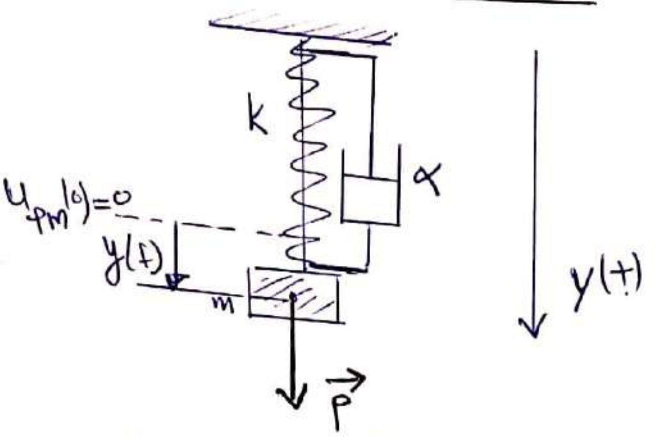
Ex1:

Système (a): PFD



à l'équilibre du système:

$$\sum \vec{F}_{ex/m} = \vec{0}$$

$$\vec{P} + \vec{F}_{r_0} = \vec{0}$$

$/y$: $mg - k(l_{éq} - l_0) = 0$

$$\Rightarrow mg = k(l_{éq} - l_0).$$

on pose: $y_0 = l_{éq} - l_0$

la déformation du ressort à l'équilibre.

Soit donc:

$mg = ky_0$ est la condition d'équilibre du système.

en mouvement du système:

$$\sum \vec{F}_{ext/m} = m\vec{a}$$

$$\vec{P} + \vec{F}_r + \vec{f}_f = m\vec{a}$$

$$mg - k[y_0 + (l - l_{éq})] - \alpha\dot{y} = m\ddot{y}$$

$$mg - k(y_0 + y) - \alpha\dot{y} = m\ddot{y}$$

$$\underbrace{(mg - ky_0)}_{0} - ky - \alpha\dot{y} = m\ddot{y}$$

$$\Rightarrow \ddot{y} + \frac{\alpha}{m}\dot{y} + \frac{k}{m}y = 0$$

équation de forme:

$$\ddot{y} + 2\delta\dot{y} + \omega_0^2 y = 0$$

Avec: $\begin{cases} \delta = \frac{\alpha}{2m} \\ \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \end{cases}$

sont: le facteur d'amortissement et la pulsation propre des oscillations libres non amorties du système, respectivement.

Méthode de Lagrange.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial L}{\partial y} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{y}} \quad \cdots (1)$$

$$L = T - U_p$$

$$D = \frac{1}{2}\alpha v_{amort}^2$$

CS Scanné avec CamScanner

$$T = T_{trans} = \frac{1}{2} m v_m^2$$

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{y})^2$$

$$U_p = U_{ressort} + U_{pmasse}$$

$$U_p = \frac{1}{2} k (y_0 + y)^2 - mgy$$

$$D = \frac{1}{2} \alpha v_{amort}^2 = \frac{1}{2} \alpha \dot{y}^2$$

$$v_{amort} = v_m = \dot{y} = \left(\frac{dy}{dt}\right)$$

$$L = \frac{1}{2} m \dot{y}^2 - \frac{1}{2} k (y_0 + y)^2 + mgy$$

est le Lagrangien du système

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) = m\dot{y} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) = m\ddot{y}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = -k(y_0 + y) + mg$$

$$= \underbrace{(-ky_0 + mg)}_{0} - ky$$

condition d'équilibre

$$\left(\frac{\partial L}{\partial y}\right) = -ky$$

$$\left(\frac{\partial D}{\partial \dot{y}}\right) = \alpha \dot{y}$$

Substituons dans l'équation de Lagrange ; (1)

$$(1) \Rightarrow m\ddot{y} + ky = -\alpha \dot{y}$$

$$\Rightarrow m\ddot{y} + \alpha\dot{y} + ky = 0$$

ou

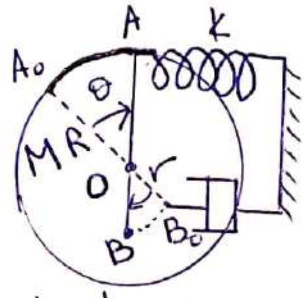
$$\ddot{y} + \frac{\alpha}{m}\dot{y} + \frac{k}{m} y = 0$$

ou bien :

$$\ddot{y} + 2\delta\dot{y} + \omega_0^2 y = 0$$

qui est bien la même équation précédente.

