$VA_2 = X_2 - CI_2 = \dots$
$= \boxed{400}$

$VA_3 = X_2 - CI_2 = 2000 - 1200$: (03)
$= \boxed{800}$

حل السلسلة 02

التمرين 01 :

1° أكمل الجدول :

مبيعات القطاعات (مخرجاتها)

مدخلات القطاعات (مشترياتها)

القطاع / إنتاج القطاع	ق1	ق2	ق3	الاستخدام الوسيط	الاستخدام النهائي	إجمالي الإنتاج
إنتاج القطاع (1)	X_{11} 200	X_{12} 200	X_{13} 0	400	600	1000
إنتاج ق(2)	X_{21} 400	X_{22} 1000	X_{23} 400	1800	200	2000
إنتاج القطاع (3)	X_{31} 50	X_{32} 400	X_{33} 800	1250	750	2000
الاستهلاك الوسيط CI	650	1600	1200			
المداخيل الأولية VA	350	400	800			
إجمالي الإنتاج X_j	1000	2000	2000			

- نعلم أن إنتاج كل فرع يستهلك أفقيا بين الاستخدام الوسيط والاستخدام النهائي : $X_i = \Sigma EI + \Sigma EF$

إجمالي إنتاج فرع X_i = مجموع الاستخدام الوسيط EI + إجمالي الاستخدام النهائي EF

إجمالي الاستخدام الوسيط للفرع معطى من الجدول ومن مصفوفة الاستهلاك الوسيط (مجموع كل صف) :

- EI للقطاع (1) $= X_{13} + X_{12} + X_{11}$
$= 0 + 200 + 200$
$= \boxed{400}$

- EI للقطاع (2) $= X_{23} + X_{22} + X_{21}$
$= \boxed{1800}$

- EI للقطاع (3) $= X_{33} + X_{32} + X_{31}$
$= \boxed{1250}$

حل السلسلة 02

التمرين 01 :

1° أكمل الجدول :

مبيعات القطاعات (مخرجاتها)

مدخلات القطاعات (مشترياتها)

القطاع / إنتاج القطاع	ف1	ف2	ف3	الاستخدام الوسيط	الاستخدام النهائي	إجمالي الإنتاج X_i
إنتاج القطاع (1)	X_{11} 200	X_{12} 200	X_{13} 0	400	600	1000
إنتاج ق (2)	X_{21} 400	X_{22} 1000	X_{23} 400	1800	200	2000
إنتاج القطاع (3)	X_{31} 50	X_{32} 400	X_{33} 800	1250	750	2000
الاستهلاك الوسيط CI	650	1600	1200			
المدخلات الأولية VA	350	400	800			
إجمالي الإنتاج X_j	1000	2000	2000			

- نعلم أن انتاج كل فرع يستهلك أفقيا بين الاستخدام الوسيط والاستخدام النهائي :

$X_i = \Sigma EI + \Sigma EF$

إجمالي انتاج فرع X_i = الاستخدام الوسيط EI3 + اجمالي الاستخدام النهائي EF3

إجمالي الاستخدام الوسيط للفرع معطى من الجدول ومن مصفوفة الاستهلاك الوسيط (مجموع كل صف) :

- EI للقطاع (1) = $X_{13} + X_{12} + X_{11}$

$= 0 + 200 + 200$

$= \boxed{400}$

- EI للقطاع (2) = $X_{23} + X_{22} + X_{21}$

$= \boxed{1800}$

- EI للقطاع (3) = $X_{33} + X_{32} + X_{31}$

$= \boxed{1250}$

- أما بالنسبة لإجمالي ~~الاستهلاك~~ الطلب النهائي فهو يعطى بطرح إجمالي الاستهلاك النهائي من إجمالي إنتاج كل الفرع أي:

$$X_i = EI_{\text{مخ}} + EF_{\text{مخ}}$$

$$\Leftarrow \quad EF_{\text{مخ}} = X_i - EI_{\text{مخ}}$$

الفرع 01 : $EF_{1\,\text{مخ}} = 1000 - 400 = \boxed{600}$

$EF_{2\,\text{مخ}} = 2000 - 1800 = \boxed{200}$

$EF_{3\,\text{مخ}} = 2000 - 1250 = \boxed{750}$

وهكذا يكون قد اكتمل كل صف ،

□ نعود الآن إلى الأعمدة :

