Solution de TD N° 02

Exercice 1

Un juge interroge trois personnes *A*, *B* et *C*. Certaines disent toujours la vérité, d'autres mentent systématiquement. Le but est de trouver qui dit la vérité.

• *A* dit : "Aucun de nous ne dit la vérité." (*PA*)

• *B* déclare : "Je dis la vérité." (*PB*)

• *C* dit : "Au moins deux d'entre nous mentent." (*PC*)

On introduit des variables propositionnelles *VA*, *VB* et *VC*. Pour $X \in \{A, B, C\}$, la variable *VX* est vraie si *X* dit la vérité et fausse si *X* est un menteur.

1. Traduire les phrases *PA*, *PB* et *PC* en des formules logiques propositionnelles qui pourront utiliser les variables *VA*, *VB*, et *VC*.

(a) $PA \equiv \neg VA \wedge \neg VB \wedge \neg VC$

(b) $PB \equiv VB$

(c) $PC \equiv (\neg VA \wedge \neg VB) \vee (\neg VB \wedge \neg VC) \vee (\neg VA \wedge \neg VC)$

2. Donner la table de vérité de ces formules en fonction des valeurs de *VA*, *VB*, et *VC*.

VA	VB	VC	PA	PB	PC	$VA \leftrightarrow PA$	$VB \leftrightarrow PB$	$VC \leftrightarrow PC$
0	0	0	1	0	1	0	1	0
0	0	1	0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1	1	0
0	1	1	0	1	0	1	1	0
1	0	0	0	0	1	0	1	0
1	0	1	0	0	0	0	1	0
1	1	0	0	1	0	0	1	1
1	1	1	0	1	0	0	1	0

3. Sur chaque ligne du tableau précédent, et pour chaque phrase, indiquer si elle a pu être dite.

On rappelle qu'un menteur ne peut pas dire une phrase vraie et que quelqu'un qui dit la vérité ne peut pas dire une phrase fausse.

4. En déduire qui dit la vérité parmi *A*, *B* et *C* ? Justifier votre réponse.

La seule situation dans laquelle les trois phrases peuvent être dites est celle de la ligne 2 dans laquelle A et B sont des menteurs et C dit la vérité.

Exercice 2 : utilisez les simplifications pour démontrer les équivalences suivantes (où ≡ note l'équivalence logique).

1. $A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A) \equiv (B \rightarrow A) \wedge (A \rightarrow B) \equiv B \leftrightarrow A$
2. $A \rightarrow \neg A \equiv \neg A \vee \neg A \equiv \neg A$
3. $A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C \equiv C \wedge (A \wedge B)$
4. $A \rightarrow (A \rightarrow B) \equiv \neg A \vee (A \rightarrow B) \equiv \neg A \vee (\neg A \vee B) \equiv (\neg A \vee \neg A) \vee B \equiv \neg A \vee B \equiv A \rightarrow B$
5. $(A \vee B) \rightarrow C \equiv \neg(A \vee B) \vee C \equiv (\neg A \wedge \neg B) \vee C \equiv (\neg A \vee C) \wedge (\neg B \vee C) \equiv (A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C)$
6. $A \rightarrow (B \wedge C) \equiv \neg A \vee (B \wedge C) \equiv (\neg A \vee B) \wedge (\neg A \vee C) \equiv (A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C)$
7. $A \rightarrow (B \rightarrow C) \equiv \neg A \vee (B \rightarrow C) \equiv \neg A \vee (\neg B \vee C) \equiv (\neg A \vee \neg B) \vee C \equiv \neg (A \wedge B) \vee C \equiv (A \wedge B) \rightarrow C$

Exercice 3U Soit la formule suivante (((A → ¬B) ↔ ¬C) ∧ (C ∨ D)) ∧ (A ↔ D)

A	B	C	D	¬B	A → ¬B ❶	¬C	❶↔¬C ❷	C ∨ D ❸	❷∧❸ ❹	A↔D ❺	❹ ∧❺
0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	1	0
0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0
0	0	1	0	1	1	0	0	1	0	1	0
0	0	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	0	1	1	1	0	0	1	0
0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	0
0	1	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0
0	1	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0
1	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	0	0	1	0	0	0
1	0	1	1	1	1	0	0	1	0	1	0
1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
1	1	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	0	0
1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1

1) Donner la forme normale conjonctive FNC de A (détaillée).
   (A∨B∨C∨D) ∧ (A∨B∨C∨¬D) ∧ (A∨B∨¬C∨D) ∧ (A∨B∨¬C∨¬D) ∧ (A∨¬B∨C∨D) ∧ (A∨¬B∨C∨¬D) ∧ (A∨¬B∨¬C∨D) ∧ (A∨¬B∨¬C∨¬D) ∧ (¬A∨B∨C∨D) ∧ (¬A∨B∨¬C∨D) ∧ (¬A∨B∨¬C∨¬D) ∧ (¬A∨¬B∨C∨D) ∧ (¬A∨¬B∨C∨¬D) ∧ (¬A∨¬B∨¬C∨D)
2) Donner la forme normale disjonctive FND de A (détaillée).
   (A∧¬B∧¬C∧D) ∨ (A∧B∧C∧D)
3) A est-elle une tautologie ? (justifier) non puisque FND(A)≠1 ou le nombres des modèles ≠8
4) A est-elle une contradiction ? (justifier) non puisque FNC(A)≠0 ou le nombres des contre modèles ≠8

Exercice 4 : Pour chaque formule donnée ci-après, donner sa forme normale disjonctive et prouver si elle est ou non satisfiable (en donnant si besoin un modèle de la formule). Cette formule est-elle valide ?

