Département de mathématiques, Université de Jijel
3ème année Mathématiques

SÉRIE DE TD N 02
ESPACES VECTORIELS NORMÉS

Exercice 1: Espaces de suites: On définit

$$l^{\infty} = \{(u_n)_{n\in\mathbf{N}} : \sup\{|u_n|, n \in \mathbf{N}\} < +\infty\} \text{ muni de } \|(u_n)_{n\in\mathbf{N}}\|_{\infty} = \sup\{|u_n|, n \in \mathbf{N}\}$$

$$l^1 = \{(u_n)_{n\in\mathbf{N}} : \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| < +\infty\}, \text{ muni de } \|(u_n)_{n\in\mathbf{N}}\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$$

$$l^2 = \{(u_n)_{n\in\mathbf{N}} : \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^2 < +\infty\}, \text{ muni de } \|(u_n)_{n\in\mathbf{N}}\|_2 = (\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Montrer que $(l^{\infty}, \|(u_n)_{n\in\mathbf{N}}\|_{\infty})$; $(l^1, \|(u_n)_{n\in\mathbf{N}}\|_1)$ et $(l^2, \|(u_n)_{n\in\mathbf{N}}\|_2)$ sont des espaces de Banach.

Exercice 2: Théorème des fermés emboités:
1. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach, et $(F_n)_n$ une suite de fermés emboités non vides dont le diamètre $diam(F_n) = sup\{\|x - y\|; x, y \in F_n\}$ tend vers 0. Montrer que $\bigcap_{n\geq 0} F_n$ est un singleton.
2. Soit $F_n = \{u \in l^{\infty} : \|u\|_{\infty} = 1 \text{ et } u_0 = \cdots = u_n = 0\}$. Vérifier que les F_n forment une suite de fermés emboités tous non vides d'un espace de Banach, dont l'intersection est vide. Quel est le problème ?

Exercice 3: Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé complet, et soit A une partie de E non vide et différente de E. Montrer que la frontière de $A, Fr(A)$, est non vide.

Exercice 4: Théorème du point fixe:
1. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé complet (non vide), et $T : E \to E$ une application k-contractante avec $k \in]0, 1[$, i.e. pour tous $x, y \in E$, $\|T(x) - T(y)\| \leq k\|x - y\|$.
Montrer que T admet un unique point fixe, en considérant pour $a \in E$ quelconque, la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par récurrence par $u_{n+1} = T(u_n)$, et $u_0 = a$.
2. Application: montrer qu'il existe une unique solution $y \in C^1([0, 1]; \mathbf{R})$ solution du problème de Cauchy

$$y'(x) = sin(xy(x)) \; \forall x \in [0, 1], \quad \text{et} \;\; y(0) = 1.$$