Solution de TD N° 01

Exercice 1

1°) Soit p désignant la proposition « l'enfant sait lire » et q désignant la proposition « l'enfant sait écrire ». Donner la traduction dans le langage courant des formules suivantes :

Formule	Traduction dans le langage courant
$p\wedge q$	l'enfant sait lire **et** écrire
$p\wedge(\neg q)$	l'enfant sait lire **mais** il **ne** sait **pas** écrire
$(p\rightarrow q)$	**Si** l'enfant sait écrire **alors** il sait lire
$(\neg p)\vee(\neg q)$	l'enfant **ne** sait **pas** lire **ou** il **ne** sait **pas** écrire
$(\neg p)\wedge(\neg q)$	l'enfant **ne** sait **pas** lire **et** il **ne** sait **pas** écrire

2°) Même question avec p la proposition « l'homme est mortel » et q désignant la proposition « l'homme est éternel » et les propositions :

Formule	Traduction dans le langage courant
$(p\vee q)$	L'Homme est mortel **ou** éternel
$(\neg p)\vee(\neg q)$	l'Homme **n'**est **pas** mortel, **ou** il **n'**est **pas** éternel
$\neg(p\wedge q)$	**Il est faux que** « l'Homme est mortel **et** éternel »
$p\wedge(\neg q)$	l'Homme est mortel **mais pas** éternel
$(p\rightarrow(\neg q))$	**Si** l'Homme est mortel **alors** il **n'**est **pas** éternel

Exercice 2

Soit p la proposition « X estime Y » et q la proposition « Y estime X ». Ecrire sous forme symbolique les phrases suivantes :

Phrase	Traduction en Logique Propositionnel
X estime Y mais Y ne lui rend pas son estime	$p\wedge\neg q$
X et Y s'estiment	$p\wedge q$
X et Y se détestent	$\neg p\wedge\neg q$
Y est estimé par X mais X est détesté par Y	$p\wedge\neg q$
X et Y ne se détestent ni l'un ni l'autre	$\neg p\wedge\neg q$

Exercice 3

En interprétant P par « je pars » , Q par « tu restes » et R par « il n'y a personne », traduisez les formules logiques suivantes en phrases du langage naturel :

$(P\wedge\neg Q)\rightarrow R$: si je pars et tu ne restes pas alors il n'y a personne
: si je pars et tu pars alors il n'y a personne

$(\neg P\vee\neg Q)\rightarrow\neg R$: si je ne pars pas et tu ne restes pas alors il y a quelqu'un
: si je reste et tu pars pas alors il y a quelqu'un

Exercice 4

Les expression suivantes sont elles bien formées ? Pourquoi ?

1) $((P\rightarrow Q)\vee(Q\rightarrow(\neg(\neg P))))$ FBF
2) 2) $((P)\vee(Q\wedge R))$ FBF
3) $(P_1\rightarrow((P_2\rightarrow Q)))$ FBF
4) 4) $(\neg(P\vee Q)\rightarrow\neg\neg Q)\ R$ n'est pas FBF

Exercice 5

Soit P, Q et R des propositions. Dans chacun des ces cas suivant ; les propositions citées sont elles la négation l'une de l'autre ? 0 : faux 1 : vraie

P	Q	non P	non Q	(P et Q)	(non P et non Q)	$(P\rightarrow Q)$	(non Q $\rightarrow$ non P)	(P ou Q)	(P et Q)
0	0	1	1	0	1	1	1	0	0
0	1	1	0	0	0	1	1	1	1

1	0	0	1	0	0	0	0	1	1
1	1	0	0	1	0	1	1	1	1

Pour dire qu'une formule F1 est la négation d'une autre F2, il faut que toutes les valeurs dans F1 soient la négation de toutes celles dans F2

Alors : Non (P et Q) n'est pas (non P et non Q)

Non ($P \rightarrow Q$) n'est pas (non $Q \rightarrow$ non P)

Non (P ou Q) n'est pas (P et Q)

Il est :

$\neg(P \wedge Q) \equiv (\neg P \vee \neg Q)$

$\neg(P \rightarrow Q) \equiv (P \wedge \neg Q)$

$\neg(P \vee Q) \equiv (\neg P \wedge \neg Q)$

Exercice 6 Soit a, b et c des réels. Ecrire la négation des propositions suivantes :