1. (¬ (A ↔ B) ∨ (B ∧ C) →C)
2. (A →B) ∧ (B → ¬A) ∧ (¬A →B) ∧ (B →A)
3. P ∨ (Q ∧ R) ↔(P ∨ Q) ∧ (P ∨ R).

La même méthode que celle de exo 3 : soit obtenir FND à partir de TV, on obtient le nombre des conjonctions élémentaires que le nombre des « 1 » dans la TV, cette FND est nommée FND détaillée

Ou bien utiliser la méthode de simplifications comme suit :

1. ajouter les parenthèses selon la priorités de la Logiques Propositionnelle (¬ > ∧ > ∨ > →> ↔) « > » : plus prioritaire que.
2. Remplacer les « → » et « ↔ » de l'extérieur vers l'intérieur par A→B≡¬A∨B,
   A↔B≡(A→B)∧(B→A)≡ (¬A∨B)∧ (¬B∨ A).
3. Faire entrer toutes les "∧" vers l'intérieur des parenthèses et sortir toutes les « ∨ » vers l'extérieur c-à-d :
   A ∧(B ∨C)≡ (A ∧B) ∨(A∧C)
4. Enlever les répétitions et les contraires par A∧A≡A, A∨A ≡A, A∨¬A≡1, A∧¬A ≡ 0

$(\neg (A \leftrightarrow B) \vee (B \wedge C) \rightarrow C) \equiv (((\neg (A \leftrightarrow B)) \vee (B \wedge C)) \rightarrow C)$

$\equiv \neg((\neg (A \leftrightarrow B)) \vee (B \wedge C)) \vee C$

$\equiv ((A \leftrightarrow B) \wedge \neg (B \wedge C)) \vee C$

$\equiv ((\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A) \wedge (\neg B \vee \neg C)) \vee C$

$\equiv ((\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A)) \wedge (\neg B \vee \neg C)) \vee C$

$\equiv ((\neg A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge A) \vee (B \wedge \neg B) \vee (B \wedge A)) \wedge (\neg B \vee \neg C)) \vee C$

$\equiv ((\neg A \wedge \neg B) \vee 0 \vee 0 \vee (B \wedge A)) \wedge (\neg B \vee \neg C)) \vee C$

$\equiv ((\neg A \wedge \neg B) \vee (B \wedge A)) \wedge (\neg B \vee \neg C)) \vee C$

$\equiv ((\neg A \wedge \neg B \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (B \wedge A \wedge \neg B) \vee (B \wedge A \wedge \neg C)) \vee C$

$\equiv ((\neg A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (A \wedge 0) \vee (B \wedge A \wedge \neg C)) \vee C$

$\equiv (\neg A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (A \wedge B \wedge \neg C) \vee C$

Exercice 5 (Mise en forme clausale (F.N.C))

1. Donner une forme normale conjonctive (clausale) de la formule ϕ définie par

$(R \wedge \neg((Q \vee R) \Rightarrow P \vee S)) \equiv (R \wedge \neg((Q \vee R) \Rightarrow (P \vee S)))$

$\equiv (R \wedge \neg(\neg (Q \vee R) \vee (P \vee S)))$

$\equiv (R \wedge (Q \vee R) \wedge \neg (P \vee S)))$

$\equiv R \wedge (Q \vee R) \wedge (\neg P \wedge \neg S)$

$\equiv R \wedge (Q \vee R) \wedge \neg P \wedge \neg S$

Que proposez-vous pour obtenir une forme normale disjonctive de $\neg\phi$?

$\neg\phi \equiv \neg(R \wedge (Q \vee R) \wedge \neg P \wedge \neg S) \equiv \neg R \vee (\neg Q \wedge \neg R) \vee P \vee S$ (FNC)

2. Même question pour $\neg(P \Leftrightarrow Q) \Rightarrow (R \Rightarrow S)$.

Exercice 6 Pour chaque formule Fi, i = 1, 2, 3, énumérez ses modèles :

1. F1 $\equiv (P \vee (Q \rightarrow P)) \wedge Q \wedge (P \rightarrow \neg Q) \equiv (P \vee \neg Q) \wedge Q \wedge (\neg P \vee \neg Q) \equiv$ FNC

Contre Modèles=(P,Q,R)={(0,1,0), (0,1,1), (0,0,0), (0,0,1), (1,0,0), (1,0,1), (1,1,0), (1,1,1)}