إجمالي إنتاج الفرع X_j = Σ المدخلات الكلية

= Σ المدخلات الوسيطة + Σ المدخلات الأولية

= Σ الاستهلاك الوسيط CI + Σ استهلاك عناصر الإنتاج (العمل، رأس المال) (VA)

أي: $X_j = CI + VA$

$\Leftarrow \quad VA = X_j - CI$

بالنسبة للفرع (1): $VA_1 = X_1 - CI_1 = 1000 - 650 = \boxed{350}$

بالنسبة للفرع (02): $VA_2 = X_2 - CI_2 = 8000 - 1600 = \boxed{6400}$

بالنسبة للفرع (03): $VA_3 = X_2 - CI_2 = 2000 - 1200 = \boxed{800}$

إذن:

$$A = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,1 & 0 \\ 0,4 & 0,5 & 0,2 \\ 0,08 & 0,2 & 0,4 \end{bmatrix}$$

3 ج: كيف يكون انتاج القطاع في حال إرتفع الطلب النهائي:

$y_1 \nearrow$ ب 15٪ $\Leftarrow$ $y_1' = y_1 + 15\% \cdot y_1 = \boxed{690}$

$y_2 \nearrow$ ب 5٪ $\Leftarrow$ $y_2' = y_2 \cdot 5\% \cdot y_2 = \boxed{210}$

y_3 ب 10٪ $\Leftarrow$ $y_3' = y_3 + 10\% \cdot y_3 = \boxed{825}$

نستخدم المعادلة التالية لإجابة على هذا السؤال:

$$X_i = AX_i + y_i$$

هذه المعادلة مستنبطة من المراحل الأفقية لجدول المدخلات والمخرجات حيث: اجمالي انتاج الفرع $X_i = EIZ + EFZ$

حيث: y_i يمثل الطلب النهائي على القطاع

إذن: $X_i = AX_i + y_1 \Rightarrow X_i + AX_i = y_i$

$\Rightarrow X_i(I - A) = y_i$

$\Rightarrow X_i = \dfrac{y_i}{(I - A)}$

$\Rightarrow X_i = (I - A)^{-1} \cdot y_i$

I: مصفوفة الوحدة

$I - A$ مصفوفة ليونتيف.

$(I - A)^{-1}$ معكوس مصفوفة ليونتيف.

نحل هذه المعادلة المصفوفاتية نتحصل على قيم الانتاج X_i الضرورية لتلبية الارتفاع في الطلب النهائي Y_i

y_i معلوم والمجهول هو $(I - A)^{-1}$.

حساب $(I-A)^{-1}$:

أولا: حساب $(I-A)$: طرح A من مصفوفة الوحدة ،

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$I - A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0{,}2 & 0{,}1 & 0 \\ 0{,}4 & 0{,}5 & 0{,}2 \\ 0{,}05 & 0{,}2 & 0{,}4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0{,}8 & -0{,}1 & 0 \\ -0{,}4 & 0{,}5 & -0{,}2 \\ -0{,}05 & -0{,}2 & 0{,}6 \end{bmatrix}$$

ثانيا: حساب $(I-A)^{-1}$: قانون حساب معكوس المصفوفة هو :

$$(I-A)^{-1} = \frac{1}{\underbrace{\det(I-A)}_{\text{المحدد}}} \cdot \text{tranComatrice}\,(I-A)$$

1) حساب المحدد :

$$\det(I-A) = 0{,}8 \cdot \begin{vmatrix} 0{,}5 & -0{,}2 \\ -0{,}2 & 0{,}6 \end{vmatrix} - (-0{,}1) \cdot \begin{vmatrix} -0{,}4 & -0{,}2 \\ -0{,}05 & 0{,}6 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} -0{,}4 & 0{,}5 \\ -0{,}05 & -0{,}2 \end{vmatrix}$$

نختار: تثبيت صفا من صفوف المصفوفة ثم ~~نتحرك~~ نثبت للفرع (1) أو العمود الأول ليتبقى لنا مصفوفة 2×2 نضربها (B) بعكس تقاطع الصف المثبت مع الفرع (a1) ثم نتحرك إلى الفرع (a2) مع الإبقاء على الصف الأول مثبتا فنتحصل على مصفوفة صغيرة 2×2 نضربها (B) بعكس التقاطع وهكذا .

