

# TP N°1 : Théorème de Bernoulli

## 1. Objectif

Etude de la validité de l'équation de Bernoulli dans un écoulement stationnaire de l'eau dans **un canal convergent-divergent**.

## 2. Théorie

### 2.1 L'équation de Bernoulli

L'équation de Bernoulli représente la conservation de l'énergie mécanique pour un écoulement stationnaire, incompressible sans frottement :

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g}$$

Ou

$p$  : pression statique détectée au côté du trou,

$v$  : vitesse du fluide,

$z$  : élévation verticale de fluide,

$z_1 = z_2$  pour un tube horizontal,

L'équation peut être dérivée de l'équation d'Euler par intégration et elle peut être aussi dérivée du principe de conservation d'énergie.

### 2.2 Autres formes de l'équation de Bernoulli

Si le tube est horizontal on a  $z_1 = z_2$  Ainsi :

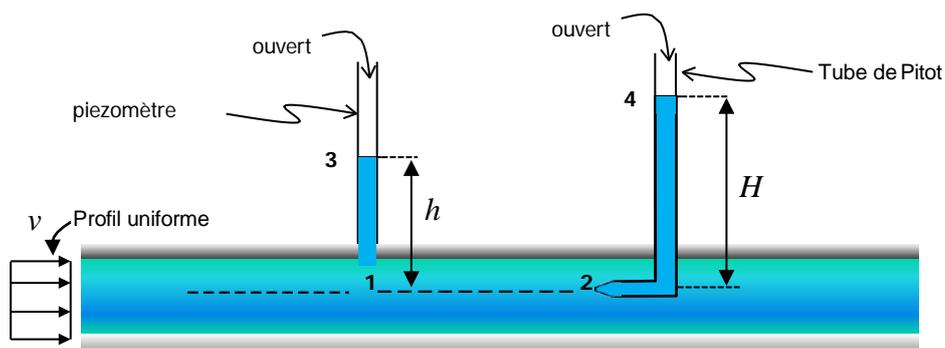
$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g}$$

$$\frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} = H$$

$H$  : hauteur total (stagnation)

### 2.3 Sonde de Pitot

#### a) mesure de la vitesse du liquide (eau)



Le point 2 correspond à l'entrée du tube de Pitot où la vitesse est nul (point d'arrêt) Au point 1 on a la vitesse  $v=v_1$

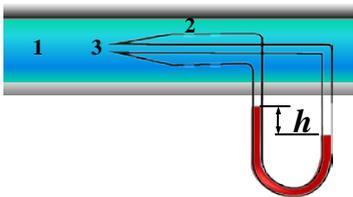
- Pour mesurer la **pression statique au point 1**, on utilise une prise de pression (piezomètre). Sachant que  $p + \rho gz = cte$  entre les points 1 et 3, on a :

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= p_3 + \rho gh \\ p_1 &= p_{atm} + \rho gh \end{aligned} \right\} \Rightarrow p_{1man} = \rho gh$$

- Pour mesurer la **pression dynamique au point 2**, donc la vitesse, on utilise une prise qui permet l'obtention de la pression d'arrêt (tube de Pitot). Sachant d'une part que

$$\left. \begin{aligned} p_2 &= p_1 + \frac{\rho v_2^2}{2} \\ p_2 &= p_1 + \rho g(H-h) \end{aligned} \right\} \Rightarrow v_2 = \sqrt{2g(H-h)}$$

### b) mesure de la vitesse du gaz (air)



$$\left. \begin{aligned} p_3 &= p_2 + \frac{\rho v_1^2}{2} \\ p_2 &\approx p_1 \\ p_3 &= p_2 + \rho_{man} gh \end{aligned} \right\} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2\rho_{man} gh}{\rho}}$$

