Université de Jijel, Faculté des Sciences exactes et Informatique, Département de Physique

Contrôle de Théories de Jauge — *Durée 3h00*

Master 2 physique théorique — *Lundi 03/02, 2020*

(I) Question de cours

Pourquoi on a besoin d'utiliser:

- La quantification de Gupta-Bleuler en QED
- Le mécanisme de Higgs dans le modèle standard
- Les anti-commutateurs pour quantifier les champs fermioniques?

(II) Problème 1: Interaction forte et couleur

On considère la densité lagrangienne classique d'une théorie de jauge non-abélienne basée sur le groupe $SU(N)$.

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu} + \sum_{k=1}^{n_f}\bar{\psi}_k(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi_k \tag{1}$$

avec

$$D_\mu = \partial_\mu - igT^aA^a_\mu, \qquad F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\nu + gf_{abc}A^b_\mu A^c_\nu \tag{2}$$

et

$$[T^a, T^b] = if_{abc}T^c, \qquad \mathrm{Tr}[T^aT^b] = \frac{\delta_{ab}}{2} \tag{3}$$

où T^a (pour $a = 1, \cdots, N^2-1$) sont les générateurs du groupe $SU(N)$ et f_{abc} sont les constantes de structure (antisymétriques par l'échange de deux indices). ψ_k est un vecteur de N composantes (représentation fondamentales), A^a_μ est le champ de jauge (représentation adjointe) et n_f est le nombre de saveur (où de particules).

(1) On introduit la matrices des bosons de jauge $\mathbb{A}_\mu = T^aA^a_\mu$. Montrer qu'on peut écrire:

$$T^aF^a_{\mu\nu} = \partial_\mu\mathbb{A}_\nu - \partial_\nu\mathbb{A}_\nu - ig[\mathbb{A}_\mu, \mathbb{A}_\nu] \equiv \mathbb{F}_{\mu\nu}, \qquad \text{et} \qquad -\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu} = -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}[\mathbb{F}_{\mu\nu}\mathbb{F}^{\mu\nu}] \tag{4}$$

(2) Montrer que $\mathcal{L}$ est invariante sous la transformation de jauge locale $U(x) = \exp[-iT^a\alpha_a(x)]$ en dérivant les transformations suivies par la matrice de jauge $\mathbb{A}_\mu$ et le champ de jauge A^a_μ.

(3) Pour $N = 3$, ce modèle correspond à la théorie de la chromodynamique (QCD). Discuter, en quelques lignes, la quantification de cette théorie.

(4) On peut utiliser le rapport $R^{(\mathrm{th})}$ des deux sections efficaces des réactions suivantes

$$\begin{aligned} &e^-(p_1) + e^+(p_2) \longrightarrow q_i(p_3) + \bar{q}_i(p_4) \longrightarrow \text{hadrons} \\ &e^-(p_1) + e^+(p_2) \longrightarrow \mu^-(p_3) + \mu^+(p_4) \end{aligned} \tag{5}$$

pour montrer que les quarks possèdent trois états de couleur.

- Tracer le diagramme de Feynman décrivant chaque processus.
- Écrire l'amplitude associée à chaque diagramme et son complexe conjugués.
- Calculer les carrés de ces amplitudes et les exprimer en fonction des variable de MondelStam.
- Calculer les sections efficaces totales dans les deux cas.
- Montrer que le rapport entre les deux sections efficaces est donné par:

$$R^{(\mathrm{th})} = \frac{\sigma(e^-e^+ \to \text{hadrons})}{\sigma(e^-e^+ \to \mu^-\mu^+)} = N\sum_i Q^2_{q_i}. \tag{6}$$

- Comparaison de $R^{(\text{th})}$ et $R^{(\text{exp})}$. Dans le tableau suivant on donne $R^{(\text{exp})}$ le rapport mesuré expérimentalement entre les deux sections efficaces:

$\sqrt{s}$	$R^{(\text{th})}$	$R^{(\text{exp})}$
$\sqrt{s} > 2m_s$		$\backsim 2$
$\sqrt{s} > 2m_c$		$\backsim 10/3$
$\sqrt{s} > 2m_b$		$\backsim 11/3$
$\sqrt{s} > 2m_t$		$\backsim 5$

où $m_s < m_c < m_b < m_t$.

Déduire que $N = 3$.

(5) La constante de couplage mobile de l'interaction forte est donnée par:

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{4\pi}{(11 - 2n_f/3)\ln(Q^2/\Lambda^2)}. \tag{7}$$

où Q^2 est une échelle d'énergie et Λ est lambda-QCD (limite entre la physique à courte et à longue distance).

- Pourquoi α_s est appelée constante de couplage mobile.
- Discuter le phénomène de la liberté asymptotique.
- D'après la formule de α_s, combien y en a t-il de familles de quarks pour que ce phénomène soit possible.

(III) Problème 2: Production du boson de Higgs en association avec un W

Le but de ce problème est d'étudier la production du boson du Higgs (h) avec le boson W dans la diffusion électron neutrino, et la désintégration de ces deux bosons lourds en leptons. Dans la suite, on néglige les masses de tous les leptons.

(A) Production de hW:

On considère la réaction suivante:

$$e^-(p_1) + \bar{\nu}_e(p_2) \longrightarrow h(p_3) + W^-(p_4). \tag{8}$$

(1) Tracer le diagramme de Feynman décrivant cette réaction.

(2) Écrire l'amplitude associée à ce diagramme et son complexe conjugué.

(3) Calculer le carré de l'amplitude sommé et moyenné sur les spins et polarisations ($\overline{\sum}|M|^2$).