Système (b) :



Équation de Lagrange des systèmes amortis s'écrit :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} \quad \ldots (*)$$

ici le mouvement est un mouvement de rotation, c'est pour ça on utilise la coordonnée rotationnelle θ.

$T = T_{rotation} = \frac{1}{2} J_{M/O} \dot{\theta}^2$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} M R^2\right)\dot{\theta}^2$

$J_{M/O} = \frac{1}{2} M R^2$ est le moment d'inertie du disque par rapport au point O.

$U_p = U_{pM} + U_{pr} = 0 + U_{pr}$

$U_p = \frac{1}{2} k d^2 \mid d = \overset{\frown}{A_0A} = R\theta$

$U_p = \frac{1}{2} k R^2 \theta^2$

$L = T - U = \frac{1}{4} M R^2 \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} k R^2 \theta^2$

$D = \frac{1}{2} \alpha V_{amort}^2$

$V_{amort} = \frac{d}{dt}(l_{amort}) = \frac{d}{dt}\left(\overset{\frown}{B_0B}\right)$

$= \frac{d}{dt}(r\theta) = r\dot{\theta}$

$D = \frac{1}{2} \alpha r^2 \dot{\theta}^2$

$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{1}{2} M R^2 \dot{\theta} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{M}{2} R^2 \ddot{\theta}$

$\left(\frac{\partial L}{\partial \theta}\right) = -k R^2 \theta$

$\left(\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}}\right) = \alpha r^2 \dot{\theta}$

substituons dans l'équation (*)

$\frac{M}{2} R^2 \ddot{\theta} + k R^2 \theta = -\alpha r^2 \dot{\theta}$

$\Rightarrow \ddot{\theta} + \left(\frac{2kR^2}{MR^2}\right)\theta = -\frac{2\alpha r^2}{MR^2}\dot{\theta}$

ou

$\ddot{\theta} + 2\left(\frac{\alpha r^2}{MR^2}\right)\dot{\theta} + \left(\frac{2k}{M}\right)\theta = 0$

équation de forme :

$\ddot{\theta} + 2\delta\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$

Avec : $\begin{cases} \delta = \frac{\alpha r^2}{MR^2} \\ \omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{M}} \end{cases}$

<u>Nature du mouvement</u> :

pour savoir la nature de mouvement, il faut comparer les deux paramètres ; δ et ω_0

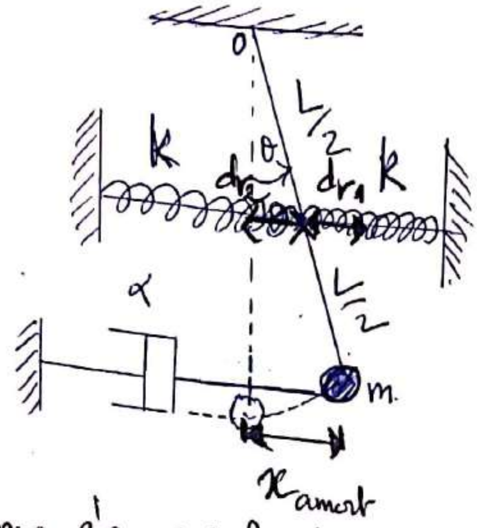
<u>A.N</u> : $\omega_0 = \sqrt{\frac{2 \times 2}{1}} = 2\ rad/s$

$\delta = \frac{8}{1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{8}{4} = 2\ (s^{-1})$

$\delta = \omega_0 \Leftrightarrow (\Delta' = 0)$, donc le mouvement est en régime critique.

Scanné avec CamScanner

EX2 :

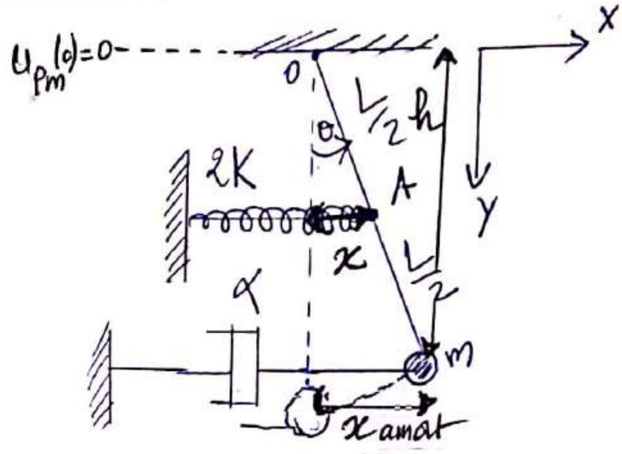


Système équivalent :

Les deux ressorts identiques ($k_1 = k_2 = k$) sont liés en opposition, donc, on peut les remplacer par un ressort équivalent de raideur $K_{éq} = k + k = 2k$.