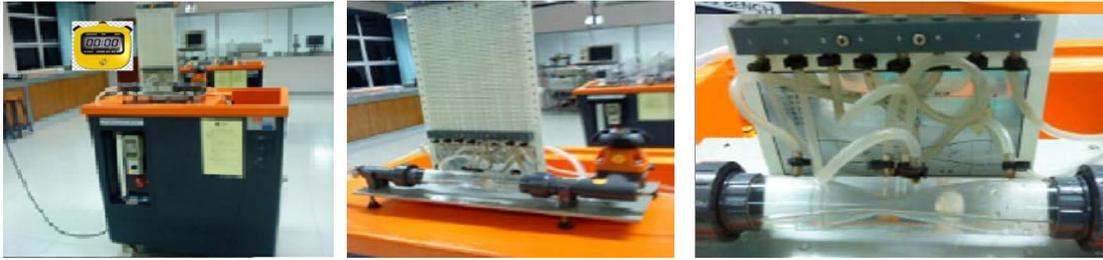
avec  $\rho_{man}$  : densité du liquide (mercure)

### 3. Méthode et appareillage

Elle consiste à mesurer les débits et en même temps les cimes (point le plus hauts) des pressions statique et totale dans un canal rigide convergent-divergent de géométrie conique.

Pour réaliser l'expérience du théorème de Bernoulli, on utilise l'appareil **ARMFIELD FI-15** qui est composée des éléments suivants :

1. Un banc hydraulique qui permet de mesurer le débit d'eau en fonction du volume
2. Un chronomètre utilisé pour mesurer le temps de remplissage d'un volume d'eau.
3. L'appareil de test de Bernoulli est composé d'un canal convergent-divergent connecter a 8 tubes verticaux.



### 3.1. Donnée technique

Les dimensions suivant de l'équipement seront utilisées dans vos calculs. Ces valeurs peuvent être vérifiées en tant que partie de la procédure expérimentale et seront remplacées s'il y a lieu par vos propres mesures. Les dimensions du tube sont détaillées comme suit :

Tableau1 : Dimensions du tube de Venturi

Position	Manomètre légende	Diamètre (mm)
A	h1	25,0
B	h2	13,9
C	h3	11,8
D	h4	10,7
E	h5	10,0
F	h6	25,0

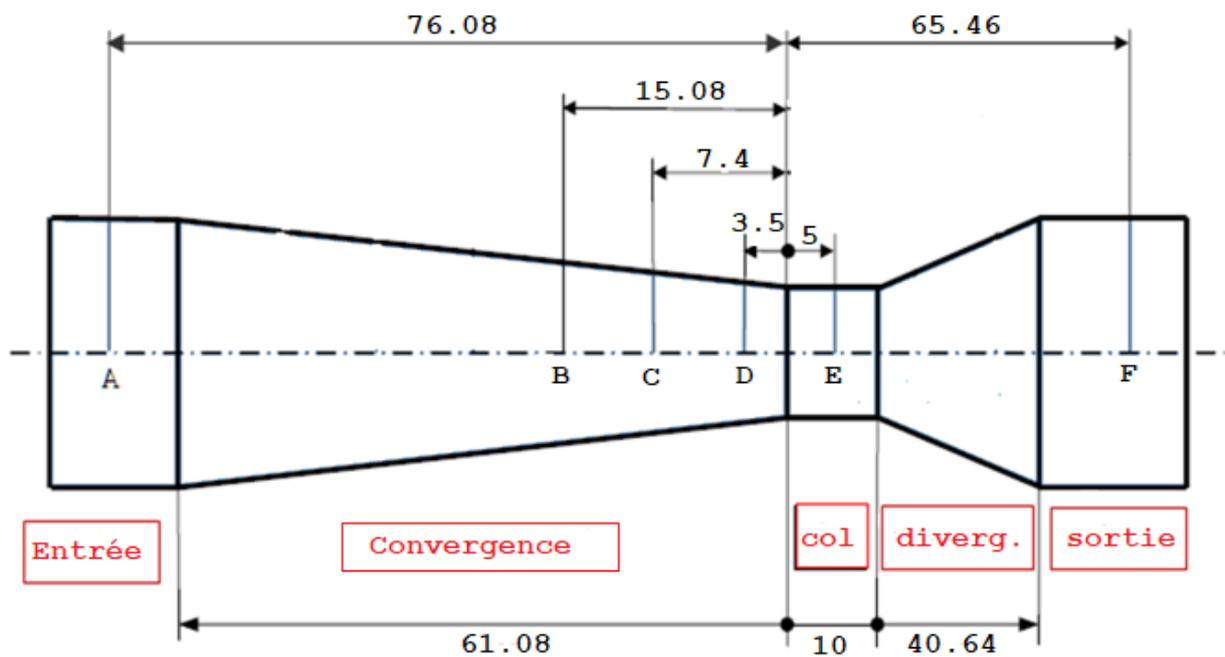


Figure1 : Tube de Venturi (Convergence -Divergence)

