Matière : Probabilités et Statistiques

Série de TD N°2
(Espace de probabilité)

Exercice 1 :

Soit A, B et C trois événements d'un espace de probabilité (Ω, S, P). Exprimer les événements suivants à l'aide des opérations ensemblistes :

a) A seul se produit, b) l'un au moins des événements se produit, c) au moins deux des événements se produisent, d) un événement au plus se produit.

Exercice 2 :

Dans une ville, il y a trois centres de secours d'urgence. Cinq malades appellent le même jour un centre au téléphone après avoir choisi, au hasard, l'un des centres sur internet.

1°) Quel est l'ensemble fondamental Ω associé à cetté expérience aléatoire ? Calculer $card(\Omega)$.

2°) Quelle set la probabilité pour que les cinq malades appellent le même centre ?

3°) Quelle est la probabilité que les trois centres soient appelés ?

Exercice 3 :

Un atelier a fabriqué n articles. On désigne par A_i $(i=1,2,......n)$ l'événement : « l'article i est défectueux »

1°) Construire les événements suivants :

a) B : « Aucun article n'est défectueux ».
b) C : « Au moins un article est défectueux ».
c) D : « Seulement un article est défectueux ».
d) E : « Au plus deux articles sont défectueux ».

2°) Sachant que $P(A_i) = p_i$ $(i=1,2,.....,n)$ et que les articles sont fabriqués indépendamment l'un de l'au
Calculer $P(B)$, $P(C)$ et $P(D)$.

Exercice 4 :

Soit (Ω, S, P) un espace de probabilité.

1°) Soit A et B deux événements de cet espace. Montrer que :

$$P(A\Delta B) = P(A) + P(B) - 2P(A.B) = P(A+B) - P(A.B)$$

2°) Soient la suite des événements $A_1, A_2, ..., A_n$ de cet espace. Montrer que :

$$P(A_1 + A_2 + ... + A_n) \leq P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n)$$

Exercice 5 :

Soit (Ω, S, P) un espace de probabilité, avec $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$, $S = P(\Omega)$ et P la probabilité uniforme. Soient A, B et C trois événements de cet espace tels que: $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 3\}$ et $C = \{2, 3\}$. Montrer que A, B et C sont deux à deux indépendants, mais pas mutuellement indépendants.

Exercice 6 :

1°) Soit (Ω, S, P) un espace de probabilité et soit $A_1, A_2, \ldots\ldots, A_n$ un système complet de Ω tels que : $P(A_i) > 0, \quad \forall i = 1,2,\ldots,n$.

Soit B un événement quelconque de S .

Montrer que : $P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) P(B / A_i)$

2°) Un étudiant doit passer son examen oral chez un des trois enseignants E_1, E_2 et E_3. Il a 55% de réussir chez l'enseignant E_1, 50% chez E_2 et 60% chez E_3.

Quelle est la probabilité pour que cet étudiant réussisse ? (On suppose que cet étudiant a les mêmes chances de passer chez un des trois enseignants)

Exercice 7 : (Supplémentaire)

Soit p et n deux entiers strictement positifs. On répartit au hasard p jetons numérotés de 1 à p sur un tableau constitué de n cases numérotés de 1 à n. Chaque jeton est placé sur une case et chaque case peut recevoir plusieurs jetons.

1) Définir un espace de probabilité $(\Omega, P(\Omega), P)$ associé à cette expérience aléatoire.

2) Soit $i \in \{1,2,\ldots\ldots n\}$. Déterminer la probabilité que la i-ème case reste vide.

3) Déterminer la probabilité qu'au moins une case du tableau reste vide.

4) On désigne par $S_{p,n}$ l'ensemble des surjections de l'ensemble $N_p = \{1,\ldots\ldots, p\}$ dans l'ensemble $N_n = \{1,\ldots\ldots, n\}$.

A quelle condition sur n et p, $S_{p,n}$ est-il non vide ? Sous cette condition, déduire de la question précédente une expression du cardinal de $S_{p,n}$ en fonction de n et p.

Corrigé de la série de TD 2. (Proba-Stat).