Nbres Contre Modèles=8 alors modèles=∅

2. F2 $\equiv (P \leftrightarrow (Q \rightarrow P)) \vee Q$

$\equiv (\neg P \vee (Q \rightarrow P)) \wedge (P \vee \neg (Q \rightarrow P)) \vee Q$

$\equiv (\neg P \vee (\neg Q \vee P)) \wedge (P \vee \neg (\neg Q \vee P)) \vee Q$

$\equiv P \vee (Q \wedge \neg P) \vee Q \equiv$ FND

Modèles=(P,Q) ={(1,0) , (1,1), (0,1)}

3. F3 $\equiv (P \wedge \neg Q) \vee ((Q \rightarrow P) \rightarrow P)$

Modèles =(P,Q)={(0,1), (1,0), (1,1)}

P	Q	F3
0	0	0
	1	1
1	0	1
1	1	1

Exercice 7 Les conséquences logiques suivantes sont-elles vérifiées ?

a) $(P \vee Q), (P \rightarrow R) \models (R \wedge Q)$

P	Q	R	P∨Q	P→R	R∧Q	
0	0	0	0	1	0	
0	0	1	0	1	0	
0	1	0	1	1	0	⊗
0	1	1	1	1	1	
1	0	0	1	0	0	
1	0	1	1	1	0	⊗
1	1	0	1	0	0	
1	1	1	1	1	1	

Pour conséquence logique soit vérifié, il faut que toutes les modèles de l'ensemble soit des modèles dans la conséquence.

Dans ce cas a), n'est pas vérifiés

b) $(P \vee Q \vee S), (S \rightarrow P), (P \rightarrow Q) \models Q$

P	Q	S	$P\vee Q \vee S$	$S\rightarrow P$	$P\rightarrow Q$
0	0	0	0	1	1
0	0	1	1	0	1
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	0	1
1	0	0	1	1	0
1	0	1	1	1	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1

Dans ce cas b), toutes les cas sont vérifiés

Alors la conséquence est vérifiée

c) $\{P \vee Q, P \Rightarrow R, Q \Rightarrow R\} \models R$

d) $P \Rightarrow Q \models \neg Q \Rightarrow \neg P$

e) $\{P \vee Q, \neg P\} \models Q$

f) $P \Rightarrow Q \models Q \Rightarrow P$

Exercice 8 : Soit le raisonnement suivant : « - Quand il fait soleil, je mets mes lunettes ou je ne sors pas.

- Je ne reste à la maison que sans lunettes et par temps gris.

Donc si je ne mets pas mes lunettes, c'est qu'il fait gris. »

1°) Formaliser ce raisonnement en utilisant les variables suivantes : s : il fait soleil, l : je mets mes lunettes, m : je reste à la maison.

Avec les variables s, l et m dénotant : s : il fait soleil ; l : je mets mes lunettes ; m : je reste à la maison ; on peut formaliser le raisonnement donné avec une formule du calcul propositionnel suivant :

$((s \rightarrow (l \vee m)) \wedge (m \rightarrow (\neg l \wedge \neg s))) \rightarrow (\neg l \rightarrow \neg s)$

2°) Montrer que le raisonnement ci-dessus est correct (valide) :

a. en utilisant la table de vérité ;

Soient le sous formules : $I = s \rightarrow (l \vee m)$, $II = m \rightarrow (\neg l \wedge \neg s)$, $III = (\neg l \rightarrow \neg s)$

On doit vérifier $(A) = (I \wedge II) \rightarrow III$ est une tautologie ou bien $\{ I , II\} \models III$

s	l	m	$l \vee m$	I	$\neg l \wedge \neg s$	II	III	$I \wedge II$	(A)
0	0	0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	0	0	1	0	1
1	0	0	0	0	0	1	0	0	1
1	0	1	1	1	0	0	0	0	1
1	1	0	1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	0	0	1	0	1

b. en utilisant une mise en forme normale par le calcul (algébriquement).

$(A) \equiv (I \wedge II) \rightarrow III \equiv [(s \rightarrow (l \vee m)) \wedge (m \rightarrow (\neg l \wedge \neg s))] \rightarrow (\neg l \rightarrow \neg s)$

$\equiv \neg[(s \rightarrow (l \vee m)) \wedge (m \rightarrow (\neg l \wedge \neg s))] \vee (\neg l \rightarrow \neg s)$

$\equiv [\neg (s \rightarrow (l \vee m)) \vee \neg (m \rightarrow (\neg l \wedge \neg s))] \vee (\neg l \rightarrow \neg s)$

$\equiv [\neg (\neg s \vee (l \vee m)) \vee \neg (\neg m \vee (\neg l \wedge \neg s))] \vee (l \vee \neg s)$

$\equiv (s \wedge \neg l \wedge \neg m) \vee (m \wedge (l \vee s)) \vee (l \vee \neg s)$

$\equiv (s \wedge \neg l \wedge \neg m) \vee (m \wedge l) \vee (m \wedge s) \vee l \vee \neg s$

Modèles=(m,l,s)={(0,0,1), (1,1,1), (1,1,0), (1,0,1), (0,1,0) ,(0,1,1), (0,0,0), (1,0,0)}

Nombre modèles =8 alors (A) est tautologie