Avec l'appareil **ARMFIELD FI-15**, la cime de la pression statique  $p$ , est mesurée en utilisant un manomètre, directement à côté du trou. Mais actuellement le manomètre mesure la cime de la pression statique,  $h$ , en mètres et qui est relie a  $p$  par la relation.

$$h = \frac{P}{\underbrace{\rho g}_{\text{cime de la pression Statique}}}$$

Ce qui permet l'écriture de l'équation de Bernoulli sous une autre forme :

Cime de la pression totale.

$$h_1 + \frac{v_1^2}{2g} = h_2 + \underbrace{\frac{v_2^2}{2g}}_{\text{cime de la pression dynamique}}$$

### 3.2 Mesure de la vitesse

La vitesse de l'écoulement est mesurée par le volume de l'écoulement,  $V_{vol}$ , sur une période,  $t$ .

on aura alors le flux volumique :  $Q = \frac{V_{vol}}{t}$

Ainsi la vitesse d'écoulement à travers une section,  $A$  est donnée par :  $v = \frac{Q}{A}$

### 3.3 Équation de continuité

Pour un fluide incompressible, l'équation de continuité impose que le débit et lui aussi conservé.

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \left[ m^3 / s \right]$$

## 4. installation de l'équipement

### 4-1. Niveau de l'appareillage.

Installer l'appareillage de l'équation de Bernoulli sur le banc hydraulique dont la base est horizontale ; Ceci est nécessaire pour une bonne lecture des hauteurs sur le manomètre.

### 4-2. Installer la direction de la section d'essai

Assurez-vous que la section d'essai à 14° de conicité et qu'elle converge dans le sens de l'écoulement.

### 4-3. Connecter l'alimentation et le refoulement de l'eau

Assurez-vous que le tube de sortie d'installation est positionné au-dessus du réservoir volumétrique dans le but de faciliter les prises chronométrées du volume.

Reliez l'alimentation de l'installation à l'approvisionnement du banc ; fermez la valve de banc et la soupape de commande d'écoulement d'ans l'appareillage et mettez en marche la pompe. Ouvrir graduellement la valve du banc pour remplir l'installation d'eau.

### 4-4. Purger les manomètres

Dans le but de purger les points de prise de pressions et les manomètres, fermez en même temps la valve du banc et la valve de contrôle d'écoulement de l'installation et ouvrez la vis

de purge d'air et enlevez le chapeau de la soupape à air adjacente. Reliez avec une longueur de tuyauterie la soupape à air au réservoir volumétrique. Maintenant, ouvrez la valve du banc et laissez l'écoulement traversé les manomètres pour purger tout l'air à l'intérieure ; puis, serrez la vis d'air et ouvrez en partie la soupape du banc et la soupape de commande d'écoulement du banc d'essai. Après, ouvrez la vis de purge d'air légèrement pour permettre à l'air de rentrer par les extrémités hautes des manomètres (vous devez ajuster les deux valves afin de réaliser ceci) ; resserrez la vis quand le niveau dans le manomètre atteint une taille commode. Le flux maximum sera déterminé par la nécessité d'avoir la lecture du maximum ( $h_1$ ) et du minimum ( $h_5$ ) sur le manomètre et à l'échelle.

## **5. Prise des mesures**

La lecture devrait être prise pour 3 débits, vous pouvez inverser la section d'essai afin de voir l'effet de la section convergente.

### **5-1. Réglage du débit**

Prenez le premier ensemble de lecture au débit maximum, puis réduisez le débit pour donner à ( $h_1-h_5$ ) une différence d'environ 50 mm Finalement, répétez le processus entier pour un autre débit. Essayez d'avoir ( $h_1-h_5$ ) approximativement la moitié de celle obtenue dans les deux essais précédents.

### **5-2. Lecture de la cime statique**

Prenez les lectures des manomètres ( $h_1-h_5$ ) quand le niveau est stable. Assurez- vous que toute la sonde de pression est rétractée de la section d'essai.

