $(1, 0, 0)^T$, $(0, i, 1)^T$, $(0, -i, 1)^T$. La solution générale réelle est donc une combinason linéaire de $e^t(1, 0, 0)^T$, $\Re(e^{(1+i)t}(0, i, 1)^T)$, $\Im(e^{(1+i)t}(0, i, 1)^T)$.
2. Les valeurs propres de A sont $-2 + i, -2 - i$. A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Les vecteurs popres sont respectivement $(1 - i, 1)^T$, $(1 + i, 1)^T$. La solution générale réelle est donc une combinaison linéaire de $\Re(e^{(-2+i)t}(1 - i, 1)^T)$ et $\Im(e^{(-2+i)t}(1 - i, 1)^T)$.

Exercice 1.7.4

1. Les valeurs propres de A sont $-1 + i, -1 - i$. A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Les vecteurs popres sont $(1, 2 - i)^T$, $(1, 2 + i)^T$. La solution générale réelle est donc $Y(t) = \alpha_1 \Re(e^{(-1+i)t}(1, 2 - i)^T) + \alpha_2 \Im(e^{(-1+i)t}(1, 2 - i)^T) = \alpha_1 e^t(\cos t, 2\cos t + \sin t)^T + \alpha_2 e^t(\sin t, 2\sin t - \cos t)^T$. Si on impose la condition initiale on a $\alpha_1 = 1$ et $\alpha_2 = 0$.
2. Les valeurs propres de A sont -2, $-1 + \sqrt{2}i$, $-1 - \sqrt{2}i$. A est digonalisable sur $\mathbb{C}$. Les vecteurs popres sont respectivement $(2, -2, 1)^T$, $(\sqrt{2}i, 1, \sqrt{2}i - 1)^T$, $(-\sqrt{2}i, 1, -\sqrt{2}i - 1)^T$. La solution générale réelle est donc $Y(t) = \alpha_1 e^{-2t}(2, -2, 1)^T + \alpha_2 \Re(e^{(-1+\sqrt{2}i)t}(\sqrt{2}i, 1, \sqrt{2}i - 1)^T) + \alpha_3 \Im(e^{(-1+\sqrt{2}i)t}(\sqrt{2}i, 1, \sqrt{2}i - 1)^T))$. Il faut maintenant imposer la condition initiale.

Exercice 1.7.5
Les valeurs propres de A sont $1, i, -i$. Les vecteurs propres sont respectivement $(1, 1, 0)^T$, $(1+i, 0, 1)^T$, $(1-i, 0, 1)^T$. Or, $\Re(e^{it}(1 + i, 0, 1)^T) = (\cos t - \sin t, 0, \cos t)^T$ et $\Im(e^{it}(1 + i, 0, 1)^T) = (\cos t + \sin t, 0, \sin t)^T$. La solution générale est donc $Y(t) = \alpha_1(e^t, e^t, 0)^T + \alpha_2(\cos t - \sin t, 0, \cos t)^T + \alpha_3(\cos t + \sin t, 0, \sin t)^T$. Si on impose que $Y(0) = (y_1^0, y_2^0, y_3^0)^T$ on a $Y(t) = y_2^0(e^t, e^t, 0)^T + y_3^0(\cos t - \sin t, 0, \cos t)^T + (y_1^0 - y_3^0 - y_2^0)(\cos t + \sin t, 0, \sin t)^T$. Cette fonction est périodique si $y_2^0 = 0$.

Exercice 1.7.6
On va trouver la solution générale du système homogène associé et après on trouvera une solution particulière avec la méthoe de la variation de la constante.

Les valeurs propres de $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ sont $-2, 1$. A est donc diagonalisable. Les vecteurs propres sont $(1, -2)^T$ et $(1, 1)^T$ respectivement. Par conséquent si

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

on a

$$Y(t) = e^{t(PDP^{-1})}V = Pe^{tD}P^{-1}V = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} V, \qquad V \in \mathbb{R}^2$$

Exercice 1.7.7
Les valeurs propres de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ sont $3, -1$; les vecteurs propres sont respectivement $(1,2)^T, (1,-2)^T$.
La solution générale de $Y' = AY$ est donc $\alpha_1 e^{3t}(1,2)^t + \alpha_2 e^{-t}(1,-2)^t$. $X(t) = \begin{pmatrix} e^{3t} & e^{-t} \\ 2e^{3t} & -2e^{-t} \end{pmatrix}$ est une matrice fondamentale de solutions. Si on cherche une solution particulière de la forme $Y(t) = \alpha_1(t)e^{3t}(1,2)^t + \alpha_2(t)e^{-t}(1,-2)^t$ on a

$$\begin{pmatrix} \alpha_1' \\ \alpha_2' \end{pmatrix} = X^{-1}B(t)\,, \qquad B(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}$$

ce qui nous donne $\alpha_1' = \frac{1}{2}e^{-2t}$, $\alpha_2' = \frac{1}{2}e^{2t}$

Exercice 1.7.8
On va trouver la solution générale du système homogène associé et après on trouvera une solution particulière.

Les valeurs propres de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ sont $1, 1+2i, 1-2i$. Les vecteurs propres sont $(2,-3,2)^T$ et $(0,i,1)^T, (0,-i,1)^T$ respectivement.

1. Si
$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+2i & 0 \\ 0 & 0 & 1-2i \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & i & -i \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
on a
$$Y(t) = e^{t(PDP^{-1})}V = Pe^{tD}P^{-1}V = P\begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{(1+2i)t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{(1-2i)t} \end{pmatrix}P^{-1}V\,, \qquad V \in \mathbb{R}^3$$
Il faut maintenant utiliser la formule de la variation de la constante pour trouver une solution particulière.
2. On a trois solutions linéairement indépendantes : $e^t(2,-3,2)^T$, $\Re(e^{(1+2i)t}(0,i,1)^T)$, $\Im(e^{(1+2i)t}(0,i,1)^T)$. On a donc une matrice fondamentale de solutions. Pour trouver une solution particulière, on peut utiliser la méthode de la variation de la constante.

Exercice 1.7.9

1. A n'est pas diagonalisable. On va calculer l'exponentielle de la matrice A. A est triangulaire supérieure à blocs. Le premier bloc est $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I + N$ où $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, matrice nilpotente. Par conséquent $e^{(t-s)C} = e^{t-s}[I + (t-s)N]$ et donc
$$e^{(t-s)A} = \begin{pmatrix} 1 & t-s & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2(t-s)} \end{pmatrix}$$
Il faut maintenant utiliser la méthode de la variation de la constante pour trouver une solution particulière. Une solution particulière est
$$\int_0^t e^{(t-s)A}B(s)ds = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{e^{2t}}{5}[e^{-t}(2\sin(2t) - \cos(2t)) + 1] \end{pmatrix}$$
2. A n'est pas diagonalisable. On va calculer l'exponentielle de la matrice A. $A = 2I + N$ où $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, matrice nilpotente. Par conséquent $e^{(t-s)A} = e^{2(t-s)}\left[I + (t-s)N + \frac{1}{2}(t-s)^2N^2\right]$.
Il faut maintenant utiliser la méthode de la variation de la constante.

Exercice 1.7.10

1. Les valeurs propres de A sont $-1,-1,-2$. Le système $AX=-X$ nous ne donne qu'un vecteur propre : $v_1=(1,-1,1)^T$. Pour chercher un autre vecteur il suffit de résoudre $(A+I)v_2=v_1$ ce qui nous donne $v_2=(1,0,0)^T$. $AX=-2X$ nous donne $(-1,1,0)^T$. Par conséquent $A=PJP^{-1}$ où
$$P=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&0&1\\1&0&0\end{pmatrix},\quad J=\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&-1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$$
2. Les valeurs propres de A sont $2,2,2,2,-1,5,5$. $AX=2X$ nous donne $v_1=(1,0,0,0,0,0,0)^T$ et $w_1=(0,0,0,1,0,-3,0)^T$. on doit chercher deux autres vecteurs. La chaine de Jordan générée par v_1 est $v_1,v_2=(1,0,1,0,0,0,0)^T$. La chaine de Jordan générée par w_1 est $w_1,w_2=(0,0,0,1,0,1,-3)^T$. $AX=5X$ nous donne $z_1=(0,0,0,1,0,0,0)^T$. La chaine de Jordan générée par z_1 est $z_1,z_2=(0,0,0,0,1,0,0)^T$.
$AX=-X$ nous donne $v=(0,1,0,0,0,0,0)^T$. Par conséquent $A=PJP^{-1}$ où
$$P=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&1\\0&1&0&0&0&0&0\\0&0&1&1&1&0&0\\0&0&0&0&0&1&0\\0&0&-3&1&0&0&0\\0&0&0&-3&0&0&0\end{pmatrix},\quad J=\begin{pmatrix}2&1&0&0&0&0&0\\0&2&0&0&0&0&0\\0&0&2&1&0&0&0\\0&0&0&2&0&0&0\\0&0&0&0&5&1&0\\0&0&0&0&0&5&0\\0&0&0&0&0&0&-1\end{pmatrix}$$
3. Les valeurs propres de A sont $1,1,1,1$. Comme vecteurs propres on trouve $v_1=(1,0,-2,0)^T$ $w_1=(0,2,-3,0)^T$ et $y_1=(0,0,0,1)^T$. Il faut chercher un quatrième vecteur. L'équation $(A-I)v_2=v_1$ ne nous donne rien. L'équation $(A-I)y_2=y_1$ nous donne $(0,0,1,0)$. Par conséquent $A=PJP^{-1}$ où
$$P=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&2&0&0\\-2&-3&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix},\quad J=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$
4. Les valeurs propres de A sont $2,2,3$. Un vecteur propre relatif à 2 est $v_1=(4,3,4)^T$. On peut trouver un autre vecteur si on rèsoud $(A-2I)X=v_1$. On trouve $(4,9,5)^T$. Un vecteur propre relatif à 3 est $(1,1,1)^T$. Par conséquent $A=PJP^{-1}$, où
$$P=\begin{pmatrix}4&4&1\\3&9&1\\4&5&1\end{pmatrix},\quad J=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$$

Exercice 1.7.11

1. Les valeurs propres de A sont $2,2,2$. On a un seul vecteur propre : $v_1=(-1,1,1)^T$.
   (a) L'équation $(A-2I)v_2=v_1$ nous donne $v_2=(1,0,0)^T$. L'équation $(A-2I)v_3=v_2$ nous donne $v_3=(1,1,0)^T$. Par conséquent $A=PJP^{-1}$ où
   $$P=\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&0&1\\1&0&0\end{pmatrix},\quad J=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}$$
   Les colonnes de e^{tA} sont une base de solutions, car e^{tA} est une matrice fondamentale de solutions
   (b) On cherche un vecteur w tel que $(A-2I)^2w=0$ et $(A-2I)w\neq 0$. Cela nous donne $(0,1,1)^T$. On cherche un vecteur z tel que $(A-2I)^2z\neq 0$ et $(A-2I)^3z=0$. Cela nous donne $(0,0,1)^T$.
2. Les valeurs propres de A sont $-1,-1,-2$. L'équation $AX=-2X$ nous donne $x=(0,1,1)^T$. $AX=-X$ nous donne seulement $v_1=(1,1,0)^T$. Il faut donc chercher un autre vecteur.
   (a) L'équation $(A+I)v_2=v_1$ nous donne $v_2=(1,1,1)^T$. Par conséquent $A=PJP^{-1}$ où
   $$P=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&1\\0&1&1\end{pmatrix},\quad J=\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&-1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$$
   Les colonnes de e^{tA} sont une base de solutions, car e^{tA} est une matrice fondamentale de solutions

   (b) On cherche un vecteur w tel que $(A+I)^2w = 0$ et $(A+I)w \neq 0$. Cela nous donne $(1,1,1)^T$.