2 ـ ما معنى المعامل الفني:

المعامل الفني أو المعامل التكنولوجي يعني مقدار ما يستخدمه قطاع من مخرجات قطاع آخر من أجل انتاج وحدة واحدة من انتاجه، لرمز له a_{ij} { i يعبر عن الصفوف، j يعبر عن الأعمدة.

- يعني الكمية من مخرجات القطاع i اللازمة لإنتاج وحدة واحدة من انتاج القطاع j.
- أو a_{ij}: يعني أن القطاع "i" هو من أنتج المدخلات والقطاع "j" هو من استخدمها.

رياضياً:
$$a_{ij} = \frac{X_{ij}}{X_j}$$

a_{ij}: المعامل الفني

X_{ij}: كمية الإنتاج (i) المباع للقطاع (j)

X_j: إجمالي انتاج القطاع (j)

مصفوفة المعاملات الفنية من مصفوفات ما نارقها مكونة من هذه المعاملات الفنية، بما أن القطاع يضم 03 قطاعات فإن هذه المصفوفة تكون ثلاثية (3×3) ونرمز لها بـ: A

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} = \frac{X_{11}}{X_1} = \frac{200}{1000} & a_{12} = \frac{X_{12}}{X_2} = \frac{200}{2000} & a_{13} = \frac{X_{13}}{X_3} = \frac{0}{2000} \\ a_{21} = \frac{X_{21}}{X_1} = \frac{400}{1000} & a_{22} = \frac{X_{22}}{X_2} = \frac{1000}{2000} & a_{23} = \frac{X_{23}}{X_3} = \frac{400}{2000} \\ a_{31} = \frac{X_{31}}{X_1} = \frac{50}{1000} & a_{32} = \frac{X_{32}}{X_2} = \frac{400}{2000} & a_{33} = \frac{X_{33}}{X_3} = \frac{800}{2000} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0,8 & -0,1 & 0 \\ -0,4 & 0,5 & -0,2 \\ -0,05 & -0,2 & 0,6 \end{bmatrix}$$

نتحصل على : $0,8 \cdot \begin{vmatrix} 0,5 & -0,2 \\ -0,2 & 0,6 \end{vmatrix}$

$0,3 \qquad 0,04$

$= 0,8 \cdot \left[(0,5 \cdot 0,6) - (-0,2)\cdot(-0,2)\right]$

$= 0,8 \left[(0,3) - (+0,04)\right]$

$= 0,8\,(0,26) = \boxed{0,208}$ --- (1)

$$\begin{bmatrix} 0,8 & -0,1 & 0 \\ -0,4 & 0,5 & -0,2 \\ -0,05 & -0,2 & 0,6 \end{bmatrix}$$

نتحصل على : $(-0,1) \begin{vmatrix} -0,4 & -0,2 \\ -0,05 & 0,6 \end{vmatrix}$

$-0,24 \qquad +0,01$

$(-0,1) \cdot \left[(-0,4)\times(0,6) - (-0,2)\cdot(-0,05)\right]$

$(-0,1) \cdot \left[-0,24 - (+0,01)\right]$

$\boxed{+0,025}$ —— (2)

$$\begin{bmatrix} 0,8 & -0,1 & 0 \\ -0,4 & 0,5 & -0,2 \\ -0,05 & -0,2 & 0,6 \end{bmatrix}$$

نتحصل على : $0 \times \begin{vmatrix} -0,4 & -0,2 \\ -0,05 & 0,6 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow (3)$

$\det(I - A) = (1) - (2) + (1)$

$= 0,208 - 0,025 = \boxed{0,183}$

3 = حساب transcomatrice:

اولا: حساب مصفوفة المرافقات:

أ) نحسب مصفوفة المحيدد: (Matrice des mineurs)

- نثبت صف ثم نحرك الأعمدة:

الصف ① والعمود (1) يعطي لنا مصفوفة مصغرة: $\begin{bmatrix} 0,5 & +0,2 \\ -0,2 & +0,6 \end{bmatrix}$

الصف ① والعمود ② " " " $\begin{bmatrix} +0,4 & -0,2 \\ -0,05 & 0,6 \end{bmatrix}$

الصف ① والعمود الثالث " " " $\begin{bmatrix} -0,4 & +0,5 \\ -0,05 & -0,2 \end{bmatrix}$

صف ①

قيمة محددات هذه المصفوفة تعطي لنا الصف الاول من مصفوفة المحيدد.