### **5-3. Collection du volume chronométré**

Vous devriez effectuer une collection chronométrée du volume, en utilisant le réservoir volumique, afin de déterminer le volume du débit. Ceci est réalisé en fermant la valve à bille et en mesurant (avec un chronomètre) le temps pris pour accumuler un volume connu de fluide dans le réservoir, qui est lu sur l'indicateur en verre. Vous devriez collecter le fluide pendant au moins une minute pour minimiser les erreurs de synchronisation. En plus, toute la sonde de pression devrait être rétractée de la section d'essai pendant ces mesures. Ecrivez les mesures du test et reprenez cette même mesure une autre fois pour la vérification.

### **5.4. Lecture de la distribution de la cime de pression totale**

Mesurer la distribution de la pression totale au niveau de la cime qui traversée la sonde.

### **5-5. Inverser la section d'essai**

Assurer que toutes les sondes de pression sont entièrement retirées de la section d'essai (ne pas retirer de leurs guides). Desserrer les deux raccords, retirer la section d'essai et l'inverser.

## 6. Experience

$H_i$  : sime totale

$h_i$  :sime statique

$v_{iB}$  :la vitesse de l'eau d'après l'équation de Bernoulli

$v_{iC}$ : la vitesse de l'eau d'après l'équation de continuité (conservation de la masse)

### 6.1 Experience 1: debit faible

Tableau2 : Résultats de la première expérience

Volume (L).....				Volume (m <sup>3</sup> ) .....		
temps (min).....				temps (s).....		
debit (L/min) .....				debit (m <sup>3</sup> /s) .....		
Position	Equation de Bernoulli			equation de Continuité		erreur
Diameter (mm)	$H_i$ (mm)	$h_i$ (mm)	$v_{iB} = \sqrt{2g(H_i - h_i)}$ (m/s)	$A_i = \pi D_i^2 / 4$ (m <sup>2</sup> )	$v_{iC} = Q / A_i$ (m/s)	$v_{iB} - v_{iC}$ (m/s)
A=25,0	$H_1=$	$h_1=$				
B=13,9	$H_2=$	$h_2=$				
C=11,8	$H_3=$	$h_3=$				
D=10,7	$H_4=$	$h_4=$				
E=10,0	$H_5=$	$h_5=$				

### 6.2 Experience 2: debit moyen

Tableau3 : Résultats de la deuxième expérience

Volume (L).....				Volume (m <sup>3</sup> ) .....		
temps (min).....				temps (s).....		
debit (L/min) .....				debit (m <sup>3</sup> /s) .....		
Position	Equation de Bernoulli			equation de Continuité		erreur
Diameter (mm)	$H_i$ (mm)	$h_i$ (mm)	$v_{iB} = \sqrt{2g(H_i - h_i)}$ (m/s)	$A_i = \pi D_i^2 / 4$ (m <sup>2</sup> )	$v_{iC} = Q / A_i$ (m/s)	$v_{iB} - v_{iC}$ (m/s)
A=25,0	$H_1=$	$h_1=$				
B=13,9	$H_2=$	$h_2=$				
C=11,8	$H_3=$	$h_3=$				
D=10,7	$H_4=$	$h_4=$				
E=10,0	$H_5=$	$h_5=$				

### 6.3 Experience 3: debit max

Tableau4 : Résultats de la troisième expérience

Volume (L).....			Volume (m <sup>3</sup> ) .....			
temps (min).....			temps (s).....			
debit (L/min) .....			debit (m <sup>3</sup> /s) .....			
Position	Equation de Bernoulli			equation de Continuité		erreur
Diameter (mm)	H <sub>i</sub> (mm)	h <sub>i</sub> (mm)	$v_{iB} = \sqrt{2g(H_i - h_i)}$ (m/s)	$A_i = \pi D_i^2 / 4$ (m <sup>2</sup> )	$v_{iC} = Q / A_i$ (m/s)	$v_{iB} - v_{iC}$ (m/s)
A=25,0	H <sub>1</sub> =	h <sub>1</sub> =				
B=13,9	H <sub>2</sub> =	h <sub>2</sub> =				
C=11,8	H <sub>3</sub> =	h <sub>3</sub> =				
D=10,7	H <sub>4</sub> =	h <sub>4</sub> =				
E=10,0	H <sub>5</sub> =	h <sub>5</sub> =				