3. Les valeurs propres de A sont $1, 1, 2$. L'équation $AX = 2X$ nous donne $x = (-1,1,1)^T$. $AX = -X$ nous donne seulement $v_1 = (1,1,0)^T$. Il faut donc chercher un autre vecteur.
   (a) L'équation $(A-I)v_2 = v_1$ nous donne $v_2 = (2,1,0)^T$. Par conséquent $A = PJP^{-1}$ où

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Les colonnes de e^{tA} sont une base de solutions, car e^{tA} est une matrice fondamentale de solutions

   (b) On cherche un vecteur w tel que $(A-I)^2w = 0$ et $(A+I)w \neq 0$. Cela nous donne $(0,1,0)^T$.

Exercice 1.7.12

1. L'équation est équivalente à $Y' = AY$ où $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $Y(t) = (x(t), x'(t))^T$. Les valeurs propres de A sont $i, -i$. Les vecteurs propres sont respectivement $(1,i)^T$, $(1,-i)^T$. La solution générale Y est alors une combinaison linéaire de $\Re(e^{it}(1,i)^T)$ et $\Im(e^{it}(1,i)^T)$, c'est-à-dire de $(\cos t, -\sin t)$ et $(\sin t, \cos t)$. On a donc que $x(t) = a\cos t + b\sin t$.

   On obtient le même résultat sin on utilise la théorie des équations d'ordre 2.
2. Les racines du polynôme carachteristique sont $\pm 2i$. Par conséquent $\cos(2t)$, $\sin(2t)$ est une base de solutions de l'équation homogène.

   Comment chercher une solution particulière ? On étudie $y'' + 4y = e^{2it}$. On cherche une solution particulière de la forme A_0te^{2it}. La partie imaginaire de telle solution sera une solution particulière de notre équation.
3. Une base de solutions de l'équation homogène est e^{2t}, te^{2t}. Pour chercher une solution particulière on pose $y = e^{2t}v$. Alors $v'' = 1 + t + ...t^{27}$.
4. Une base de solutions de l'équation homogène est e^t, e^{2t}. On peut chercher une solution particulière de la forme $(A_0 + A_1t)e^{3t}$.
5. Les racines du polynôme caractéristique sont $0, 1, -1$. Par conséquent 1, e^t et e^{-t} sont une base de solutions de l'équation homogène. On peut chercher une solution particulière sous la forme d'un polynôme : on trouve $-t^2/2$.
6. Une base de solutions de l'équation homogène est e^t, te^t, e^{-2t}. Pour chercher une solution particulière on peut utiliser l'astuce du point 3 : on pose $x = e^{-2t}v$ est on résoud l'équation satisfaite par $v(t)$. Sinon on peut utiliser la méthode de la variation de la constante : il faut chercher $\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t)$ tels que

$$\alpha_1'(e^t, e^t, e^t)^T + \alpha_2'(te^t, (t+1)e^t, e^t + (t+1)e^t)^T + \alpha_3'(e^{-2t}, -2e^{-2t}, 4e^{-2t})^T = (0, 0, t^2e^{-2t})$$

Exercice 1.7.13

1. Ces deux solutions sont linéairement indépendantes : il suffit de calculer le wronskien.
2. On peut chercher une solution particulière de la forme $Y(t) = a_1(t)Y_1 + a_2(t)Y_2$. On doit avoir que $a_1'(1,-t)^T + a_2'(t,1)^T = (2t^2-1, 3t)^T$ ce qui nous donne $a_2' = 2t$ et $a_1' = -1$.
3. La solution générale est donnée par la somme des solutions trouvées précédemment.

Exercice 1.7.14

On peut écrire $a = a_1v_1 + ... + a_nv_n$. Alors $\psi(t) = (a_1v_1 + ... + a_nv_n)e^{\lambda_1 t}$ est une solution de $x' = Ax + v_1e^{\lambda_1 t}$ si et seulement si

$$(a_1v_1 + ... + a_nv_n)\lambda_1 e^{\lambda_1 t} = A(a_1v_1 + ... + a_nv_n)e^{\lambda_1 t} + v_1e^{\lambda_1 t} = [a_1\lambda_1v_1 + ... + a_n\lambda_nv_n]e^{\lambda_1 t} + v_1e^{\lambda_1 t}$$

ce qui est absurde.

$\psi(t) = (a+bt)e^{\lambda_1 t}$ est une solution si et seulement si $b + \lambda_1 a + \lambda_1 bt = Aa + Abt + v_1$. Il suffit alors de choisir $a = b = v_1$.

Chapitre

Théorèmes généraux d'existence et unicité

2.1 Introduction

Dans ce chapitre on va traiter les systèmes $Y'(t) = f(t, Y)$ sous les hypothèses suivantes :

1. $f : U \to \mathbb{R}^n$, où $U = I \times \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ est ouvert.
2. f est continue
3. $Y : J \subseteq I \to \mathbb{R}^n$ est l'inconnue.

Définition 2.1.1 *Soit*

$$\left\{ \begin{array}{l} Y' = f(t, Y) \\ Y(t_0) = Y_0 \end{array} \right. \tag{2.1}$$

1. *Une solution locale est la donnée d'un couple (J, Y) où J est un intervalle contenant t_0, $J \subseteq I$; pour tout $t \in J$ on a que $Y \in C^1(J)$, $Y(t_0) = Y_0$ et $Y'(t) = f(t, Y(t))$.*
2. *soient (J_1, Y_1) et (J_2, Y_2) deux solutions locales. (J_2, Y_2) est un prolongement de (J_1, Y_2) si $J_1 \subseteq J_2$ et $Y_2\lfloor_{J_1} = Y_1$. Le prolongement est strict si $J_1 \neq J_2$.*
3. *une solution locale est maximale si elle n'admet pas de prolongement strict.*
4. *(J, Y) est une solution globale si elle est une solution locale et si $J = I$.*

Exemple 2.1.2 *Le problème*

$$\left\{ \begin{array}{l} Y' = -Y^2 \\ Y(0) = 1 \end{array} \right.$$

défini sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ admet une solution maximale $Y(t) = \frac{1}{t+1}$ sur $(-1, +\infty)$, qui n'est pas globale. Il n'y a pas de solutions globales.

Exemple 2.1.3 *Le problème*

$$\left\{ \begin{array}{l} Y' = -2tY^2 \\ Y(0) = 1 \end{array} \right.$$

défini sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ admet une solution globale $Y(t) = \frac{1}{t^2+1}$ sur $\mathbb{R}$.

Exemple 2.1.4 *Le problème*

$$\left\{ \begin{array}{l} Y' = 2\sqrt{|Y|}(1 + Y) \\ Y(0) = 0 \end{array} \right.$$

défini sur $[0, +\infty) \times \mathbb{R}$ admet plusieurs soluions maximales : $Y(t) \equiv 0$,

$$Y_a(t) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & t \in [0, a] \\ \tan^2(t - a) & t \in \left[a, a + \frac{\pi}{2}\right) \end{array} \right.$$

Théorème 2.1.5 *Soit $\xi : J \to \mathbb{K}$ une solution locale de*

$$\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0\,. \end{cases}$$

Alors ξ se prolonge à une solution maximale, pas nécessairement unique.

Preuve.

1. On définit $\mathcal{E}_0$ comme l'ensemble des solutions locales qui prolongent $\xi : J \to \mathbb{K}^n$ et $\tau_0 := \sup\{t :$ la solution locale $y : [t_0,t] \to \mathbb{K}^n \in \mathcal{E}_0\}$. On peut alors trouver une solution locale $y_{(1)} : [t_0,t_1] \to \mathbb{K}^n$ telle que $t_1 > \tau_0 - 1$.
2. On définit $\mathcal{E}_1$ comme l'ensemble des solutions locales qui prolongent $y_{(1)} : [t_0,t_1] \to \mathbb{K}^n$ et $\tau_1 := \sup\{t :$ la solution locale $y : [t_0,t] \to \mathbb{K}^n \in \mathcal{E}_1\}$. On peut alors trouver une solution locale $y_{(2)} : [t_0,t_2] \to \mathbb{K}^n$ telle que $t_2 > \tau_1 - 1$.
3. En général on peut construire une suite de solutions locales $y_{(i)} : [t_0,t_i] \to \mathbb{K}^n$ de la manière suivante : $\mathcal{E}_i$ est l'ensemble des solutions qui prolongent $y_{(i)} : [t_0,t_i] \to \mathbb{K}^n$; $\tau_i := \sup\{t :$ la solution locale $y : [t_0,t] \to \mathbb{K}^n \in \mathcal{E}_i\}$ et on choisit $y_{(i+1)} : [t_0,t_{i+1}] \to \mathbb{K}^n$ appartenant à $\mathcal{E}_i$ de sorte que $t_{i+1} > \tau_i - \frac{1}{i+1}$.
4. Soit $\tau = \lim\limits_{i\to+\infty} \tau_i$. Alors la fonction y égale à $y_{(i)}(t)$, pour $t \in [t_0,t_i]$ appartient à $C_1([t_0,\tau))$ et est une solution qui prolonge $\xi : J \to \mathbb{K}^n$.

   Or, il y a deux possibilités : $y : [t_0,\tau) \to \mathbb{K}^n$ est une solution maximale ou il existe un prolongement $\tilde{y} : [t_0,t] \to \mathbb{K}^n$ de y. Dans ce deuxième cas, pour tout i, $\tilde{y} : [t_0,t] \to \mathbb{K}^n$ appartient à $\mathcal{E}_i$ et donc $\tau \le t \le \tau_i$: ceci implique que $\tau = t$ par le théorème des gendarmes. Par conséquent $\tilde{y} : [t_0,t] \to \mathbb{K}^n$ est une solution maximale.

□

2.2 Théorème d'existence

Soit $C_0 = [t_0 - T_0, t_0 + T_0] \times \overline{B(Y_0,r_0)}$ contenu dans U. Soit $M = \max\limits_{(t,Y)\in C_0} ||f(t,Y)||$.

Théorème 2.2.1 *Soit $T = \min\{T_0, \frac{r_0}{M}\}$. Alors il existe $Y : [t_0 - T, t_0 + T] \to \overline{B(Y_0,r_0)}$ solution de (2.1).*

Remarque 2.2.2 *La seule hypothèse sur f est la continuité.*

Remarque 2.2.3 *Le système (2.1) peut admettre plus qu'une solution. Il suffit de penser à l'exemple 2.1.4.*

2.3 Théorèmes d'unicité

Définition 2.3.1 *On dira que $f : U \to \mathbb{R}^n$ est localement lipschitzienne en Y si pour tout $(t_0,Y_0) \in U$ il existe un voisinage $[t_0 - \eta, t_0 + \eta]$ de t_0 et un voisinage $\overline{B(Y_0,r_0)}$ de Y_0 tels que f est lipschitz en Y sur $[t_0 - \eta, t_0 + \eta] \times \overline{B(Y_0,r_0)}$. Cela veut dire qu'il existe une constante $k = k(t_0,Y_0)$ tel que*

$$||f(t,Y_1) - f(t,Y_2)|| \le k||Y_1 - Y_2||\,, \quad \forall (t,Y_1),(t,Y_2) \in [t_0-\eta,t_0+\eta] \times \overline{B(Y_0,r_0)}.$$

Remarque 2.3.2 *Si $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ sont continues sur U, alors f est localement lipschitz en Y sur U.*

Exemple 2.3.3

1. *La fonction $f(Y) = Y^2$ est localement lipschitz sur $\mathbb{R}$; elle n'est pas lipschitz.*
2. *La fonction $f(Y) = \sqrt{|Y|}$ n'est pas localement lipschitz sur $\mathbb{R}$. En fait il faudrait trouver un voisinage de 0 et une constante $k > 0$ tels que $|\sqrt{|Y|}| \le k|Y|$ pour Y assez petit, ce qui est absurde.*

On fixe $(t_0,Y_0) \in U$. Soit $C_0 = [t_0 - T_0, t_0 + T_0] \times \overline{B(Y_0,r_0)}$ contenu dans U. Soit $M = \max\limits_{(t,Y)\in C_0} ||f(t,Y)||$.