Exo 1: Soit $A, B, C \in S$

NB: Il existe plusieurs méthodes pour exprimer les événements sous forme ensembliste (ou à l'aide d'opérateurs logiques).

a/ $E_1 = \{A \text{ seul se produit}\} = A \cap \bar{B} \cap \bar{C} = A.\bar{B}.\bar{C}$

b/ $E_2 = \{\text{l'un au moins des événts se produit}\} = A \cup B \cup C = A + B + C.$

c/ $E_3 = \{\text{Au moins 2 des événts se produisent}\} = (A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$
$= (AB) + (AC) + (BC)$

d/ $E_4 = \{\text{1 évént au plus se produit}\} = \bar{E_3}$

$$= \overline{AB + AC + BC} = \overline{AB} \, . \, \overline{AC} \, . \, \overline{BC}$$
$$= (\bar{A} + \bar{B}).(\bar{A} + \bar{C}).(\bar{B} + \bar{C})$$
$$= (\bar{A} + \bar{B}).(\bar{A}\bar{B} + \bar{A}\bar{C} + \bar{B}\bar{C} + \bar{C}).$$
$$= \bar{A}\bar{B} + \bar{A}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{C} +$$
$$\bar{A}\bar{B} + \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{B}\bar{C} + \bar{B}\bar{C}$$
$$= \bar{A}\bar{B} + \bar{A}\bar{C} + \bar{B}\bar{C} + \bar{A}.\bar{B}\bar{C}$$

Exo 2:

$$\underbrace{c_1 \quad c_2 \quad c_3}\Big\} \leftarrow \text{3 centres d'urg.}$$
$$\updownarrow$$
$$\underbrace{a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad a_5}\Big\} \leftarrow \text{5 malads}$$

1°/ $\Omega = ?$ $\longrightarrow$ $\text{card}\,\Omega = ?$

L'ensemble fondamental Ω associé à cette expérience aléatoire est l'ensemble des 5-uplets constitués des éléments ac_1, ac_2, ac_3 représentant respectivement un appel au centre 1, au centre 2 et au centre 3.

$\Rightarrow \omega = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) \in \Omega \,/\, \underset{i=\overline{1,5}}{a_i \in \{ac_1, ac_2, ac_3\}}$

$\Omega = \{\omega = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) \,/\, a_i \in \{ac_1, ac_2, ac_3\}\}$

$\Rightarrow \quad \text{Card } \Omega = 3^5 \rightarrow$ Arrangement avec répétition de 5 éléments parmi 3 ($A_n^p = n^p$).

2°/ <u>NB</u>: on suppose qu'on a une probabilité uniforme (equiprobabilité : $\forall \omega \in \Omega : P(\{\omega\}) = 1/3^5$).

Soit $A = \{$les 5 malades appellent le même centre$\}$

$\Rightarrow A = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ avec.

$\omega_1 = (ac_1, ac_1, \ldots, ac_1)$; $\omega_2 = (ac_2, ac_2, \ldots, ac_2)$

$\omega_3 = (ac_3, \ldots, ac_3)$.

$$\Rightarrow P(A) = \frac{\text{card } A}{\text{card } \Omega} = \frac{3}{3^5} = 1/81.$$

3°/ $B = \{$les 3 centres sont appelés$\}$

$P(B) = ?$

Pour déterminer la probabilité que les 3 centres soient appelés, il faut séparer le cas 2 centres sont appelés 2 fois et le dernier une seule fois et le cas.

ou 1 centre est appelé 3 fois et les 2 autres 1 seule fois.

$B = B_1 \cup B_2$ avec $\begin{cases} B_1 = \{2 \text{ centres sont appelés } 2 \text{ fois et le dernier } 1 \text{ seule fois}\} \\ B_2 = \{1 \text{ centre est appelé } 3 \text{ fois et les } 2 \text{ autres } 1 \text{ seule fois}\}. \end{cases}$

(avec $B_1 \cap B_2 = \phi$)

$\Rightarrow P(B) = P(B_1 \cup B_2) = P(B_1) + P(B_2)$

$$= \frac{\text{card } B_1}{\text{card } \Omega} + \frac{\text{card } B_2}{\text{card } \Omega} = \frac{\text{Card } B_1 + \text{Card } B_2}{\text{Card } \Omega}$$

avec $\begin{cases} \text{Card } B_1 = C_5^2 \times C_3^2 \times 3 \\ \text{Card } B_2 = C_5^3 \times 2 \end{cases}$

Exo 3: n articles, on note:

$A_i = \{ \text{l'article } i \text{ est défectueux} \}$; $i = \overline{1, n}$

1°/ Construction des évents:

a/ $B = \{$ Aucun article n'est défectueux $\}$.