1. Non ($a \leq -2$ ou $a \geq 3$) $\equiv$ $a>-2$ et $a<3$
2. Non ($a \leq 5$ et $a \geq -1$)$\equiv$ $a>5$ ou $a<-1$
3. Non ($a\leq 5$ ou $3 > c$)$\equiv$ $a<5$ et $3\leq c$
4. Non (a+1 et $a > 1$) impossible puisque a+1 n'est pas une proposition

Exercice 7 Donner la table de vérité des propositions suivantes :

P	Q	R	.$\neg p$	$\neg P \vee Q$	.$(P\wedge Q)$	$(Q \wedge R)$	$(P\wedge Q) \wedge R$	$(P\wedge (Q\wedge R))$	.$(P\rightarrow Q)$	$(\Theta \rightarrow P)$	.$(P\rightarrow Q) \rightarrow R$	$P\rightarrow(Q \rightarrow R)$	$(P\rightarrow Q) \wedge (Q\rightarrow R)$
0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0
0	1	1	1	0	0	1	0	0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0
1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0
1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0
1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Exercice 8 Pour chacune des formules suivantes, 1°) construire sa table de vérité ; 2°) indiquer si c'est une tautologie, une contradiction ou ni l'une ni l'autre :

(a) = $\neg(p\vee p)\vee \neg(p\vee p)$

P	Q	$p\vee p$	$\neg(p\vee p)$	$p\wedge p$	$\neg(p\wedge p)$	$\neg(p\vee p)\vee \neg(p\vee p)$
0	0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1
1	0	1	0	0	1	1
1	1	1	0	1	0	0

La formule (a) n'est ni une tautologie ni une contradiction.

(b) =$(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r).)$

p	q	r	$q \rightarrow r$	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	$(p \rightarrow q)$	$(p \rightarrow r)$	$((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r).)$	(b)
0	0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	1	1	1	0	1	1	1
1	1	0	0	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1

La formule (b) est une tautologie

$(c) = (p \wedge q) \vee ((\neg(p \wedge r) \vee q) \rightarrow r)$:

p	q	r	$p\wedge q$	$p\wedge r$	$\neg(p \wedge r)$	$\neg(p \wedge r) \vee q$	$(\neg(p \wedge r) \vee q) \rightarrow r$	(c)
0	0	0	0	0	1	1	0	0
0	0	1	0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1	1	0	0
1	0	1	0	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	1	0	1
1	1	1	1	1	0	1	1	1

(c) n'est ni un tautologie ni une contradiction.

(d) : soient les sous-formules : $A = (x \vee y \vee z)$, $B = (u \vee x) \rightarrow u$, $C = B \leftrightarrow (y \vee z)$; on a la formule $(d) = A \leftrightarrow x \vee C$.

x	y	z	u	A	$(u\vee x)$	B	$(y \vee z)$	C	$(x \vee C)$	(d)
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	1
0	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1
1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

La formule (d) est une tautologie.

Exercice 9 Evaluez les formules suivantes en considèrent uniquement les valeurs des variables données :

$\upsilon(Q \rightarrow (P \rightarrow R))_{\upsilon(Q)=f} \equiv V$

$\upsilon(P\wedge (Q\vee R))_{\upsilon(Q)=v} \equiv \upsilon(P)$

$\upsilon(P\vee (Q\rightarrow R))_{\upsilon(Q)=f} \equiv V$

Exercice 10 Précisez en utilisant la méthode des tables de vérité, si les formules suivantes sont des tautologie, des contradictions, ou des formules simplement satisfiables :

1. $A\vee \neg A$ tautologie (toutes les lignes de TV sont des 1)
2. $A\wedge \neg A$ contradictoire (toutes les lignes de TV sont des 0)
3. $(P \wedge Q) \wedge (\neg P \vee Q)$ satisfiable il a une ligne dans TV égal à 1 (p,q)=(1,1)
4. $P \vee \neg (P \wedge Q)$ tautologie
5. $\neg P \rightarrow (P \wedge Q)$ satisfiable pour v(p)=1
6. $P \rightarrow (P \rightarrow P)$ tautologie
7. $((P \rightarrow Q) \rightarrow Q) \rightarrow P$ satisfiable
8. $(P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow P)$ tautologie
9. $(P \leftrightarrow Q) \wedge (P \leftrightarrow \neg Q)$ contradictoire

10. $(P \to Q) \to ((Q \to R) \to (P \to R))$ tautologie

Exercice 11 : Soit une fonction logique f à 4 variables logique, telle que f = 1 si et seulement si le nombre de variables de f qui sont à '1' est supérieur ou égal à 2.