Supposons que $[t_0 - \eta, t_0 + \eta] \times \overline{B(Y_0,r_0)}$ soit un voisinage de (t_0,Y_0) où la fonction f est lipschitz. Quitte à considérer η plus petit, on suppose que $\eta \le \min\{T_0, \frac{r_0}{M}\}$.

Théorème 2.3.4 *Soit $f : U \to \mathbb{R}^n$ localement lipschitzienne en Y. Soit η comme ci-dessus. Alors (2.1) admet une seule solution $Y : [t_0 - \eta, t_0 + \eta] \to \overline{B(Y_0,r_0)}$*

Corollaire 2.3.5 *Soit $f : U \to \mathbb{R}^n$ localement lipschitzienne en y. Pour tout (t_0, y_0) il passe une seule solution maximale de $y' = f(t, y)$.*

Théorème 2.3.6 (Lemme de Gronwall) *Soient u, α deux fonction continues à valeurs réelles sur (a, b). Soit β une fonction positive et continue sur $[a, b]$. On suppose que*

$$u(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \beta(s)u(s)ds\,, \quad \forall\, t \in (a, b)$$

Si α est croissant, alors

$$u(t) \leq \alpha(t)e^{\int_a^t \beta(l)dl}\,, \quad \forall\, t \in (a, b)\,.$$

2.4 Théorèmes sur les solutions globales

Théorème 2.4.1 *Soit $y\, :]a, b[\to \mathbb{R}^n$ une solution de $y' = f(t, y)$. Elle est maximale si et seulement si $(t, y(t))$ s'approche du bord de U ou tend vers l'infini quand $t \to a^+$ ou $t \to b^-$.*

Théorème 2.4.2 *Soit $f : I \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ continue. Supposons qu'il existe une fonction $k : I \to \mathbb{R}^+$ continue telle que pour tout $t \in I$ l'application $y \to f(t, y)$ est lipschitz de rapport $k(t)$. Alors toute solution maximale du problème $y' = f(t, y)$ est globale.*

Théorème 2.4.3 *Soit $f : I \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ continue. Soit $<;>$ un produit scalaire dans $\mathbb{R}^N$. Soit $g \in L^1_{loc}(I)$ tel que $sgn(t - t_0) < f(t, y(t)); y > \leq g(t)(1 + \|y\|^2)$ pour tout $t, y \in I \times \mathbb{R}^N$. Alors le problème $y' = f(t, y)$ admet une solution.*

En particulier

Corollaire 2.4.4 *Soit $f : (a, b) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continue. Supposons qu'il existe $g \in L^1_{loc}((a, b))$ tel que $||f(t, y)|| \leq g(t)(1 + ||y||)$. Alors toute solution de*

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

est globale.

Théorème 2.4.5 *Soit $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue telle que*

$$||g(t, x)|| \leq \alpha(t) + \beta(t)||x||$$

pour α, β positives et continues. Alors les solutions du problème

$$\begin{cases} y' = g(t, y)\,, \quad t \in \mathbb{R} \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

sont globales.

Théorème 2.4.6 *Soit $f : (a, b) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continue et bornée. Alors toute solution de*

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

est globale.

2.5 Orbites

On considère

$$x' = f(x)\,. \tag{2.2}$$

Un point d'équilibre est un point $x_0 \in \mathbb{R}^N$ tel que $f(x_0) = 0$. Evidemment un point d'équilibre est une orbite (si une solution part de x_0 elle y reste pour toujours).

Théorème 2.5.1 *Soit $f \in C^1$.*

1. *A travers chaque point de $\mathbb{R}^N$ il passe une et une seule orbite du système (2.2).*
2. *Toute orbite du système (2.2) est simple.*
3. *L'orbite d'une solution est une courbe fermée qui ne contient aucun point d'équilibre si et seulement si la solution est périodique.*

Remarque 2.5.2 *Soit le système $x'(t) = f(x,y)$, $y'(t) = g(x,y)$. Comment trouver les orbites ? Si $x'(t_1) \neq 0$, on peut résoudre l'équation $x = x(t)$ dans un voisinage du point $x(t_1)$. Alors pour t proche de t_1 l'orbite est $y = y(t(x))$ et elle vérifie $y'(x) = \frac{g(x,y)}{f(x,y)}$.*

Attention ! Une solution de $y'(x) = \frac{g(x,y)}{f(x,y)}$ est une orbite seulement si x' et y' ne sont pas nuls au même temps. Si une solution de $y'(x) = \frac{g(x,y)}{f(x,y)}$ passe à travers un point d'équilibre, elle est l'union de plusieurs orbites.

Définition 2.5.3 *Une intégrale première du système (2.2) est une fonction V telle que $\frac{dV(x(t))}{dt} = 0$.*

Les orbites de (2.2) sont sur les ensembles de niveau de V.

Exemple 2.5.4 *Soit $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2. Le système*

$$\begin{cases} x_1' = -\frac{\partial H}{\partial x_2} \\ x_2' = \frac{\partial H}{\partial x_1} \end{cases}$$

admet H comme intégrale première.

2.6 Exercices

Exercice 2.6.1 *1. Donner les solutions maximales du problème de Cauchy de condition initiale* $y(0) = 0$ *associé à* $y' = \sqrt{y}$ *si* $y \geq 0$ *et* $y' = -\sqrt{-y}$ *si* $y \leq 0$.

2. *Donner les solutions maximales du problème de Cauchy de condition initiale* $y(0) = 0$ *associé à* $y' = y^3$.
3. *Donner les solutions maximales du problème de Cauchy de condition initiale* $y(0) = 1$ *associé à* $y' = \frac{1}{y}$.

Exercice 2.6.2 *On considère le système* $y' = f(t, y)$ *où* $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ *est une fonction lipschitz (de constante L) par rapport à la variable y et continue par rapport à la variable* (t, y). *Soient* y_1 *la solution correspondante à la condition initiale* $y(t_0) = \tilde{y}_1$ *et* y_1 *la solution correspondante à la condition initiale* $y(t_0) = \tilde{y}_2$. *Montrer que* $|y_1(t) - y_2(t)| \leq |\tilde{y}_1 - \tilde{y}_2| e^{L|t-t_0|}$.

Exercice 2.6.3 *Soit* $f : (a, b) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *continue et telle que pour tout compact K de* (a, b) *il existe* $F : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *continue telle que* $|f(t, x)| \leq F(|x|)$ *et* $\displaystyle\int^{+\infty} \frac{ds}{F(s)} = +\infty$. *Alors toute solution de*

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

est globale.

Exercice 2.6.4 *Soit*

$$\begin{cases} x'(t) = -x(t) + \alpha(t)x^2(t)\,, \quad t \geq 0 \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

avec $\alpha \in C^1([0, +\infty[)$ *telle que* $|\alpha(t)| \leq 1$ *pour tout* $t \geq 0$ *et* $|x_0| < 1$. *On se propose de montrer que la solution de ce problème est globale.*

Supposons que la solution maximale soit définie sur $[0, T^*[$, *avec* $T^* < +\infty$. *On pose* $|x_0| = 1 - \delta$. *Soit* $\delta_0 \in]0, \delta[$. *Soit* $A = \{T \in [0, T^*[: |x(t)| \leq 1, t \in [0, T]\}$.

1. *Montrer que* $x(t) = e^{-t}x_0 + \displaystyle\int_0^t e^{-(t-s)}\alpha(s)x^2(s)ds$ *pour* $t \in [0, T^*[$.
2. *Montrer que A est un intervalle de type* $[0, \alpha[$.
3. *Supposons que* $\alpha < T^*$. *Montrer que pour* $T \in A$ *on a* $|x(t)| \leq |x_0| e^{-\delta_0 t}$, $t \in [0, T]$.
4. *Montrer que* $|x(t)| \leq 1 - \delta$ *pour* $t \in [0, \alpha]$ *et en déduire qu'il existe* $\varepsilon > 0$ *tel que* $\alpha + \varepsilon \in A$.
5. *Conclure que* $T^* = +\infty$.

Exercice 2.6.5 *Montrer que toute solution maximale de*

$$\begin{cases} y' = t\sqrt{t^2 + y^2} \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

est globale.

Exercice 2.6.6 *Soit* $F : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ *de classe* C^2. *On considère le problème* $x'(t) = -\nabla F(x(t))$. *On suppose que* $F(x) \to +\infty$ *pour* $|x| \to +\infty$. *Montrer qu'il existe une solution maximale unique sur* $[T_*, +\infty)$. *De plus* $F(x(t))$ *est décroissante.*

Exercice 2.6.7 *Montrer que la solution du système* $y' = t^2 + e^{-y^2}$, $y(0) = 0$ *existe pour* $t \in [0, 0.5]$ *et que dans cette intervalle* $|y| \leq 1$.

Exercice 2.6.8 *Montrer que la solution du système* $y' = y^2 + e^{-t^2}$, $y(0) = 0$ *existe pour* $t \in [0, 0.5]$.

Exercice 2.6.9 *Soient f et g deux fonctions continues de* $[a, b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *telles que* $f(t, x) < g(t, x) \forall\ (t, x) \in [a, b] \times \mathbb{R}$. *Soient x et y deux fonctions* $C^1(a, b)$ *solutions des équations* $x' = f(t, x)$ *et* $y' = f(t, y)$. *Supposons qu'il existe* $t_0 \in [a, b]$ *tel que* $x(t_0) = y(t_0)$.

1. *Montrer qu'il existe* $\delta_0 > 0$ *tel que* $x(t) < y(t)$ *pour tout* $t \in (t_0, t_0 + \delta]$.

2. *En déduire que* $x(t) \leq y(t)$ *pour tout* $t \in [t_0, b]$.

Suggestion : considérer $A = \{c \in [t_0, b] : x(t) \leq y(t) \forall t \in [t_0, c]\}$ *et* $c^* = \sup A$.

Exercice 2.6.10 *Une méthode pour chercher une intégrale première pour* $y' = f(x, y)$ *est d'écrire* $f(x, y) = -\frac{\rho(x,y)M(x,y)}{\rho(x,y)N(x,y)}$ *et chercher* V *tel que* $\frac{\partial V}{\partial x} = \rho M$ *et* $\frac{\partial V}{\partial y} = \rho N$.

Utiliser cette méthode pour chercher une intégrale première pour

1. $y' = -\frac{e^y}{xe^y + 2y}$
2. $y - xy^2 + xy' = 0$

Exercice 2.6.11 *Les systèmes autonomes* $y' = f(y)$ *ont la propriété que pour chaque point de* $\mathbb{R}^n$ *il passe une et une seule orbite. Montrer, à travers un exemple, que cette propriété n'est pas valable pour des systèmes non autonomes.*

Exercice 2.6.12

1. *Montrer que* $x(t) = e^{-t} \cos t$, $y(t) = e^{-t} \sin t$ *est une solution du système* $x' = -x - y$, $y' = x - y$.
2. *Quelle est l'orbite de cette solution ?*

Exercice 2.6.13 *Montrer que toute solution du système*

$$\begin{cases} x' = y(e^x - 1) \\ y' = x + e^y \end{cases}$$

qui part depuis le demiplan $x > 0$ *y reste pour tout* t.

Exercice 2.6.14 *Montrer que toute solution du système*

$$\begin{cases} x' = 1 + x^2 + y^2 \\ y' = xy + \tan(y) \end{cases}$$

qui part depuis le demiplan $y > 0$ *y reste pour tout* t.