(4) Exprimer $\overline{\sum}|M|^2$ en fonction des variables de MandelStam et les masses des particules.

(5) Calculer les sections efficaces différentielles $d\sigma/d\cos(\theta)$ et $d\sigma/dt$.

(B) Désintegration de W et h:

On suppose, maintenant, que les bosons W^- et h sont sur couche de masse ($p_4^2 = M_w^2$ et $p_3^2 = M_h^2$). Ces derniers ne sont pas stable et donc, ils peuvent se désintégrer selon plusieurs mode. On considère que les deux modes de désintégrations suivants:

$$h \longrightarrow b + \bar{b} \tag{9}$$
$$W \longrightarrow e^- + \bar{\nu}_e \tag{10}$$

(6) Tracer le diagramme de Feynman décrivant chaque mode de désintégration.

(7) Écrire l'amplitude associée à chaque diagramme et son complexe conjugué.

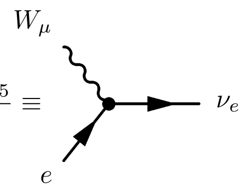
(8) Calculer les carrés des amplitudes associés à chaque diagramme de Feynman.

(9) Calculer les taux de désintégration, $\Gamma^{(W)}$ et $\Gamma^{(h)}$, de chaque mode de désintégration.

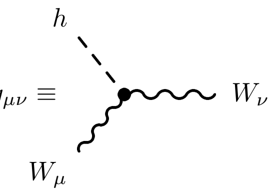
(IV) Appendices

- Vertex:

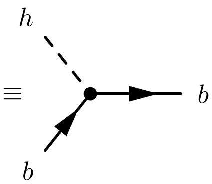
$$\frac{-ig}{\sqrt{2}}\gamma_\mu \frac{1-\gamma_5}{2} \equiv$$



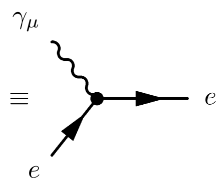
$$igM_W\, g_{\mu\nu} \equiv \tag{11}$$



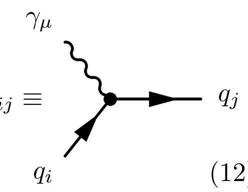
$$\frac{-ig}{2}\frac{m_b}{M_W} \equiv$$



$$-ie\gamma_\mu \equiv$$

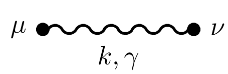


$$-ieQ_q\gamma_\mu\delta_{ij} \equiv \tag{12}$$

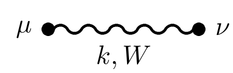


- Propagateurs:

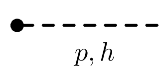
$$\frac{-ig^{\mu\nu}}{k^2} \equiv$$



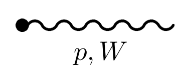
$$\frac{i}{k^2 - M_W^2}\left(-g^{\mu\nu} + \frac{k^\mu k^\nu}{M_W^2}\right) \equiv \tag{13}$$



$$\mathbf{1} \equiv$$



$$\epsilon^{(\lambda)}(p) \equiv \tag{14}$$



- Propriétés des vecteur de polarisations du W et du photon:

$$(\text{photon}) \sum_{\lambda=1}^{2} \epsilon_\mu^{(\lambda)}(p)\epsilon_\nu^{*(\lambda)}(p) = -g_{\mu\nu}, \qquad (\text{boson } W) \sum_{\lambda=1}^{3} \epsilon_\mu^{(\lambda)}(p)\epsilon_\nu^{*(\lambda)}(p) = -g_{\mu\nu} + \frac{p_\mu p_\nu}{M_W^2} \tag{15}$$

- Matrice de Dirac:

$$\mathrm{Tr}(\gamma^5) = \mathrm{Tr}(\gamma^5\gamma^\mu) = \mathrm{Tr}(\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu) = \mathrm{Tr}(\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\sigma) = 0, \qquad \mathrm{Tr}(\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\sigma\gamma^\lambda) = -i4\epsilon^{\mu\nu\sigma\lambda}. \tag{16}$$

et

$$\mathrm{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu}, \qquad \mathrm{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\sigma\gamma^\lambda) = 4(g^{\mu\nu}g^{\sigma\lambda} - g^{\mu\sigma}g^{\nu\lambda} + g^{\mu\lambda}g^{\nu\sigma}) \tag{17}$$

- Variables de MandelStam:

$$s = (p_1 + p_2)^2, \qquad t = (p_1 - p_3)^2, \qquad u = (p_1 - p_4)^2. \tag{18}$$

- Section efficace et taux de désintégration:

$$\sigma = \frac{1}{4\sqrt{(p_1\cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}} \int \overline{\sum} |M|^2 \frac{d^3\vec{p}_3}{(2\pi)^3 2E_3} \cdots \frac{d^3\vec{p}_n}{(2\pi)^3 2E_n} (2\pi)^4 \delta^4(p_3 + p_4 + \ldots + p_n - p_1 - p_2) \tag{19}$$

et

$$d\Gamma = \frac{1}{2m_1}|M|^2 \frac{d^3\vec{p}_2}{(2\pi)^3 2E_2} \cdots \frac{d^3\vec{p}_n}{(2\pi)^3 2E_n} (2\pi)^4 \delta^4(p_2 + p_3 + \ldots + p_n - p_1) \tag{20}$$

- Fonction δ de Dirac:

$$\delta[g(x)] = \frac{\sum_i \delta(x - x_i)}{|g'(x_i)|}. \tag{21}$$

où x_i sont les racines de $g(x) = 0$.

M. S. ZIDI
Bon courage, بالتّوفيق