1°) Table de vérité de f :

x	y	z	t	f
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

2°) Forme normale disjonctive de f :

f.n.d $=(\neg x \wedge \neg y \wedge z \wedge t) \vee (\neg x \wedge y \wedge \neg z \wedge t) \vee (\neg x \wedge y \wedge z \wedge \neg t) \vee (\neg x \wedge y \wedge z \wedge t) \vee (x \wedge \neg y \wedge \neg z \wedge t) \vee (x \wedge \neg y \wedge z \wedge \neg t) \vee (x \wedge \neg y \wedge z \wedge t) \vee (x \wedge y \wedge \neg z \wedge \neg t) \vee (x \wedge y \wedge \neg z \wedge t) \vee (x \wedge y \wedge z \wedge \neg t) \vee (x \wedge y \wedge z \wedge t)$

Forme normale conjonctive de f : (obtenue comme $\neg$(f.n.d de $\neg$f))

f.n.c $= (x \vee y \vee z \vee t) \wedge (x \vee y \vee z \vee \neg t) \wedge (x \vee y \vee \neg z \vee t) \wedge (x \vee \neg y \vee z \vee t) \wedge (\neg x \vee y \vee z \vee t)$

Exercice 12 a) L'ensemble E= { a, $((b \to a) \vee c)$, $\neg$ c, $(b \vee c)$} est il satisfiable ?

a	b	c	$(b \to a)$	$(b \to a) \vee c$	$\neg$ c	$(b \vee c)$
0	0	0	1	1	1	0
0	0	0	1	1	1	0
0	0	1	1	1	0	1
0	0	1	1	1	0	1
0	1	0	0	0	1	1
0	1	0	0	0	1	1
0	1	1	0	1	0	1
0	1	1	0	1	0	1
1	0	0	1	1	1	0
1	0	0	1	1	1	0
1	0	1	1	1	0	1
1	0	1	1	1	0	1
1	1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	0	1

L'ensemble E est satisfiable parce qu'il existe des lignes dans la TV dont toutes les sous formules de E sont satisfiables

b) L'ensemble A= { a, $\neg$ a} est il satisfiable ?

Cet ensemble n'est pas satisfiable

Exercice 13: En associant les énoncés élémentaires « Ali est étudiant », « Djawed est étudiant », « Chiheb est étudiant » aux propositions p, q, r, respectivement ; associer à chacun des énoncés suivants la formule propositionnelle qui semble lui correspondre sémantiquement :

(a) Ali et Djawed sont étudiants. : $p \wedge q$

(b) Ali ou Djawed est étudiant. : $p \vee q$

(c) Exactement un seul parmi Ali et Djawed est étudiant. : $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$

(d) Ni Ali ni Chiheb ne sont étudiants. : $\neg q \wedge \neg p$

(e) Au moins l'un des trois n'est pas étudiant. : $\neg q \vee \neg p \vee \neg r$

(f) Un seul parmi les trois n'est pas étudiant. : $(\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r)$

(g) Seulement deux, parmi les trois, sont étudiants. $\equiv$(f)

(h) Si Ali est étudiant, Djawed l'est. $p \longrightarrow q$

(i) Si Ali est étudiant, Djawed l'est ; sinon Djawed ne l'est pas. $(p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow \neg q)$

(j) Ali est étudiant à condition que Chiheb le soit. $p \longrightarrow r$

(k) Que Chiheb soit étudiant est une condition nécessaire pour que Ali le soit. $p \longrightarrow r$

(l) Que Chiheb soit étudiant est une condition suffisante pour que Ali le soit. $r \longrightarrow p$

(m) Que Chiheb soit étudiant est une condition nécessaire et suffisante pour que Ali le soit. $P \leftrightarrow r$

(n) Ali n'est étudiant que si exactement l'un des deux autres l'est. $p \rightarrow ((q \wedge \neg r) \vee (\neg q \wedge r))$

(o) Si Ali est étudiant alors au moins l'un des deux autres ne l'est pas. $p \rightarrow (\neg q \vee \neg r)$

Exercice 14: On considère les énoncés suivants :

(A) Si Pierre est rentré chez lui, alors Jean est allé au cinéma.

(B) Marie est à la bibliothèque ou Pierre est rentré chez lui.

(C) Si Jean est allé au cinéma, alors Marie est à la bibliothèque ou Pierre est rentré chez lui.