Exercice 2.6.15 *Quelles sont les orbites des systèmes suivants ?*

1. $x' = y(1 + x^2 + y^2)$, $y' = -2x(1 + x^2 + y^2)$
2. $x' = y^2$, $y' = x^2$
3. $x' = y(1 - x^2 - y^2), y' = -x(1 - x^2 - y^2)$

Exercice 2.6.16 *Montrer que toute solution des équations suivantes est périodique.*

1. $z'' + z^3 = 0$
2. $z'' + z^5 + z = 0$
3. $z'' + \frac{z}{1+z^2} = 0$

2.7 Eléments de correction

Exercice 2.6.1

1. $y' = \sqrt{y}$ si $y \geq 0$ et $y' = -\sqrt{-y}$ si $y \leq 0$: on a la solution qui vaut constamment 0 et les solutions
$$\pm y_b(t) = \begin{cases} \pm\dfrac{(t-b)^2}{4}, & t \geq b \\ 0, & t \leq b \end{cases}$$
définies pour tout $b \geq 0$.
2. $f(y) = y^3$ est localement lipschitz. Par conséquent il existe une seule solution maximale. $y(t) \equiv 0$ est la solution.
3. Il existe une seule solution, qui est $y(t) = \sqrt{2t+1}$ (la fonction $f(y) = \frac{1}{y}$ est localement lipschitz).

Exercice 2.6.2

Il suffit d'utiliser le lemme de Gronwall.

Exercice 2.6.3

Soit (T_*, T^*) le domaine de définition d'une solution maximale. Supposons que $T^* < b$. On pose $r^2(t) = \sum_{j=1}^{n} x_j^2(t)$. Pour tout $t \in [T^* - \delta, T^*)$ on a
$$r'(t)r(t) \leq r(t)|f(t, x(t))|$$
On sait que $r(t) \to +\infty$ pour $t \to T^*$. A moins de prendre δ plus petit on peut dire que
$$r'(t) \leq |f(t, x(t))| \leq F(r(t))$$
En intégrant on trouve
$$\int_{r(t_0)}^{r(t)} \frac{d\sigma}{F(\sigma)} < T^* - t_0$$
Si on passe a la limite pour $t \to T^*$ on trouve une contraddiction.

Exercice 2.6.4

1. L'équation est équivalente a $(e^t x(t))' = e^t \alpha(t) x^2(t)$; il suffit d'intégrer. Sinon il suffit de dériver.
2. $0 \in A$ car $|x(0)| = x_0 = 1 - \delta < 1 - \delta_0$. Ensuite, si $T \in A$ et $T_1 < T$ on a $|x(t)| \leq 1 - \delta$ pour $t \in [0, T_1]$ et donc $T_1 \in A$.
3. Soit $T \in A$. Alors $|x(s)| \leq 1 - \delta_0$ pour $s \in [0, T]$. Comme $|\alpha(s)| \leq 1$ on déduit que
$$|x(t)| \leq e^{-t}|x_0| + (1 - \delta_0) \int_0^t e^{-(t-s)} |x(s)| ds$$
En posant $\varphi(t) = e^t |x(t)|$ on peut utiliser l'inégalité de Gronwall.
4. On en déduit que $|x(t)| \leq 1 - \delta$ pour $t \in [0, T]$ pour tout $T \in A$. En particulier $|x(T)| \leq 1 - \delta$; par continuité $|x(\alpha)| \leq 1 - \delta$. Comme $1 - \delta < 1 - \delta_0$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $|x(t)| \leq 1 - \delta_0$ pour $t \in [\alpha, \alpha + \varepsilon]$. Alors $\alpha + \varepsilon \in A$, ce qui est absurde.
5. $|x(t)| \leq 1 - \delta_0$ pour $t \in [0, T^*[$. Alors $x(t)$ peut être prolongé : contradiction !

Exercice 2.6.5 $|f(t, y) - f(t, z)| \leq |t| \frac{|y^2 - z^2|}{\sqrt{t^2+y^2} + \sqrt{t^2+z^2}} \leq |t| \frac{|y|+|z|}{\sqrt{t^2+y^2} + \sqrt{t^2+z^2}} |y - z| \leq |t||y - z|$

Exercice 2.6.6 Puisque $\nabla F \in C^1$ le probleme admet une solution maximale unique sur (T_*, T^*). D'autre part $\dfrac{d}{dt}[F(x(t))] \leq 0$; par conséquent pour $t \geq t_0$ on a $F(x(t)) \leq F(x_0)$.

Si $T^* < +\infty$, alors on doit avoir que $|x(t)| \to +\infty$ si $t \to T^*$; l'hypothèse sur la limite de F entraîne que $F(x(t)) \to +\infty$ ce qui contredit l'inégalité ci-dessus.

Exercice 2.6.7

Soit R le rectangle $\{(t,y) : t \in [0,0.5], y \in [-1,1]\}$. On a $M = \max_R [t^2 + e^{-y^2}] = \frac{5}{4}$. Alors $y(t)$ existe pour $0 \leq t \leq \min\{0.5, 1/\frac{5}{4}\} = \frac{1}{2}$.

Exercice 2.6.8
Soit $R = [0,a] \times [-b,b]$. On a $M = \max_R [t^2 + e^{-y^2}] = b^2 + 1$. Le théorème d'existence nous dit qu'il existe une solution dans l'intervalle $[0,\alpha]$ pour $\alpha = \min\{a, \frac{b}{b^2+1}\}$. Le plus grand α possible est $\frac{1}{2}$. Alors y existe pour $t \in [0,0.5]$.

Exercice 2.6.9

1. On a que
$$x(t) - y(t) = \int_{t_0}^{t} [f(s,x(x)) - g(s,x(x))] + [g(s,x(x)) - g(s,y(x))]$$
Il existe un $\alpha_0 > 0$ tel que $[f(s,x(x)) - g(s,x(x))] \leq -\alpha_0$.
D'autre coté g est uniformément continue et donc $|g(s,x(s)) - g(s,y(s))| \leq \frac{\alpha_0}{2}$ Puisque $x(t_0) - y(t_0) = 0$ il existe $\delta > 0$ tel que pour $t_0 \leq s \leq t_0 + \delta < b$ on a $|x(s) - y(s)| \leq \eta_0$.
Par conséquent $x(t) - y(t) \leq -\frac{\alpha_0}{2}(t - t_0)$.
2. A est un intervalle $[t_0, c^*)$. Evidemment $x(c^*) \leq y(c^*)$. Si $c^* = b$ on a fini. Sinon :
   (a) Si $x(c^*) < y(c^*)$ par continuité $x(t) < y(t)$ pour $t \in [c^*, c^* + \varepsilon]$: absurde.
   (b) Si $x(c^*) = y(c^*)$ il existe $\delta > 0$ tel que $x(t) \leq y(t)$ pour $t \in [c^*, c^* + \delta]$ d'apres le pas précédent : absurde.

Exercice 2.6.10

1. $\rho = 1$ marche
2. on peut chercher ρ de la forme $\rho = x^m y^n$ (résultat : $m = n = -2$).

Exercice 2.6.11
Il suffit de considérer $x' = t, x(0) = 0$ et $x' = t, x(1) = 0$: les solutions, $\frac{t^2}{2}$, passent par $x = 3$.

Exercice 2.6.12 L'orbite est une spirale : on a $x^2 + y^2 = e^{-2t}$.

Exercice 2.6.14
Soit $(x(t), y(t))$ la solution du système. Supposons que $y(t_1) = 0$. On pose $x(t_1) = \tilde{x}$. Soit $x_1(t)$ la solution du problème de Cauchy $x' = 1 + x^2$, $x(t_1) = \tilde{x}$. Alors $(x_1(t), 0)$ résoud le système avec les conditions initiales $y(t_1) = 0$ et $x(t_1) = \tilde{x}$. On a donc deux orbites qui passent à travers $(\tilde{x}, 0)$. Absurde.

Exercice 2.6.15

1. Le point d'équilibre $(0,0)$ est une orbite. Pour trouver les autres orbites, il faut résoudre $y'(x) = -\frac{2x}{y}$: toutes les solutions sont de la forme $\frac{1}{2}y^2 + x^2 = c$
2. Le point d'équilibre $(0,0)$ est une orbite. Pour trouver les autres orbites, il faut résoudre $y'(x) = \frac{x^2}{y^2}$: on a $y = (x^3 - c)^{\frac{1}{3}}$ pour $c \neq 0$, $y = x$ pour $x > 0$, $y = x$ pour $x < 0$
3. Le point $(0,0)$ est une orbite. Chaque point du cercle $x^2 + y^2 = 1$ est une position d'équilibre et donc une orbite. Pour les autres orbites, il faut résoudre $y'(x) = -\frac{x}{y}$: on a les cercles de centre $(0,0)$ et rayon $c \neq 1$. On a donc que des solutions périodiques !

Exercice 2.6.16

1. L'équation est équivalente au système
$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x^3 \end{cases}$$
dont les orbites sont $y'(x) = -\frac{x^3}{y}$, c'est-à-dire $\frac{y^2}{2} + x^4 = c$ et le point $(0,0)$. Les orbites $\frac{y^2}{2} + x^4 = c$ sont fermées et ne contiennent pas $(0,0)$. Cela implique que toutes les orbites sont périodiques.
2. L'équation est équivalente au système
$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x - x^5 \end{cases}$$

dont les orbites sont $y'(x) = -\frac{x+x^5}{y}$, c'est-à-dire $\frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^6}{6} = c$, et le point $(0,0)$. Les orbites $\frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^6}{6} = c$ sont fermées et ne contiennent pas le point $(0,0)$. Cela implique que toutes les orbites sont périodiques.

3. L'équation est équivalente au système

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -\frac{x}{1+x^2} \end{cases}$$

dont les orbites sont $y'(x)y(x) = -\frac{x}{1+x^2}$, c'est-à-dire $\frac{y^2}{2} + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) = c$ et le point $(0,0)$. Les orbites $\frac{y^2}{2} + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) = c$ sont fermées et ne contiennent pas $(0,0)$. Cela implique que toutes les orbites sont périodiques.

Chapitre 4

Stabilité et équilibre

3.1 Introduction

Soit

$$x' = f(x) \tag{3.1}$$

Définition 3.1.1 *1. Une solution φ de (3.1) est stable si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta_\varepsilon > 0$ tel que $||\varphi(t) - \psi(t)|| < \varepsilon$ si $||\varphi(0) - \psi(0)|| < \delta_\varepsilon$ pour tout t, pour toute solution ψ de (3.1).*

2. Une solution φ de (3.1) est asymptotiquement stable si elle est stable et si toute solution ψ qui part assez proche de φ approche φ pour $t \to \infty$.

Théorème 3.1.2 *Les solutions de $Y' = AY$ sont asymptotiquement stables si toute valeur propre de A est à partie réelle strictement négative. Les solutions de $Y' = AY$ sont stables si toute valeur propre de A est à partie réelle strictement négative ou bien est à partie réelle nulle et le bloc correspondant est diagonalisable.*

Théorème 3.1.3 *Soit $Y' = AY + g(Y)$ où $\frac{g(x)}{||x||} \to 0$ pour $x \to 0$ et $\frac{g(x)}{||x||}$ est continue. La solution nulle est asymptotiquement stable si toute valeur propre de A est à partie réelle strictement négative. Si une valeur propre de A a partie réelle strictement positive, alors 0 est instable.*

Si $f \in C^1$ alors le système (3.1) peut s'écrire sous la forme précédente.

Remarque 3.1.4 *Si une valeur propre est à partie réelle nulle, et les autres sont à partie réelle négative, alors on ne peut rien dire, en général, à travers la méthode de la linéarisation.*

3.2 Systèmes dans le plan

Soit $Y' = AY$, avec $det(A) \neq 0$. Quelle est l'allure des trajectoires proche de 0 ? Soient λ_1, λ_2 les valeurs propres de A. Si $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ ont le même signe, alors 0 est un noeud ; sinon il est un col. Soient $\lambda_1 = \overline{\lambda_2} \in \mathbb{C}$. Si $\Re(\lambda_1) \neq 0$ on a un foyer ; si $\Re(\lambda_1) = 0$ on a un centre.