• Le ressort à droite se comprime d'une distance $dr_1 = x$, l'autre à gauche s'allonge de la même distance $dr_2 = x$.

Soit donc le système équivalent suivant :



1°)- Le Lagrangien L

$$L = T - U_p$$

$$T = \frac{1}{2} m v_m^2 \quad , \quad \vec{v}_m = \frac{d\vec{om}}{dt}$$

$$\vec{om} = L \sin\theta \, \vec{i} + L \cos\theta \, \vec{j}$$

$$\vec{v} = L\dot{\theta} \cos\theta \, \vec{i} - L\dot{\theta} \sin\theta \, \vec{j}$$

$$= L\dot{\theta} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ -\sin\theta \end{pmatrix}$$

$$v = \|\vec{v}\| = L\dot{\theta} \sqrt{\underbrace{\cos\theta^2 + \sin\theta^2}_{1}}$$

$$v = L\dot{\theta}$$

$$T = \frac{1}{2} m L^2 \dot{\theta}^2$$

$$U_p = U_{pm} + U_{presort}$$

$$U_{pm} = -mgh \;/\; h = L\cos\theta$$

$$U_{pm} = -mgL\cos\theta$$

$$U_{pr} = \frac{1}{2}(2K)x^2 = K\left(\frac{L}{2}\sin\theta\right)^2$$

Scanné avec CamScanner

$$U_p = k\left(\frac{L}{2}\sin\theta\right)^2 - mgL\cos\theta$$

pour des petites oscillations ($\theta \ll$), $\sin\theta \simeq \theta$, $\cos\theta \simeq 1-\frac{\theta^2}{2}$

$$U_p \simeq \frac{kL^2}{4}\theta^2 - mgL\left(1-\frac{\theta^2}{2}\right)$$

$$U_p = \frac{1}{2}\left(\frac{k}{2}L^2 + mgL\right)\theta^2 - mgL$$

Donc :

$$L = \frac{1}{2}mL^2\dot\theta^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{k}{2}L^2 + mgL\right)\theta^2 + mgL$$

2) L'équation différentielle du mouvement étant donnée par l'équation de Lagrange.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot\theta}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta} = -\frac{\partial D}{\partial\dot\theta}$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial\dot\theta}\right) = mL^2\dot\theta \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot\theta}\right) = mL^2\ddot\theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial\theta} = -\left(\frac{k}{2}L^2 + mgL\right)\theta$$

$$D = \frac{1}{2}\alpha v_{amort}^2 \quad \Big/ \quad v_{amort} = \frac{dx_{amort}}{dt} = \frac{d}{dt}(L\sin\theta) \simeq \frac{d}{dt}(L\theta) = L\dot\theta$$

$D = \frac{1}{2}\alpha L^2\dot\theta^2$ est la fonction de dissipation de l'énergie du système.

$$\frac{\partial D}{\partial\dot\theta} = \alpha L^2\dot\theta$$

Substituons dans l'équation de Lagrange ;

$$mL^2\ddot\theta + \left(\frac{k}{2}L^2 + mgL\right)\theta = -\alpha L^2\dot\theta$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot\theta + \frac{\alpha}{m}\dot\theta + \left(\frac{k}{2m} + \frac{g}{L}\right)\theta = 0} \quad (*)$$

3) équation de forme :

$$\ddot\theta + 2\delta\dot\theta + \omega_0^2\theta = 0$$

Avec : $\begin{cases} \delta = \dfrac{\alpha}{2m} \\ \omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{2m} + \dfrac{g}{L}} \end{cases}$

pulsation propre des oscillations libres non amorties du système

4°). Dans le cas de faible amortissement ($\delta < \omega_0$), l'équation (*) admet une solution de forme

Scanné avec CamScanner

$$\theta(t) = A e^{-\delta t} \cos(\omega_a t + \phi) \text{----} (**)$$

avec :

$Ae^{-\delta t}$: est l'amplitude modulée du mouvement pseudo-périodique

ω_A : est la pseudo-pulsation des oscillations amorties du système définie par :

$$\omega_A = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

$$\omega_A = \sqrt{\frac{K}{2m} + \frac{g}{L} - \frac{\alpha^2}{4m^2}}$$

ϕ : est la phase initiale.