$A_i \longrightarrow \overline{A_i} = \{ \text{l'article } i \text{ n'est pas défectueux} \}$, $i = \overline{1, n}$

$\Rightarrow B = \overline{A_1} . \overline{A_2} . \ldots \overline{A_n} = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \ldots \cap \overline{A_n}$

b/ $C = \{$ Au moins un article est défectueux $\}$.

$\Rightarrow C = \overline{B} = C_\Omega^B = \Omega - \overline{A_1} \ldots \overline{A_n}$

c/ $D = \{$ seulement un article est défectueux $\}$.

$D = A_1 \overline{A_2} \ldots \overline{A_n} + \overline{A_1} \cdot A_2 \overline{A_3} \ldots \overline{A_n} + \ldots + \overline{A_1} \ldots \overline{A_{n-1}} \cdot A_n$.

d/ $E = \{$Au plus 1 articles sont défectueux$\}$. $\Rightarrow$

$$E = (A_1 A_2 \bar{A}_3 \cdots \bar{A}_n + A_1 \bar{A}_2 A_3 \bar{A}_4 \cdots \bar{A}_n + \cdots + A_1 \bar{A}_2 \cdots \bar{A}_{n-1} A_n)$$
$$+ (\bar{A}_1 A_2 A_3 \bar{A}_4 \cdots \bar{A}_n + \cdots\cdots + \bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3 \cdots \bar{A}_{n-1} A_n)$$
$$+ (\bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3 A_4 \bar{A}_5 \cdots\cdots \bar{A}_n + \cdots\cdots + \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3 \cdots \bar{A}_{n-1} A_4)$$
$$+ \cdots\cdots\cdots + (\bar{A}_1 \cdots \bar{A}_{n-2} A_{n-1} A_n)$$

2°/ <u>Calcul de Probabilités</u>:

*/ $P(B) = ?$

$P(B) = P(\bar{A}_1 . \bar{A}_2 \cdots \bar{A}_n)$

On sait que si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont des événements indépendants alors $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \ldots \bar{A}_n$ le sont aussi

$\Rightarrow P(B) = P(\bar{A}_1) . P(\bar{A}_2) \cdots\cdots P(\bar{A}_n)$.

On a $P(\bar{A}_i) = 1 - P(A_i)$; $\forall i = \overline{1, n}$
$= 1 - p_i$

$\Rightarrow P(B) = (1-p_1) . (1-p_2) \cdots\cdots (1-p_n)$

$$\Rightarrow \boxed{P(B) = \prod_{i=1}^{n} (1-p_i)}$$

*/ $P(C) = ?$

$$P(C) = P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1-p_i)$$

* $P(D) = ?$

$$P(D) = P(A_1 \overline{A_2} \cdots \overline{A_n} + \overline{A_1} A_2 \overline{A_3} \cdots \overline{A_n} + \cdots + \overline{A_1} \cdots \overline{A_{n-1}} \cdot A_n)$$

événts incompatibls 2 à 2 $\Rightarrow$

$$P(D) = P(A_1 \overline{A_2} \cdots \overline{A_n}) + P(\overline{A_1} A_2 \overline{A_3} \cdots \overline{A_n}) + \cdots + P(\overline{A_1} \cdots \overline{A_{n-1}} \cdot A_n)$$

Indép
$$= P(A_1) P(\overline{A_2}) \cdots P(\overline{A_n}) + \cdots + P(\overline{A_1}) \cdots P(\overline{A_{n-1}}) P(A_n)$$

$$= p_1(1-p_2) \cdots (1-p_n) + (1-p_1) \cdot p_2 (1-p_3) \cdots (1-p_n) + \cdots + (1-p_1)(1-p_2) \cdots (1-p_{n-1}) \cdot p_n$$

$$= \sum_{i=1}^{n} p_i \prod_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} (1-p_j)$$

Exo41 $(\Omega, \mathcal{S}, P) \equiv$ espace-proba.