Qu'est-ce qui se passe pour un système non-linéaire $x' = f(x)$? On va supposer que $f \in C^1$.

On considère le système linéarisé $Y' = AY$ autour d'un point d'équilibre de $x' = f(x)$. A moins d'une translation on peut supposer que ce point soit 0.

Définition 3.2.1 *Soit*

$$\begin{cases} x' = f(x,y) \\ y' = g(x,y) \end{cases}$$

1. *Supposons que $f(x,-y) = f(x,y)$ et $g(x,-y) = -g(x,y)$ ou bien $f(x,-y) = -f(x,y)$ et $g(x,-y) = g(x,y)$. Si $(x(t), y(t))$ est une solution, alors $(x(t), y(t))$ est une solution.*
2. *Supposons que $f(-x,y) = f(x,y)$ et $g(-x,y) = -g(x,y)$ ou bien $f(-x,y) = -f(x,y)$ et $g(-x,y) = g(x,y)$. Si $(x(t), y(t))$ est une solution, alors $(-x(t), y(t))$ est une solution.*
3. *Supposons que $f(-x,-y) = f(x,y)$ et $g(-x,-y) = g(x,y)$ ou bien $f(-x,-y) = -f(x,y)$ et $g(-x,-y) = -g(x,y)$. Si $(x(t), y(t))$ est une solution, alors $(-x(t), -y(t))$ est une solution.*

Théorème 3.2.2 (Poincaré) *Soient λ_1, λ_2 les valeurs propres de A.*

1. *Si λ_1, λ_2 ne sont pas réelles et égales et elles ne sont pas imaginaires pures, alors la nature des trajectoires proches de 0 est la même que celles de $Y' = AY$.*
2. *Si $\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$ alors 0 est un noeud ou un foyer pour le système non-linéaire.*
3. *Si $\lambda_1 = i\beta = -\lambda_2$ alors 0 est un centre ou un foyer ou un centre-foyer pour le système non-linéaire (on rappelle que 0 est un centre-foyer s'il existe une suite Γ_n de courbes fermées, $\Gamma_n \subset \Gamma_{n+1}$, $\Gamma_n \to 0$ et toute trajectoire entre Γ_n et Γ_{n+1} spirale vers Γ_n ou Γ_{n+1} pour $t \to \pm\infty$).*

Remarque 3.2.3 *Ce théorème nous dit que la linéarisation nous donne l'allure des trajectoires de $x' = f(x)$ proche d'une position d'équilibre dans tous les cas, sauf les deux cas $\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 = i\beta = -\lambda_2$. Cependant :*

1. *Si $f \in C^2$, 0 est un noeud pour $x' = f(x)$ si et seulement si 0 est un noeud pour le linéarisé ; 0 est un foyer pour $x' = f(x)$ si et seulement si 0 est un foyer pour le linéarisé.*
2. *Si f est analytique et 0 est un centre pour le système linéarisé, alors 0 est un centre ou un foyer pour le système $x' = f(x)$.*
3. *Si le système est symétrique par rapport à l'axe des x ou des y et si 0 est un centre pour le système linéarisé, alors 0 est un centre pour le système $x' = f(x)$.*

3.3 Fonctions de Lyapunov

C'est une méthode qui sert à étudier la stabilité d'une position d'équilibre d'un système $x' = f(t, x)$. On rappelle que la méthode de la linéarisation ne nous donne aucune information dans le cas oï£¡ les valeurs propres de la matrice du système linéarisé sont à partie réelle nulle.

Soit $x' = f(t, x)$, $x \in D \subset \mathbb{R}^n$, $t \geq t_0$. Supposons que $f(t, 0) = 0$ pour tout $t \geq t_0$.

Définition 3.3.1 *Soit $V : [t_0, +\infty[\times D \to \mathbb{R}$ une fonction C^1 telle que $V(t, 0) = 0$.*

1. *V est définie positive s'il existe $W(x) \in C^1(D)$ telle que $W(0) = 0$, $0 < W(x) \leq V(t, x)$ pour tout $x \neq 0$, pour tout $t \geq 0$.*
2. *V est définie négative s'il existe $W(x) \in C^1(D)$ telle que $W(0) = 0$, $V(t, x) \leq W(x) < 0$ pour tout $x \neq 0$, pour tout $t \geq 0$.*
3. *V est semi-définie positive si $0 \leq W(x) \leq V(t, x)$.*
4. *V est semi-définie négative si $0 \geq W(x) \geq V(t, x)$.*

Théorème 3.3.2 *Soit V définie positive ;*

1. *si $\frac{d}{dt} V(t, x(t))$ est semi-définie négative, alors $x = 0$ est stable pour $x' = f(t, x)$.*
2. *Si $\frac{d}{dt} V(t, x(t))$ est définie négative, alors $x = 0$ est asymptotiquement stable.*

Exemple 3.3.3 *Soit $x' = -x^3$. On peut définir $V(x) = x^2$ comme fonction de Lyapunov. En fait V est définie positive et $\frac{d}{dt} V(x(t)) = 2xx' = -2xx^3$ est définie négative. Par conséquent 0 est asymptotiquement stable.*

Théorème 3.3.4 *S'il existe V telle que $V(t, x) \to 0$ pour $x \to 0$ uniformément en t, $\frac{d}{dt} V(t, x(t))$ est définie poitive dans un voisinage de 0 et pour $t \geq t_1 \geq t_0$ $V(t, x)$ prend des valeurs positives dans tout voisinage suffisamment petit de 0, alors $x = 0$ est instable.*

Exemple 3.3.5 *Soit $x'' = F(x)$. On définit $U(x) = -\int_{x_0}^{x} F(s) ds$.*

a) Si U possède un minimum local strict en 0, alors 0 est stable : il suffit de définir $V(x, x') = \frac{1}{2} x'^2 + U(x)$ comme fonction de Lyapunov.

b) Si $U'(0) = 0$, pour x assez petit $U'(x) > 0$ pour $x < 0$ et $U'(x) < 0$ pour $x > 0$, alors 0 est instable : il suffit de définir $V(x, x') = xx'$ comme fonction de Lyapunov.

3.4 Comportement des solutions en temps infini

Théorème 3.4.1 *Supposons qu'une solution de $x' = F(x)$ converge vers un point ξ pour $t \to \infty$. Alors ξ est un point d'équilibre pour $x' = F(x)$.*

Théorème 3.4.2 (Théorème de Poincaré-Bendixon) *Soit $x' = f(x,y), y' = g(x,y)$ un système dans le plan. Supposons qu'une solution reste dans une région bornée du plan ne conténant aucun point d'équilibre. Alors l'orbite spirale autour d'une courbe simple fermée qui est elle même orbite d'une solution périodique.*

Exemple 3.4.3 *Le système $x' = y, y' = -x + (1 - x^2 - 2y^2)y$ admet une solution pèriodique non triviale, grâce au théorème précédent (il suffit de calculer $\frac{d}{dt}(x^2 + y^2)$).*

Remarque 3.4.4 *Soit $x' = f(x,y), y' = g(x,y)$ un système dans le plan. S'il existe une solution périodique dans une région D du plan, alors la divergence de $(f(x,y), g(x,y))$ est 0 ou change de signe dans D.*

Exemple 3.4.5 *Le système $x' = x^3 + g(y), y' = y^5 + f(x)$ ne peut pas avoir de solution périodique.*

3.5 Exercices

Exercice 3.5.1 *Etudier les positions d'équilibre des systèmes suivants :*

1. $\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$
2. $\begin{cases} x' = x \\ y' = 2y \end{cases}$
3. $\begin{cases} x' = -2x + y \\ y' = -x - 2y \end{cases}$
4. $\begin{cases} x' = y \\ y' = -\frac{k}{m}x - \frac{d}{m}y \end{cases}$ *pour* $d, m, k > 0$

Exercice 3.5.2 *Pour les systèmes suivants trouver les systèmes linéaires qui les approximent au voisinage des points d'équilibre indiqués*

1. $\begin{cases} x' = y \\ y' = -\sin(x) \end{cases}$ *en* $(0, 0)$.
2. $\begin{cases} x' = y \\ y' = \varepsilon(x^2 - 1)y - x \end{cases}$ *en* $(0, 0)$.

Exercice 3.5.3 *Pour les systèmes suivants trouver les points d'équilibre et étudier leur nature :*

1. $\begin{cases} x' = x \\ y' = x^2 - 3y \end{cases}$
2. $\begin{cases} x' = -x \\ y' = x^3 - y \end{cases}$
3. $\begin{cases} x' = x \\ y' = x^3 + y \end{cases}$

Exercice 3.5.4 *Soit*

$$\begin{cases} x' = -x - \dfrac{2y}{\ln(x^2 + y^2)} = f(x, y) \\ y' = -y + \dfrac{2x}{\ln(x^2 + y^2)} = g(x, y) \end{cases}$$

sur $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$.

1. *Montrer que* f *et* g *sont* $C^1(D)$.
2. *Montrer que* $(0, 0)$ *est une position d'équilibre.*
3. *Linéariser le système et étudier la nature de son point d'équilibre.*
4. *Utiliser les coordonnées polaires pour résoudre le système et montrer que* 0 *est un foyer stable.*

Exercice 3.5.5 *Soit* $x' = \alpha x(1 - \beta x)$, *avec la condition initiale* $x(0) = x_0 \geq 0$, *pour* $t \geq 0$.

1. *Montrer l'existence et l'unicité des solutions maximales.*
2. *Donner les points d'équilibre du système.*
3. *Montrer que les solutions maximales sont globales et qu'elles convergent vers un équilibre.*
4. *Résoudre l'équation.*

Exercice 3.5.6 *Soit* $Y' = V(Y)$ *où* $Y = (x, y)^T$ *et* $V(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$.

1. *Déterminer les points d'équilibre.*
2. *En posant* $z = x + iy$ *calculer la solution telle que* $z(0) = z_0$.
3. *Montrer que les courbes intégrales sont les droites* $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{R}^-$ *et les cercles qui passent par l'origine, ayant le centre sur l'axe des* y.

Exercice 3.5.7 *Soit*

$$\begin{cases} x' = x^2 + y^2 - 1 \\ y' = -x \end{cases}$$

1. *Donner les points d'équilibre* A *et* B.

2. *Faire un régionnement du plan selon le signe de* x' *et* y'.
3. *Etudier le système linéarisé autour des points* A *et* B *et donner l'allure des solutions au voisinage de ces points.*

Exercice 3.5.8 *Soit*

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = \alpha x^3 \\ y' = \beta y^3 \end{array} \right. \qquad t \geq 0.$$

1. *Donner les points d'équilibre.*
2. *Donner les solutions qui passent par* (x_0, y_0) *pour* $t = 0$.
3. *Etudier la nature des points d'équilibre.*
4. *Soient* $\alpha > 0, \beta \leq 0$ *et* $x_0 \neq 0$. *Les solutions sont globales ?*

Exercice 3.5.9 *Soit*

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = ax - bxy - ex^2 \\ y' = -cy + dxy - fy^2 \end{array} \right.$$

On suppose $a, b, c, d, e, f > 0$ *et* $\frac{c}{d} > \frac{a}{e}$.