A et ϕ sont déterminés à l'aide des conditions initiales :

$$\begin{cases} t=0, \ \theta(0) = 0 \\ t=0, \ \dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0 \end{cases}$$

1ère condition initiale :

$t=0$, $\theta(0)=0$, et de $(**)$

$\theta(0) = A\cos\phi$

Donc :

$$A\cos\phi = 0 \Leftrightarrow \phi = \pm \pi/2$$

pour applique la 2ème condition initiale, il faut trouver l'expression de la vitesse instantanée du système ;

$$\dot{\theta}(t) = \frac{d\theta(t)}{dt}$$

$$= A\left[-\delta e^{-\delta t}\cos(\omega_a t + \phi) - e^{-\delta t} \times \omega_a \times \sin(\omega_a t + \phi)\right]$$

$$\dot{\theta}(t) = -A e^{-\delta t}\left[\delta\cos(\omega_a t + \phi) + \omega_a \sin(\omega_a t + \phi)\right]$$

à $t=0$, $\dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0$

$$\dot{\theta}(0) = -A\left[\delta\cos\phi + \omega_a \sin\phi\right]$$

Donc :

$$-A\left[\delta\cos\phi + \omega_a\sin\phi\right] = \dot{\theta}_0 \text{----} (***)$$

pour $\phi = \pi/2$

$$-A\left[\delta \times 0 + \omega_a\right] = \dot{\theta}_0$$

$\Rightarrow A = \frac{-\dot{\theta}_0}{\omega_a} < 0$, résultat refusé physiquement, car $A > 0$

donc on admet que $\phi = -\pi/2$

CS Scanné avec CamScanner

ce qui conduit à :

$$-A\left[\delta \times 0 - \omega_a\right] = \dot{\theta}_0$$

$$\Rightarrow \boxed{A = \frac{\dot{\theta}_0}{\omega_a}}$$

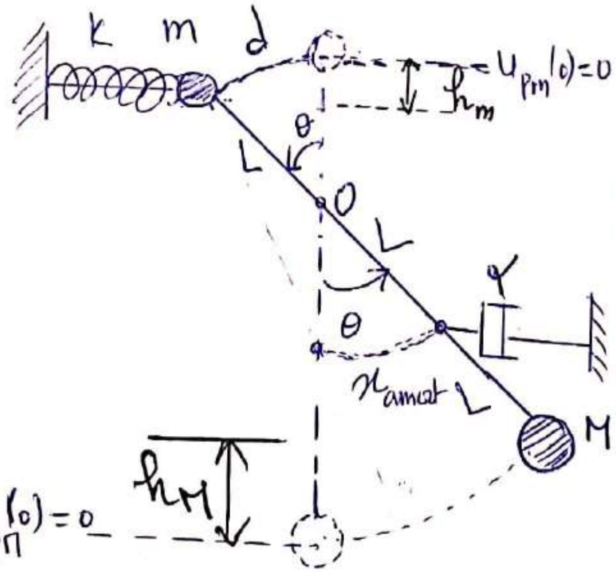
Soit finalement le déplacement angulaire instantané du système :

$$\theta(t) = \left(\frac{\dot{\theta}_0}{\omega_a}\right) e^{-\delta t} \cos\left(\omega_a t - \pi/2\right)$$

ou

$$\theta(t) = \left(\frac{\dot{\theta}_0}{\omega_a}\right) e^{-\delta t} \sin \omega_a t$$

Ex 3 :



1)- T, U_p et D du système ;

$$T = \frac{1}{2} J_{m/O}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} J_{M/O}\dot{\theta}^2$$

T = Trotation

$$J_{m/O} = mL^2$$

$$J_{M/O} = M(2L)^2 = 4ML^2$$

$$T = \frac{1}{2} mL^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\left(4ML^2\right)\dot{\theta}^2$$

$$T = \frac{1}{2} mL^2\dot{\theta}^2 + 2ML^2\dot{\theta}^2 = \left(\frac{1}{2}m + 2M\right)L^2\dot{\theta}^2$$

$$U_p = U_{pr} + U_{pm} + U_{pM}$$

- $U_{pr} = \frac{1}{2} k d^2 = \frac{1}{2} K (L\theta)^2$

$$U_{pr} = \frac{1}{2} K L^2 \theta^2$$

- $U_{pm} = -mg h_m$

$$h_m = L - L\cos\theta = L(1-\cos\theta)$$

$$U_{pm} = -mgL(1-\cos\theta)$$

$$U_{pM} = +Mg h_M$$

$$h_M = 2L - 2L\cos\theta = 2L(1-\cos\theta)$$

$$U_{pM} = 2MgL(1-\cos\theta)$$

donc :

$$U_p = \frac{1}{2} KL^2\theta^2 + 2MgL(1-\cos\theta) - mgL(1-\cos\theta)$$

CS Scanné avec CamScanner

$$U_p = \frac{1}{2}KL^2\theta^2 + gL(1-\cos\theta)(2M-m)$$

pour de faibles amplitudes:

$$\cos\theta \simeq 1 - \frac{\theta^2}{2}$$

$$U_p \simeq \frac{1}{2}KL^2\theta^2 + g\frac{L}{2}(2M-m)\theta^2$$

$$U_p = \frac{\theta^2}{2}\left[KL^2 + gL(2M-m)\right]$$

- $D = \frac{1}{2}\alpha v_{amort}^2$

$$v_{amort} = \frac{d}{dt}(x_{amort}) = \frac{d}{dt}(L\theta) = L\dot{\theta}$$

$$D = \frac{1}{2}\alpha L^2\dot{\theta}^2$$

2/- Le Lagrangien ou L:

$$L = T - U$$

$$L = \left(\frac{1}{2}m + 2M\right)L^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}\left[KL^2 + gL(2M-m)\right]\theta^2$$

Équation du mouvement

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta} = -\frac{\partial D}{\partial\dot{\theta}} \quad \text{--- (1)}$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) = 2\left(\frac{1}{2}m + 2M\right)L^2\dot{\theta} \Rightarrow$$

- $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) = (m + 4M)L^2\ddot{\theta}$
- $\left(\frac{\partial L}{\partial\theta}\right) = -\left[KL^2 + gL(2M-m)\right]\theta$
- $\frac{\partial D}{\partial\dot{\theta}} = \alpha L^2\dot{\theta}$

(1) $\Leftrightarrow$

$$(4M+m)L^2\ddot{\theta} + \left[KL^2 + gL(2M-m)\right]\theta = -\alpha L^2\dot{\theta}$$

ou.

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{\alpha}{4M+m}\right)\dot{\theta} + \theta\left[\frac{K}{4M+m} + \frac{g}{L}\frac{(2M-m)}{(4M+m)}\right] = 0$$

équation de forme:

$$\ddot{\theta} + 2\delta\dot{\theta} + \omega_0^2 = 0$$

Avec:

$$\delta = \frac{\alpha}{8M+2m} = \frac{\alpha}{2(4M+m)}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{4M+m} + \frac{g}{L}\frac{(2M-m)}{(4M+m)}}$$

3/- Nature de mvt:

Calculons les valeurs de δ et ω_0 et faisons les comparer

Scanné avec CamScanner

La suite de TD N°3 (9/9)

A.N :

$$\delta = \frac{\alpha}{2(4M+m)} = \frac{54}{2(4\times 2+1)}$$

$$\delta = \frac{54}{18} = \frac{6}{2} = 3\ (s^{-1})$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{5}{4\times 2+1} + \frac{10}{1}\left(\frac{2\times 2-1}{4\times 2+1}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{5}{9} + \frac{10}{3}} = 1{,}97\ rad/s$$

$$\omega_0 = 1{,}97\ rad/s$$

$\delta > \omega_0$ ($\Delta' > 0$)

le mouvement est donc apériodique et le système n'oscille pas.

- pour qu'il y ait oscillation il faut que : $\delta < \omega_0$, ($\Delta' < 0$)

$$\Rightarrow \frac{\alpha}{2(4M+m)} < \sqrt{\frac{K}{4M+m} + \frac{g}{L}\frac{(2M-m)}{(4M+m)}}$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha^2}{4(4M+m)^2} < \frac{K}{4M+m} + \frac{g}{L}\frac{(2M-m)}{(4M+m)}$$

$$\Rightarrow \alpha^2 < 4K(4M+m) + 4\frac{g}{L}(2M-m)(4M+m)$$

$$\Rightarrow \alpha^2 < 4(4M+m)\left[K + \frac{g}{L}(2M-m)\right]$$

$$\Rightarrow \alpha < 2\sqrt{(4M+m)\left[K+\frac{g}{L}(2M-m)\right]}$$

A.N :

$$\alpha < 6\sqrt{35} \Rightarrow \alpha < 35{,}5$$

Donc, pour que le système puisse osciller, il faut que α ne doit pas dépasser $35{,}5\ N.s/m$

$$\alpha_{max} = 35{,}5\ N.s/m$$

5) - pour $\alpha = 9\ N.s/m$, $\delta = 0{,}5\ (s^{-1})$

le temps de relaxation τ vérifie l'égalité :

$$Ae^{-\delta(t+\tau)} = \frac{1}{5}Ae^{-\delta t}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{5} = e^{-\delta\tau}$$

$$\Rightarrow -\ln 5 = -\delta\tau \Rightarrow$$

$$\tau = \frac{1}{\delta}\ln 5 \simeq 3{,}22\ (s)$$

CS Scanné avec CamScanner