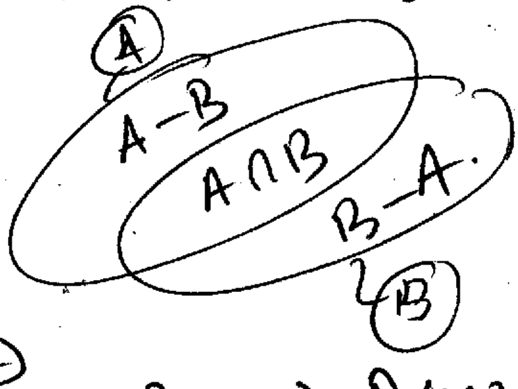
1°/ $A, B \in \mathcal{S}$: $P(A \Delta B) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$
$= P(A \cup B) - P(A \cap B)$.

(i) $P(A \Delta B) \stackrel{?}{=} P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$.

on a :

$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) \Rightarrow$

$P(A \Delta B) = P(A - B) + P(B - A)$



Comme $\begin{cases} A = (A-B) \cup (A \cap B) \\ B = (B-A) \cup (A \cap B) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P(A) = P(A-B) + P(A \cap B) \\ P(B) = P(B-A) + P(A \cap B) \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mathbb{P}(A-B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A\cap B) \\ \mathbb{P}(B-A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A\cap B) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\boxed{\mathbb{P}(A\Delta B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 2\mathbb{P}(A\cap B)}$$

(ii) $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 2\mathbb{P}(A\cap B) \overset{?}{=} \mathbb{P}(A\cup B) - \mathbb{P}(A\cap B)$

D'après le Théorème des proba-totales :

$$\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A\cup B) \Rightarrow$$

$$\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A\cap B) - \mathbb{P}(A\cap B)$$
$$= \mathbb{P}(A\cup B) - \mathbb{P}(A\cap B).$$

2°/ $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{S}$:

$\mathbb{P}(n) \Leftrightarrow \left(\forall n \in \mathbb{N} : \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)\right)$?

On démontre par récurrence que cette proposition est vraie.

<u>NB</u> $\forall n \in \mathbb{N} : \mathbb{P}(n)$ /V ?

On remarque que pour $n=0$ et $n=1$. l'inégalité est vérifiée ($0 \leq 0$, $\forall A \in \Omega$ $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(A)$)

•) $n=2$: $\mathbb{P}(n=2)$ /V ?

Soient $A_1, A_2 \in \mathcal{S}$: $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2) \overset{?}{\leq} \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2)$

On a : $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2) = \left[\mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cup A_2)\right] \geq 0$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(A_1 \cup A_2) \leq \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2)$$

$$\Rightarrow \boxed{P(n=2)/V}$$

•) On suppose que $P(n-1)/V \overset{?}{\Longrightarrow} P(n)/V$.

On a $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{n-1} \cup A_n$.

$$= \underbrace{\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i}_{X} \cup A_n = X \cup A_n.$$

d'après $P(n=2)/V \Rightarrow$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = P(X \cup A_n) \leq \underbrace{P(X) + P(A_n)}_{\overset{\text{ll}}{P\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right) + P(A_n)}} \quad (1)$$

d'après $P(n-2)/V \Rightarrow$

$$\forall n \in \mathbb{N} : P\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n-1} P(A_i) \Rightarrow$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right) + P(A_n) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \quad (2)$$

$$(1) \wedge (2) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

donc $\boxed{P(n)/V.}$

Exos:

$(\Omega, S, P) \equiv$ espace-proba / $\begin{cases} \Omega = \{1,2,3,4\} \\ S = \mathcal{P}(\Omega) \\ P = \text{Proba-unif} \\ \quad \text{ll} \\ \forall w \in \Omega : P(\{w\}) = 1/4. \end{cases}$

$A = \{1,2\}$; $B = \{1,3\}$; $C = \{2,3\}$

*/ Indép 2 à 2:

A et B : $A \cap B = \{1\} \Rightarrow P(A \cap B) = 1/4$.