1. *Montrer que l'axe des* x, *pour* $x \geq 0$, *est l'union de quatre orbites dijointes.*
   Suggestion : prouver que $x(t) = \frac{ax_0}{ex_0 + (a - ex_0)e^{-at}}, y(t) = 0$ *est une solution pour n'importe quel* $x_0 \geq 0$.
2. *Montrer que l'axe des* y, *pour* $y > 0$, *est une orbite.*
3. *Montrer que si une solution part de* $A = \{(x, y) : x > 0, y > 0\}$ *alors elle reste dans cette région.*
4. *Tracer l'allure des lignes du champ dans* $I = \{(x, y) \in A : y < \frac{a-ex}{b}\}$. *Montrer que si une solution part de* I *elle y reste et converge vers* $(\frac{a}{e}, 0)$.
5. *Tracer l'allure des lignes du champ dans* $III = \{(x, y) \in A : y < \frac{-c+dx}{f}\}$. *Montrer que si une solution part de* III *elle quitte cette région.*
6. *Tracer l'allure des lignes du champ dans* $II = \{(x, y) \in A : y > \frac{-c+dx}{f}, y > \frac{a-ex}{b}\}$. *Montrer que si une solution part de* II *et elle y reste, alors elle converge vers* $(\frac{a}{e}, 0)$.
7. *Montrer qu'une solution qui part de la region* II *ne peut pas entrer dans la région* III.
8. *Montrer que si une solution part de la droite* $y = \frac{a-ex}{b}$ *elle entre dans* I.
9. *Montrer que si une solution part de la droite* $y = \frac{-c+dx}{f}$ *elle entre dans* II.
10. *En déduire que toute solution qui part de* A *converge vers* $(\frac{a}{e}, 0)$.

Exercice 3.5.10 *Soit*

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = x + y - x^3 \\ y' = -x \end{array} \right.$$

1. *Montrer que la courbe symétrique d'une trajectoire par rapport à* $(0, 0)$ *est une trajectoire.*
2. *Soit* Γ *la courbe* $y = x^3 - x$, Γ^+ *la partie de* Γ *où* $x > 0$ *et* Γ^- *la partie de* Γ *où* $x < 0$. *Soient* $D^+ = \{(0, y) : y > 0\}$ *et* $D^- = \{(0, y) : y < 0\}$. *Soient*
   (a) $A_1 = \{(x, y) : x > 0, y > x^3 - x\}$
   (b) $A_2 = \{(x, y) : x > 0, y < x^3 - x\}$
   (c) $A_3 = \{(x, y) : x < 0, y < x^3 - x\}$
   (d) $A_4 = \{(x, y) : x < 0, y > x^3 - x\}$

   Tracer l'allure du champ des vecteurs associé au système. Soit $M(x(0), y(0)) \in A_1$. *Montrer que toute solution issue de* M *sort de la region* A_1 *par* Γ^+. *En déduire que les solutions parcourent successivement* A_1, A_2, A_3, A_4.
3. *Etudier comment les orbites spiralent autour de* 0. *Pour cela soit* $P = (0, y_P) \in D^+$. *On définit la suite des intersections de l'orbite* $= O_P$ *avec* D^+ *et* D_- *respectivement* $\sigma_1(P), ...\sigma_n(P), ...$ *et* $\alpha_1(P), ...\alpha_n(P), ...$
   (a) *Montrer qu'une orbite est périodique si et seulement si* $\alpha_1(P) = -P$.
   (b) *Soit* $P_0 \in D^+$ *tel que la solution issue de* P_0 *recoupe* Γ^+ *au point* $B(1, 0)$. *On pose* $\delta(P) = |\alpha_1(P)|^2 - |P|^2$.
      i. *Montrer que si* $|y_P| < |y_{P_0}|$ *alors* $\delta(P) > 0$.

ii. *Montrer que si* $|y_P| \geq |y_{P_0}|$ *alors* δ *est monotone décroissante et* $\delta(P)$ *tend vers* $-\infty$ *lorsque* $|y_P|$ *tend vers* $+\infty$.

(c) *Déduire des questions précédentes qu'il existe une orbite périodique et montrer que toutes les trajectoires non réduites à* $(0,0)$ *convergent asymptotiquement vers cette orbite quand* $t \to +\infty$.

Exercice 3.5.11 *Pour* $x, y \geq 0$ *soit*

$$\begin{cases} x' = ax - bxy \\ y' = cy - dxy - ey^2 \end{cases}$$

On suppose $a, b, c, d, e, f > 0$ *et* $\frac{a}{b} > \frac{c}{e}$. *Soient* $I = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, y < \frac{c-dx}{e}\right\}$, $II = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, y > \frac{c-dx}{e}, y \leq \frac{a}{b}\right\}$ *et* $III = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, y \geq \frac{a}{b}\right\}$.

1. *Déterminer le sens du champ. Montrer que les axes* x *et* y *pour* $x, y \geq 0$ *sont union d'orbites.*
2. *Montrer que toute solution qui part de* I *ou de* III *entre dans* II.
3. *Montrer que toute solution qui part de* II *y reste.*
4. *Montrer que* $x(t) \to +\infty$ *et* $y(t)$ *converge vers une limite finie pour toute solution* $(x(t), y(t))$ *qui part d'un point* (x_0, y_0) *avec* $x_0 > 0$ *et* $y_0 > 0$.
5. *Montrer qu'il existe* t_0 *tel que* $y'(t) < -y(t)$ *pour* $t \geq t_0$. *En déduire que* $y(t) \to 0$ *pour* $t \to +\infty$.

Exercice 3.5.12 *On considère, pour* $y \geq 0$

$$\begin{cases} x' = x - xy - x^2 \\ y' = -4y + 2xy \end{cases}$$

Déterminer les points d'équilibre et étudier leur nature ; déterminer le sens du champ. Montrer que si une solution part de $P_1 = \{(x,y) : x \geq 0, y \geq 0\}$ *ou de* $P_2 = \{(x,y) : x \leq 0, y \geq 0\}$, *elle y reste.*

On définit $I = \{(x,y) \in P_1 : 0 < x \leq 1, 1 - x - y \geq 0\}$, $II = \{(x,y) \in P_1 : x \leq 2, 1 - x - y \leq 0\}$ $III = \{(x,y) \in P_1 : x \geq 2\}$.

1. *Montrer que si une solution part de* I, *elle y reste. En déduire que* $x(t), y(t)$ *sont définis pout tout* $t \geq 0$ *et que* $(x(t), y(t)) \to (1,0)$.
2. *Montrer que toute solution qui part de* II *converge vers* $(1,0)$.
3. *Montrer que toute trajectoire dans* III *est définie par une fonction décroissante sur* $[2, +\infty)$.

On définit $A = \{(x,y) \in P_2 : y > 1 - x\}$, $B = \{(x,y) \in P_2 : y < 1 - x\}$

1. *Montrer que si une solution part de* A, *elle rentre dans* B.
2. *Montrer que si une solution part de* B, *alors* $(x(t), y(t)) \to (-\infty, 0)$ *pour* $t \to T^*$ *(*T^* *est le temps de vie futur de la solution)*

Exercice 3.5.13 *On se propose de tracer les trajectoires du système*

$$\begin{cases} x' = -y \\ y' = x(1+y) \end{cases}$$

Soient $I = \{(x,y) : x \geq 0, y < -1\}$, $II = \{(x,y) : x \geq 0, -1 < y \leq 0\}$, $III = \{(x,y) : x \geq 0, y > 0\}$.

1. *Etudier les symétries et le sens du champ qui définit le système. Etudier les points d'équilibre et leur nature grâce au théorème de Poincaré.*
2. *Montrer que la droite* $y = -1$ *est une orbite du système.*
3. *On considère une trajectoire issue d'un point de* I.
   (a) *Montrer qu'elle est monotone et qu'elle est définie par une fonction* $y = y(x)$.
   (b) *Montrer qu'elle n'a ni d'asymptote verticale ni d'asymptote horizontale.*
4. *Montrer qu'une trajectoire issue d'un point de* II *va entrer dans* III.
   Suggestion : le montrer par contradiction, en étudiant $\displaystyle\lim_{t \to T^*} \frac{y(t)}{x(t)}$, *où* T^* *dénote l'extrême droit de l'intervalle d'existence maximale de la solution.*

5. *Montrer qu'une trajectoire issue d'un point de III touche l'axe $y > 0$ en temps fini. En déduire que les trajectoires dans le demi-plan $\{(x, y) : y > 0\}$ sont fermées.*
6. *Esquisser les trajectoires du système.*

Exercice 3.5.14 *Soit*

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = -xy \\ y' = x - y^2 \end{array} \right.$$

1. *Déterminer les points d'equilibre et le sens du champ. Etudier les symétries du problème. Montrer que l'axe des y est l'union de trois orbites dijointes.*
2. *Montrer que si $x, y > 0$, alors le graphe de $y = \sqrt{2x}$ est une trajectoire.*
   On introduit les regions suivantes :
   $$I = \{x > 0, y > \sqrt{2x}\}\,, \quad II = \{x > 0, 0 \leq y < \sqrt{2x}\}\,, \quad III = \{x < 0, y > 0\}$$
3. *On considère une trajectoire dans I passant par un point (x_0, y_0) à l'instant t_0. Montrer que son temps de vie futur est infini et que la trajectoire converge vers 0. Montrer que son temps de vie passé est fini, que $y(t) \to +\infty$ et $x(t) \to +\infty$ lorsque $t \to T_*$.*
4. *Soit une trajectoire issue d'un point (x_0, y_0) de II tel que $0 \leq y < \sqrt{x}$. Montrer que cette trajectoire traverse la parabole $y = \sqrt{x}$ et après converge vers 0.*
   Montrer que pour un temps fini passé elle rencontre l'axe des x.
5. *Montrer que si une solution part de III, alors son temps de vie passé est finis. Montrer qu'elle croise l'axe des x.*

Exercice 3.5.15 *Etudier la stabilité des problèmes suivants à travers la méthode de Lyapunov :*

1. $x' = 2yx - x^3$, $y' = -x^2 - y^5$
2. $x' = 2yx + x^3$, $y' = x^2 - y^5$
3. $x' = y$, $y' = -x^n$ $(n \in \mathbb{N})$
4. $x' = -y^3$, $y' = x^3$
5. $x' = -y - x^3 - xy^2$, $y' = x - y^3 - yx^2$
6. $x' = -y + x^3 + xy^2$, $y' = x + y^3 + yx^2$

3.6 Eléments de correction

Exercice 3.5.1

1. Les v.p. de la matrice sont -1,-1. Par conséquent $(0,0)$ est asymptotiquement stable.
2. Les v.p. de la matrice sont 1,2. Par conséquent $(0,0)$ est instable.
3. Les v.p. de la matrice sont $-1 \pm 2i$. Par conséquent $(0,0)$ est asymptotiquement stable.
4. Les v.p. de la matrice sont $\frac{-d \pm \sqrt{d^2-4km}}{2m}$. Par conséquent
   (a) si $d^2 - 4km > 0$, alors on a deux v.p. réelles négatives et donc stabilité asymptotique
   (b) si $d^2 - 4km = 0$, alors on a deux v.p. réelles négatives égales et donc stabilité asymptotique
   (c) si $d^2 - 4km < 0$, alors on a deux v.p. à partie réelle négative et donc stabilité asymptotique

Exercice 3.5.2

1. Le système linéarisé est $Y' = AY$, pour $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Les v.p., $\pm i$, ont partie réelle nulle. On a donc stabilité pour le système linéarisé, mais on ne peut rien dire sur le système de départ à travers la linéarisation. On peut utiliser la méthode de Lyapunov : il suffir de définir $V(x,y) = 1 - \cos x + \frac{y^2}{2}$ pour montrer que $(0,0)$ est stable (pas asymptotiquement, comme vu dans une proposition du cours).
2. Le système linéarisé est $Y' = AY$, pour $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\varepsilon \end{pmatrix}$. Les v.p., $\frac{1}{2}[-\varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 - 4}]$, ont partie réelle négative. On a donc stabilité asymptotique.