(D) Marie n'est pas à la bibliothèque et Jean est allé au cinéma.

(E) Pierre est rentré chez lui.

Formaliser cette famille d'énoncés en calcul propositionnel. On notera A, B, C, D, E les cinq formules obtenues. Montrer que l'on peut inférer E des prémisses A, B, C, D :

- Les formules qu'on obtient, en formalisant les énoncés, sont :

$A = P \rightarrow J$; $B = M \vee P$; $C = J \rightarrow (M \vee P)$; $D = \neg M \wedge J$ $E = P$.

On peut inférer (*déduire*) la conclusion E des prémisses (*hypothèses*) A, B, C, D si et seulement si

(I) $(A \wedge B \wedge C \wedge D) \rightarrow E$ est une tautologie.

Table de vérité : Soit F la sous-formule $F = A \wedge B \wedge C \wedge D$

P	J	M	A	B	C	D	E	$A \wedge B \wedge C \wedge D$	$F \rightarrow E$
0	0	0	1	0	1	0	0	0	1
0	0	1	1	1	1	0	0	0	1
0	1	0	1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	0	0	0	1
1	0	0	0	1	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	1	0	1	0	1
1	1	0	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	0	1	0	1

On en déduit que $\models (A \wedge B \wedge C \wedge D) \rightarrow E$

Raisonnement en français :

Pour montrer que (**I**) est une tautologie on suppose que la sous-formule F est vraie et on doit déduire que E est vraie. Supposons, donc, que F soit vraie ; par conséquent D est vraie donc Marie n'est pas à la bibliothèque et Jean est allé au cinéma. B est aussi vraie donc ou bien Marie est à la bibliothèque ou alors Pierre est rentré chez lui. Comme on sait déjà que Marie n'est pas à la bibliothèque, alors forcément que Pierre est rentré chez lui. Donc E est vraie. On en déduit que $F \rightarrow E$ est une tautologie

Exercice 15 Mohamed, ali et salim sont prévenus de fraude fiscale. Ils prêtent serment de la manière suivante :
Mohamed : Ali est coupable et Salim est innocent. (I)
ALI: Si Mohamed est coupable alors Salim aussi. (II)
SALIM: Je suis innocent mais au moins l'un des deux autres est coupable. (III)

Soient M, A et S les énoncés « Mohamed est innocent », « Ali est innocent » et « Salim est innocent ».
1) Formalisation :
(I): $\neg J \wedge S$ (II) : $\neg B \rightarrow \neg S$ (III) : $S \wedge (\neg J \vee \neg B)$
2) Tables de vérité :

B	J	S	¬B	¬J	¬S	(I)	(II)	(III)
0	0	0	1	1	1	0	1	0
0	0	1	1	1	0	1	0	1
0	1	0	1	0	1	0	1	0
0	1	1	1	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	1	0	1	0
1	0	1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	0	0	1	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0	1	0

3) D'après la table de vérité, on remarque que lorsque B = 1, J = 0, S = 1, les trois formules (I), (II) et (III) sont simultanément satisfiables.
4) D'après la table de vérité, on remarque que (I) → (III) est une tautologie, c'est-à-dire (I) $\models$ (III) ce qui veut dire que le témoignage de Smith découle de celui de Brown. C'est l'unique cas car :
(I) → (II), (II) → (I), (II) → (III), (III) → (II) et (III) → (I) ne sont pas des tautologies.
5) S'ils sont tous innocents alors B = J = S = 1 ⇒ (I) = 0 et (III) = 0 ; donc Mohamed et Salim ont fait un faux serment.

Exercice 16: On se trouve sur une île dont les habitants sont répartis en deux catégories : les Purs et les Pires. Les Purs disent toujours la vérité, tandis que les Pires mentent toujours. On rencontre trois habitants de l'île : Moe, Jon et Will.
Moe déclare : « Nous sommes Pires tous les trois ».
Jon déclare : « Il y a exactement un Pire parmi nous ».
Que peut-on déduire de ces déclarations ?
Solution au TD

Exercice 17: Trois personnes, Ali (A), Belaid (B) et Chérif (C) exercent chacune une profession différente : pharmacien, dentiste ou chirurgien.
Sachant que les implications suivantes sont vraies, retrouver leur profession :
(A chirurgien → B dentiste),
(A dentiste → B pharmacien),
(B non chirurgien → C dentiste).
Solution au TD