$P(A) = \frac{\text{card } A}{\text{card } \Omega} = \frac{2}{4} = 1/2$; $P(B) = \frac{2}{4} = 1/2$.

-(4)-

$\Rightarrow P(A).P(B) = \frac{1}{4} = P(A \cap B) \Rightarrow$ A et B indép.

*/ Même chose pour (A et C) et (B et C).

**/ Indep mutuelle :

on montre que $P(A \cap B \cap C) \neq P(A).P(B).P(C)$

on a : $A \cap B \cap C = \phi \Rightarrow P(A \cap B \cap C) = 0$

et $P(A).P(B).P(C) = \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{4} \neq 0$.

TD2 / Exo6 (Corrigé)

$$\begin{cases} i) \ \forall i=\overline{1,n} : A_i \neq \emptyset \\ ii) \ A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j \\ iii) \ \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega \end{cases}$$

1°/ $(\Omega, S, P) \equiv$ espace-proba ;

$(A_i)_{i=\overline{1,n}} \equiv$ système complet de Ω (partition de Ω) /

$P(A_i) > 0, \forall i = \overline{1,n}$

$B \in S$

On montre que : $P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B/A_i)$

L'événement B peut se décomposer sous la forme :

$$B = B \cap \Omega = B \cap \big(\underbrace{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}_{\text{prop-syst complet}}\big) = \bigcup_{i=1}^{n} (B \cap A_i)$$

distributivité de $\cup / \cap$.

Vu que les A_i sont 2 à 2 incompatibles ($\forall i \neq j$: $A_i \cap A_j = \emptyset$) $\Rightarrow$ les événements $(B \cap A_i)$ le sont aussi $\Rightarrow$

$$P(B) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} (B \cap A_i)\right) = P\left[(B \cap A_1) \cup \dots \cup (B \cap A_n)\right]$$

$$= P(B \cap A_1) + \dots + P(B \cap A_n)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i)$$

Comme $P(A_i) > 0, \forall i = \overline{1,n} \Rightarrow$

$$P(B/A_i) = \frac{P(B \cap A_i)}{P(A_i)} \Rightarrow P(B \cap A_i) = P(A_i) \cdot P(B/A_i)$$

(S)

$$\Rightarrow \boxed{P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).P(B/A_i)}$$

NB : cette démonstration est la preuve du Théorème sur les probabilité, appelé aussi « Théorème des probabilité totale »

2°/ Application

On définit les événements suivants :

E_i ($i=1,3$) $= \{$l'étudiant passe son examen chez l'enseignant $i\}$.

$R = \{$l'étudiant réussit son examen$\}$.

$$P(R) = ?$$

Les données de l'exo :

$$P(E_1) = P(E_2) = P(E_3) = 1/3$$

$$P(R/E_1) = 0{,}55 \; ; \; P(R/E_2) = 0{,}50 \; ; \; P(R/E_3) = 0{,}6$$

$\Rightarrow$ d'après le Théo-proba-totale :

$$P(R) = \sum_{i=1}^{3} P(E_i).P(R/E_i) = P(E_1).P(R/E_1) + P(E_2).P(R/E_2) + P(E_3).P(R/E_3)$$

$\Rightarrow P(R) = \frac{1}{3}(0{,}55 + 0{,}50 + 0{,}60) = 0{,}53 = 53\%$

3°/ <u>NB</u> : Ajouter cette question :

Quelle est la probabilité pour que la réussite à l'examen provient de l'enseignant 1 (E_1) ?

<u>Solution</u> : On cherche à calculer $P(E_1/R) = ?$

D'après la formule de Bayes :

$$P(E_1/R) = \frac{P(E_1) . P(R/E_1)}{\sum_{i=1}^{3} P(E_i) . P(R/E_i)}$$

$$= \frac{1/3 \times 0{,}55}{\frac{1}{3}(0{,}55 + 0{,}50 + 0{,}60)} = \frac{0{,}1833}{0{,}53}$$

$$=$$