Exercice 3.5.3

1. La seule position d'équilibre est $(0,0)$. Le système linéarisé est $Y' = AY$, pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$. Les v.p. sont donc $1, -3$. Le théorème de Poincaré nous dit que $(0,0)$ est un col pour le système de départ.
2. La seule position d'équilibre est $(0,0)$. Le système linéarisé est $Y' = AY$, pour $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Les v.p. sont donc $-1, -1$. Le théorème de Poincaré nous dit que $(0,0)$ est un noeud ou un foyer pour le système de départ ; le système est C^∞, par conséquent $(0,0)$ est un noeud. Il est asymptotiquement stable.
3. La seule position d'équilibre est $(0,0)$. Le système linéarisé est $Y' = AY$, pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Les v.p. sont donc $1, 1$. Le théorème de Poincaré nous dit que $(0,0)$ est un noeud ou un foyer pour le système de départ ; le système est C^∞, par conséquent $(0,0)$ est un noeud. Il est instable.

Exercice 3.5.4

1.
2.
3. Le système linéarisé est $Y' = AY$, pour $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Les v.p. sont $-1, -1$. On a donc un noeud stable pour le système linéarisé.
4. On trouve $\frac{dr}{dt} = -r$ et $\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{\ln r}$. La solution du problème de Cauchy de conditions initiales $r(0) = r_0, \theta(0) = \theta_0$ est $r(t) = r_0 e^{-t}$ et $\theta(t) = \theta_0 - \ln(1 - t/\ln(r_0))$. Si $r_0 < 1$, $r(t) \to 0$ et $\theta(t) \to -\infty$ pour $t \to \infty$. La solution est une spirale vers $(0,0)$. On a donc un foyer stable.

Exercice 3.5.5

1. L'existence et l'unicité sont banales, car $x \to \alpha x(1 - \beta x)$ est localement lipschitz.
2. Les points d'équilibre du système sont 0 et $\frac{1}{\beta}$.

3. Si $x_0 = 0$ alors $x(t) = 0$ est la solution.
   Si $x_0 = \frac{1}{\beta}$ alors $x(t) = \frac{1}{\beta}$ est la solution.
   Si $x_0 > \frac{1}{\beta}$ alors $x'(t) < 0$ et donc $x(t)$ decroit. Cela implique que x ne peut pas converger vers ∞ et par monotonie converge necessairement vers $\frac{1}{\beta}$.
   Si $0 < x_0 < \frac{1}{\beta}$ alors $x'(t) > 0$; $0 < x(t) < \frac{1}{\beta}$, car il ne peut pas passer par $\frac{1}{\beta}$. Par conséquent $x(t)$ croit et par monotonie converge necessairement vers $\frac{1}{\beta}$.
4. on peut résoudre l'équation par séparation de variables.

Exercice 3.5.6

1. Le seul point d'équilibre est $(0, 0)$.
2. on a $z' = z^2$ et donc $z(t) = \frac{z_0}{1-z_0 t}$
3. Si $z_0 \in \mathbb{R}$ on a que la trajectoire est la partie positive des l'axe des x ou la partie négative. Sinon il suffit de vérifier que $|z(t) - ia| = |a|$ ce qui est équivalent à $|x_0 - ay_0 t + i(y_0 - a + ax_0 t)| = |a||1 - x_0 t - iy_0 t|$ (N.B. : on peut toujours supposer que a est tel que $|a| = |z_0 - ia|$).

Exercice 3.5.7

1. Les points d'équilibre sont $A = (0, 1), B = (0, -1)$.
2.
3. Pour le point B le système linéarisé a comme matrice $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Les v.p. sont $\pm\sqrt{2}$. On a donc un col, grâce au théorème de Poincaré.
   Pour le point A on pose $X = x$, $Y = y - 1$. Dans ces nouvelles coordonnées on a un système symétrique par rapport à l'axe des y ; le linéarisé autour de $(0, 0)$ présente un centre. Par conséquent le système de départ présente un centre.

Exercice 3.5.8

1. Il n'y a que le point $(0, 0)$
2. $x(t) = \frac{x_0}{\sqrt{1-2\alpha x_0^2 t}}$, $y(t) = \frac{y_0}{\sqrt{1-2\beta y_0^2 t}}$
3. Si on linéarise on a la matrice nulle...cela nous sert à rien. On a quand même l'expression explicite des solutions : si α, β sont négatifs, alors $(0, 0)$ est asymptotiquement stable ; si α ou β est positif, alors $(0, 0)$ n'est pas stable et donc il est instable. Cela nous montre que si la partie réelle des valeurs propres est nulle, on ne peut rien dire à travers la linéarisation.
4. Non, la solution n'est définie que pour $t < \frac{1}{2\alpha x_0^2}$.

Exercice 3.5.8

1. Il est facile de montrer que $x(t) = \frac{ax_0}{ex_0+(a-ex_0)e^{-at}}$, $y(t) = 0$ est une solution. Son orbite est $(0, 0)$, le segment $(0, \frac{a}{e})$, le point $(\frac{a}{e}, 0)$, $(a/e, +\infty)$.
2. On a que l'orbite des solutions de $y' = -cy - fy^2$ est l'axe des y positif.
3. Les deux points précédents impliquent que si une solution part de A, elle y reste.
4. Supposons qu'une solution quitte I pour $t = t^*$. Alors $x'(t^*) = 0$. En dérivant la première équation du système on a $x''(t^*) = -bx(t^*)y'(t^*)$. Cette quantité est positive. Alors x a un minimum pour $t = t^*$. Cela est impossible car x est croissant.
   Par monotonie x, y admettent une limite qui est forcemment $(a/e, 0)$.
5. Si la solution reste dans $III = \{(x, y) : y < \frac{-c+dx}{f}\}$, par monotonie elle converge vers un point d'équilibre, qui encore par monotonie ne peut pas être $(0, 0)$ ou $(a/e, 0)$.
6. Si la solution reste dans II par monotonie elle converge vers un point d'équilibre qui est necessairement $(a/e, 0)$.
7. Supposons qu'une solution quitte II pour $t = t^*$ et rentre dans III. Alors $y'(t^*) = 0$. En dérivant la deuxième équation du système on a $y''(t^*) = dy(t^*)x'(t^*)$. Cette quantité est négative. Alors y a un maximum pour $t = t^*$. Cela est impossible car y est décroissant.
8. Si une solution part de la droite $y = \frac{a-ex}{b}$ elle entre dans I par le sens du champ.

9. Si une solution part de la droite $y = \frac{-c+dx}{f}$ elle entre dans II par le sens du champ.
10. Il en suit que toute solution qui part de $\{(x, y) : x > 0, y > 0\}$ elle converge vers $(\frac{a}{e}, 0)$.

Exercice 3.5.10

1. Il suffit d'utiliser la définition.
2. Si une solution part de A_1, comme $x' > 0$ et $y' < 0$, elle croise Γ^+. La solution donc rentre dans A_2. On va montrer qu'elle sort, en rentrant dans A_3. Dans A_2 x reste borné. L'orbite satisfait $y'(x) = -\frac{x}{x+y-x^3}$. Si $y(x) \to -\infty$, alors $y'(x) \to 0$, ce qui est une contradiction. Alors la solution rentre dans A_3. On utilise des arguments similaires pour montrer qu'elle rentre dans A_4 et ensuite dans A_1 à nouveau.
3. (a) Une orbite est périodique si et seulement si elle est fermée. Evidemment si $|\alpha_1(P)| = |P|$, alors, par la symétrie, l'orbite est fermée. Viceversa, si $|\alpha_1(P)| \neq |P|$, alors l'orbite croiserait sa symétrique par rapport à l'origine, qui est une orbite. On a donc une contradiction.

   (b) Soit $t_1(P)$ l'instant où la trajectoire arrive à $\alpha_1(P)$. Alors

$$I(P) = \int_0^{t_1(P)} \frac{d}{dt}\frac{x^2+y^2}{2}dt = \frac{|\alpha_1(P)|^2}{2} - \frac{|y_P|^2}{2} = \frac{\delta_P}{2}.$$

D'autre part $\frac{d}{dt}\frac{r^2(t)}{2} = xx' + yy' = x^2(1+x)(1-x)$.

I) On sait que les orbites ne se croisent pas. Si on choisit P tel que $y_P < y_{P_0}$ alors $0 \leq x < 1$. Par conséquent $\frac{d}{dt}\frac{r^2(t)}{2} > 0$ et donc $I(P) = \frac{\delta(P)}{2} > 0$.

II)

$$\delta(P) = \int_0^{u(P)} x^2(s)(1-x^2(s))ds + \int_{u(P)}^{v(P)} x^2(s)(1-x^2(s))ds + \int_{v(P)}^{t_1(P)} x^2(s)(1-x^2(s))ds$$

où $u(P)$ est l'instant où l'orbite qui part de P touche pour la première fois la droite $x = 1$, et $v(P)$ est l'instant où l'orbite qui part de P touche pour la deuxième fois la droite $x = 1$. On va ètudier séparément ces trois intégrales. Pour la première on fait le changement de variable $x(s) = x$: on a $s = s(x)$ et donc on doit étudier $\int_0^1 x^2(1-x^2)\frac{ds}{dx}dx$. Or,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y(x) - x^3 + x} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = -x\frac{dt}{dx}$$

Par conséquent

$$\int_0^{u(P)} x^2(s)(1-x^2(s))ds = \int_0^1 x^2(1-x^2)\frac{1}{y(x) - x^3 + x}dx$$

Cette intégrale est positive ; de plus, si $y_P \to +\infty$ alors $y(x) \to \infty$ et donc elle converge vers 0. Par ailleurs, si $y_{P_1} > y_{P_2}$, alors

$$\int_0^1 x^2(1-x^2)\frac{1}{y_1(x) - x^3 + x} < \int_0^1 x^2(1-x^2)\frac{1}{y_2(x) - x^3 + x}$$

car $y_1 > y_2$ pour tout $x \in [0, 1]$.

On traite de la même manière la troisième intégrale.

Il nous reste à étudier la deuxième intégrale. Pour cela, soient A l'ordonnée positive du point d'intersection entre la droite $x = 1$ et l'orbite qui part de P et B l'ordonnée négative du point d'intersection entre la droite $x = 1$ et l'orbite qui part de P. Pour étudier la deuxième intégrale on fait le changement de variable $y(s) = y$ et donc $s = s(y)$: on doit étudier $\int_A^B x^2(y)(1-x^2(y))\frac{ds}{dy}dy$. Or,

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{y(x) - x^3 + x}{x} = \frac{dx}{dt}\frac{dt}{dy}$$

Par conséquent on a

$$\int_{u(P)}^{v(P)} x^2(s)(1-x^2(s))ds = \int_B^A [x(y) - x^3(y)]dy$$

Cette intégrale est ngative ; de plus, si $y_P \to +\infty$ alors $x(y) \to \infty$ et donc elle converge vers $-\infty$. Par ailleurs, si $y_{P_1} < y_{P_2}$, alors $x_1(y) < x_2(y)$ pour tout $y \in [B_1, A_1]$ et donc

$$\int_{B_1}^{A_1} x_1(y) - x_1^3(y) > \int_{B_1}^{A_1} x_2(y) - x_2^3(y) \geq \int_{B_2}^{A_2} x_2(y) - x_2^3(y)$$

car $\int_{B_2}^{B_1} x_2(y) - x_2^3(y) < 0$ et $\int_{A_1}^{A_2} x_2(y) - x_2^3(y) < 0$

(c) La fonction $\delta(P)$ est positive si $y_P < y_{P_0}$. Si $y_P > y_{P_0}$ cette fonction est decroissante et tend vers $-\infty$. Par conséquent δ n'admet qu'un zero. Cela implique qu'il n'existe qu'une orbite fermée γ et donc qu'une orbite périodique.