### 7. Travail demandé

- Commenter la validité de l'équation de Bernoulli pour :
  - Écoulement dans le convergent
  - Écoulement dans le divergent
- Commenter les résultats obtenus avec justifications.
- Comparer et commenter la différence obtenue entre les deux méthodes utilisées

# Annexe

$1\text{L}/\text{min}=0,00001667\text{m}^3/\text{s}$  ,  $1\text{ ml} = 1\text{ cm}^3 = 1000\text{ mm}^3$

Table de conversion (unités françaises courantes)

Unités	$\text{m}^3/\text{s}$	$\text{m}^3/\text{min}$	$\text{m}^3/\text{h}$	$\text{m}^3/\text{jour}$	L/s	L/min	L/h	L/jour
1 $\text{m}^3/\text{s}$	1	60	3600	86400	1000	60 000	$3,6 \cdot 10^6$	$86,4 \cdot 10^6$
1 $\text{m}^3/\text{min}$	0,01667	1	60	1440	16.67	1000	60 000	1 440 000
1 $\text{m}^3/\text{h}$	$2,778 \cdot 10^{-4}$	0,01667	1	24	0,2778	16,67	1000	24 000
1 $\text{m}^3/\text{jour}$	$1,157 \cdot 10^{-5}$	$6,945 \cdot 10^{-4}$	0,04167	1	0,01157	0,06945	41,67	1000
1 L/s	0,001	0,06	3,6	86,4	1	60	3600	86400
1 L/min	$1,667 \cdot 10^{-5}$	0,001	0,06	1,44	0,01667	1	60	1440
1 L/h	$2,778 \cdot 10^{-7}$	$1,667 \cdot 10^{-5}$	0,001	0,024	$2,778 \cdot 10^{-4}$	0,01667	1	24
1 L/jour	$1,157 \cdot 10^{-8}$	$6,945 \cdot 10^{-7}$	$4,167 \cdot 10^{-5}$	1000	$1,157 \cdot 10^{-5}$	$6,945 \cdot 10^{-4}$	0,04167	1

Nota : sens de lecture > 1 unité colonne y = n fois unité colonne x > ex :  $1\text{ m}^3/\text{s} = 60\text{ m}^3/\text{mn}$  ou  $1000\text{ L/s}$ .  
[1 jour = 24 h = 1440 min = 86 400 s]

Unités	pascal (Pa)	1 hPa	1 MPa	bar (b)	atmosphère (atm*)	kgf/cm <sup>2</sup>	m CE	mm Hg (torr)
1 pascal (Pa)	1	$10^{-2}$	$10^{-6}$	$10^{-5}$	$9,8692 \cdot 10^{-6}$	$1,0197 \cdot 10^{-5}$	$1,0197 \cdot 10^{-4}$	$7,5006 \cdot 10^{-3}$
1 hPa	100	1	$10^{-4}$	$10^{-3}$	$9,8692 \cdot 10^{-4}$	$1,0197 \cdot 10^{-3}$	$1,0197 \cdot 10^{-2}$	0,75006
1 MPa	$10^6$	10000	1	10	9,8692	10,197	101,99	7506,1
1 bar (b)	100 000	1000	0,1	1	0,98692	1,019716	10,19716	750,06
1 atmosphère (atm*)	101 325	1013,25	0,10133	1,01325	1	1,03323	10,3323	760
1 kgf/cm <sup>2</sup>	98066,5	980,665	$9,806 \cdot 10^{-2}$	0,98067	0,96784	1	10	735,56
1 m CE **	9806,4	98,064	$9,8064 \cdot 10^{-3}$	$9,8064 \cdot 10^{-2}$	0,096781	$9,9997 \cdot 10^{-2}$	1	73,554
1 mm Hg (Torr)	133,322	1,3332	$1,3332 \cdot 10^{-4}$	$1,3332 \cdot 10^{-3}$	$1,31579 \cdot 10^{-3}$	$1,3595 \cdot 10^{-3}$	0,0135955	1

(\*) atmosphère physique dite "normale" - (\*\*) à  $T = 4^\circ\text{C}$  [277 K] - (\*) eau douce.