Par ailleurs, toutes les autres orbites spiralent autour de γ. En fait, si $y_P > y_{P_0}$, est-il possible que $\sigma_1(P) < y_P$? Non, car alors l'orbite qui passe par $(0, y_{-P})$ croiserait notre orbite. Si $y_P < y_{P_0}$, est-il possible que $\sigma_1(P) > y_P$? Non, car alors l'orbite qui passe par $(0, y_{-P})$ croiserait notre orbite.

Exercice 3.5.11

1. Dans I $x' > 0, y' > 0$; dans II $x' > 0, y' < 0$; dans III $x' < 0, y' < 0$.
2. Ca se déduit du sens du champ.
3. Si la solution sort de II elle rentre dans I par le sens du champ. Alors il exists t^* tel que $y'(t^*) = 0$. Si on dérive la deuxieme équation on trouve $y''(t^*) = -dx'(t^*)y(t^*) < 0$. Cela implique que t^* est un point de maximum. C'est une contradiction, car dans II $y' < 0$.
4. Toute solution $(x(t), y(t))$ qui part d'un point (x_0, y_0) avec $x_0 > 0$ et $y_0 > 0$ entre dans II. Dans cette région $x' > 0$ et il n'y a pas de point d'equilibre. Par conséquent $x(t) \to +\infty$. Par montonie y admet une limite pour $t \to +\infty$. Puisque $0 \leq y(t) \leq 2$, cette limite sera plus petite que 2.
5. $y'(t) < -y(t)$ si et seulement si $y(t) > \frac{c+1-dx(t)}{e}$. Cette inégalité est vraie a la limite pour $t \to +\infty$. Par conséquent elle est satisfaite pour t assez grand.

   On en déduit que $y(t) < e^{-t+C}$ et donc $y(t) \to 0$ pour $t \to +\infty$.

Exercice 3.5.12 Les points d'équilibre sont $(0,0)$ (il s'agit d'un col) et $(1,0)$ (il s'agit d'un noeud stable) ($(2,-1)$ n'est pas dans le domaine de définition du système). Les axes sont des orbites et donc si une solution part de P_1 ou P_2 elle y reste.

1. Dans I x croit et y décroit. Puisque I est borné, la solution reste toujours bornée et donc elle est définie pout tout $t \geq 0$. Elle ne peut pas sortir par l'axe des x, car l'axe des x est une orbite, ni par la droite $y = 1 - x$, à cause du sens du champ. Par monotonie elle admet une limite, qui est forcemment un point d'équilibre et donc c'est $(1,0)$ (pas $(0,0)$ car x croit).
2. Dans II x' et y' sont négatives et par conséquent bornés dans le futur. Par monotonie les solutions admettent une limite qui est forcémment $(1,0)$.
3. Dans III supposons que $x(t)$ soit définie sur $(T_*, t_0]$. On va montrer que $x(t) \to +\infty$ si $t \to T_*$. Si x était borné, par la monotonie de x et de y on aurait que $(x(t), y(t))$ converge vers un point d'équilibre. Le sens di champ implique une contradiction et donc $x(t) \to +\infty$. Dans cette region, les orbites sont les solutions de l'équation $y'(x) = \frac{-4y+2xy}{x(1-x-y)}$: on a $y' < 0$. On a donc des fonctions $y(x)$ décroissantes.

1. Si une solution part de A, elle est monotone. Dans A il n'y a pas de points critiques, et donc l'orbite sort, et rentre forcémment dans B (elle ne peut pas sortir par l'axe des y).
2. Dans B x et y décroissent. Si x était bornée, on aurait que $(x(t), y(t))$ est borné. Alors la solution est définie pour tout $t \geq t_0$. Par la monotonie elle converge vers un point d'équilibre. Cela est absurde, car il n'y en n'a pas dans cette région.

   Supposons que $y(t) \to l > 0$ quand $t \to T^*$. On sait que $x(t) \to -\infty$. Alors $y'(t) = 2y(t)[x(t) - 2] \to -\infty$. Cela est absurde.

Exercice 3.5.13

1. Les orbites sont symétriques par rapport à l'axe des y. Il n'y a que $(0,0)$ comme point d'équilibre. Il est un centre pour le système linéarisé. Par la symétrie il est un centre pour le système de départ.

2. Il est facile de voir que $(c_0 + t, -1)$ est une solution du système.
3. (a) $y'(x) = -x\frac{1+y}{y} < 0$ dans I.
   (b) Supposons que l'orbite ait une asymptote verticale. Alors $x(t) \to x_0 > 0$ et $y(t) \to -\infty$ pour $t \to T^*$. Ce cas est impossible, car $\frac{x'}{y'} = \frac{-y}{x(1+y)} \to -\frac{1}{x_0}$ et $\frac{x}{y} \to 0$.
   Supposons que l'orbite ait une asymptote horizontale. Alors $x(t) \to +\infty$ et $y(t) \to y_0 < -1$ pour $t \to T^*$. Ce cas est impossible, car $\frac{y'}{x'} \to -\infty$ et $\frac{y}{x} \to 0$.
4. Dans II x' et y' sont positifs et donc x et y sont monotones. Supposons que l'orbite reste dans II ; alors $y(t)$ est borné. Si $T^* < +\infty$, alors $x(t) \to +\infty$. Alors $\frac{y(t)}{x(t)} \to 0$; d'autre part $\frac{y'(t)}{x'(t)} = -\frac{x(t)(1+y(t))}{y(t)} \to \infty$. Cela est une contradiction.
   Si $T^* = +\infty$, par la monotonie $(x(t), y(t))$ converge vers un point d'équilibre, ce qui est une contradiction.
5. Si l'orbite touche y en temps infini, alors elle converge vers un point d'équilibre : impossible. L'autre possibilité est que pour tout $t \in [t_0, T^*[$ $x(t)$ reste positif. Par la monotonie, $x \to \alpha$, $y(t) \to \beta$. Cela est impossibile, car $|x(t)| + |y(t)|$ doit tendre vers ∞, sinon on pourrait prolonger cette solution maximale au delà de T^*. Alors $y(t) \to +\infty$ et donc $\frac{x}{y} \to \infty$. On arrive à une contraddiction en étudiant $\frac{x'}{y'}$.
   Une trajectoire qui part de $(0, y_0)$ avec $y_0 \in (-1, 0)$ part de II, arrive en III et touche y avec $y > 0$. Par la symétrie on a une courbe fermée.

Exercice 3.5.14

1. 0 est le seul point d'equilibre.
   Les trajectoires sont symétriques par rapport a l'axe des x.
   Si $(x(t_0), y(t_0)) = (0, y_0)$, alors $(x(t), y(t)) = (0, \frac{1}{t-t_0+\frac{1}{y_0}})$ est une solution.
2. On a $x' > 0$ dans cette région et donc les trajectoires sont les graphes des solutions de
$$y' = -\frac{1}{y} + \frac{y}{x}$$
   On peut vérifier que $y = \sqrt{2x}$ est une solution de l'équation précédente.
3. Dans I $x', y' < 0$ et donc x, y reste dans le compact delimité par les droites $x = x_0, y = y_0$, la parabole $x^2 = y$ et l'axe des y. La solution a donc un temps de vie futur infini ; par monotonie elle doit converger vers le seul point critique 0.
   Soit $u(t) = \frac{y(t)}{x(t)}$. Dans I on a $u'(t) = 1$ ce qui implique que $u(t) = \frac{y(t)}{x(t)} = t - t_0 + \frac{y_0}{x_0}$ pour $t \in (T_*, t_0]$. Puisque $\frac{y(t)}{x(t)} > 0$ on a $t > t_0 - \frac{y_0}{x_0}$, ce qui implique que le temps de vie passé de la trajectoire est fini. Cela implique aussi que $x(t)$ ou $y(t)$ converge vers ∞. Les deux admettent une limite.
   On a $\lim\limits_{t\to T_*} u(t) = \lim\limits_{t\to T_*} [u(t_0) + t]$ finie. Le systeme implique que
$$\lim_{t\to T_*} u(t) = \lim_{t\to T_*} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t\to T_*} \left[\frac{y'(t)}{x'(t)} + \frac{1}{y(t)}\right]$$
   Encore grâce au systeme $\lim\limits_{t\to T_*} \frac{y'(t)}{x'(t)} = \lim\limits_{t\to T_*} \left[-\frac{1}{y(t)} + \frac{y(t)}{x(t)}\right]$ existe car $\lim\limits_{t\to T_*} \frac{1}{y(t)}$ existe par monotonie de y et $\lim\limits_{t\to T_*} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim\limits_{t\to T_*} u(t)$. Le théoreme de L'Hôpital nous dit que
$$\lim_{t\to T_*} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t\to T_*} \frac{y'(t)}{x'(t)}$$
   et donc $\lim\limits_{t\to T_*} \frac{1}{y(t)} = 0$ ce qui nous dit que $y(t) \to +\infty$. Par conséquent $x(t) \to +\infty$.
4. Si la trajectoire ne rencontre pas la parabole elle reste dans le compact $\{x \leq x_0, y \geq y_0, y \leq \sqrt{x}\}$ qui ne contient aucun point critique. Par monotonie elle doit alors sortir et converger vers $(0, 0)$.
   Il est facile de voir que $\frac{dy}{dx} \leq 0$. Supposons que la trajectoire reste dans $\{y > 0\}$: alors $y(t)$ est borné. Il y a deux possibilités : x est majoré ou non. Si $x(t)$ est majoré, $x(t)$ et $y(t)$ ont un temps de vie infini et par monotonie $x(t) \to l$ et $y(t) \to l'$ pour $t \to +\infty$. Par conséquent (l, l') est un point d'équilibre, ce qui est absurde. Donc il nous reste la seule possibilité que $x \to +\infty$ sur la trajectoire. Mais alors $y/x \to 0$ et $y' \neq 0$: absurde.

5. Dans III on a $y' \leq -y^2$. Si on integre sur (T_*, t_0) on a que y a un temps de vie passé fini et elle converge vers ∞ pour $t \to T_*$. Si on calcule $u'(t)$ ($u = \frac{y}{x}$) on a $u' = 1$; cela implique que $x(t) \to -\infty$. Si la solution ne croise pas l'axe des x alors elle converge vers 0. Mais on a vu que $\frac{y(t)}{x(t)} = t - t_0 + \frac{y_0}{x_0}$. Puisque $\frac{y}{x} < 0$ on a t borné, ce qui implique que le temps de vie futur est fini. Alors la trajectoire croise l'axe des x.

Exercice 3.5.15

1. $x' = 2yx - x^3$, $y' = -x^2 - y^5$: définir $V(x,y) = y^2 + \frac{1}{2}x^2$
2. $x' = 2yx + x^3$, $y' = x^2 - y^5$: définir $V(x,y) = -y^2 + \frac{1}{2}x^2$
3. $x' = y$, $y' = -x^n$: définir $V(x,y) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + \frac{y^2}{2}$ si n est impair. Si n est pair, définir $V(x,y) = \frac{x^{n+1}+y^{n+1}}{n+1}$
4. $x' = -y^3$, $y' = x^3$: définir $V(x,y) = x^4 + y^4$
5. $x' = -y - x^3 - xy^2$, $y' = x - y^3 - yx^2$: définir $V(x,y) = x^2 + y^2$
6. $x' = -y + x^3 + xy^2$, $y' = x + y^3 + yx^2$: définir $V(x,y) = x^2 + y^2$

Bibliographie

– notes du cours Equations différentielles ordinaires de Aziz Alaoui
– notes du cours Equations différentielles ordinaires de Nathalie Verdière
– Arnol'd, *Ordinary differential equations*
– Braun, *Differential equations and applications*
– Coddington et Carlson, *Linear differential equations*
– Coddington et Lewinson, *Theory of differential equations*
– Demailly, *Analyse numérique et équations différentielles*
– Perko, *Differential Equations and Dynamical Systems*
– Verhulst, *Nonlinear differential equations and dynamical systems*
– Zuily et Queffélec, *Analyse pour l'agrégation*