الصف ② والعمود ① يعطي لنا مصفوفة $\begin{bmatrix} -0,1 & 0 \\ -0,2 & 0,6 \end{bmatrix}$

الصف ② والعمود ② $\begin{bmatrix} 0,8 & 0 \\ -0,05 & 0,6 \end{bmatrix}$

الصف ② والعمود ③ $\begin{bmatrix} 0,8 & -0,1 \\ -0,05 & -0,2 \end{bmatrix}$

الصف ②

(قيمة محددات هذه المصفوفة تعطي لنا الصف الثاني من مصفوفة المحيددة)

الصف ③ العمود ① : يعطي لنا: $\begin{bmatrix} -0,1 & 0 \\ 0,5 & -0,2 \end{bmatrix}$

الصف ③ العمود ② $\begin{bmatrix} 0,8 & 0 \\ -0,4 & -0,2 \end{bmatrix}$

الصف ③ العمود ③ يعطي لنا $\begin{bmatrix} 0,8 & -0,1 \\ -0,4 & 0,5 \end{bmatrix}$

الصف ③

فتكون لدينا هذه المصفوفة :

$$\begin{bmatrix} 0,26 & -0,25 & 0,105 \\ -0,06 & +0,48 & -0,165 \\ +0,02 & -0,16 & +0,36 \end{bmatrix}$$

خطوة: نضرب هذه المصفوفة (~~المرافقة~~) في مصفوفة الإشارة فنتحصل على المصفوفة المرافقة : أي :

$$\begin{bmatrix} 0,26 & -0,25 & 0,105 \\ -0,06 & 0,48 & -0,165 \\ 0,02 & -0,16 & 0,36 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0,26 & 0,25 & 0,105 \\ 0,06 & 0,48 & 0,165 \\ 0,02 & +0,16 & 0,36 \end{bmatrix}$$

أي كل عناصر المصفوفة موجبة .

3-: نستنتج مصفوفة المبدولة أو المقلوبة :
نحول صفوف المصفوفة السابقة أعمدة فنحصل على :

$$\text{tran comatrice} \Leftarrow \begin{bmatrix} 0,26 & 0,06 & 0,02 \\ 0,25 & 0,48 & 0,16 \\ 0,105 & 0,165 & 0,36 \end{bmatrix}$$

ثم: نحسب معكوس مصفوفة $(I-A)^{-1}$

$$(I-A)^{-1} = \frac{1}{\det} \cdot \text{transComatrice} = \frac{1}{0{,}183} \cdot \begin{bmatrix} 0{,}26 & 0{,}06 & 0{,}02 \\ 0{,}25 & 0{,}48 & 0{,}16 \\ 0{,}105 & 0{,}165 & 0{,}36 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{0{,}26}{0{,}183} & \frac{0{,}06}{0{,}183} & \frac{0{,}02}{0{,}183} \\ \frac{0{,}25}{0{,}183} & \frac{0{,}48}{0{,}183} & \frac{0{,}16}{0{,}183} \\ \frac{0{,}105}{0{,}183} & \frac{0{,}165}{0{,}183} & \frac{0{,}36}{0{,}183} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1{,}42 & 0{,}327 & 0{,}109 \\ 1{,}366 & 2{,}622 & 0{,}874 \\ 0{,}573 & 0{,}901 & 1{,}967 \end{bmatrix}$$

لدينا:

$$X_i = (I-A)^{-1} \cdot y_i$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}42 & 0{,}327 & 0{,}109 \\ 1{,}366 & 2{,}622 & 0{,}874 \\ 0{,}573 & 0{,}901 & 1{,}967 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 = 620 \\ y_2 = 210 \\ y_3 = 825 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,42 \cdot 690 + 0,327 \cdot (210) + 0,109 \cdot 825 \\ 1,366 \times 690 + 2,622 \cdot 210 + 0,874 \cdot 825 \\ 0,573 \times 690 + 0,901 \cdot 210 + 1,97 \cdot 825 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 979,8 + 68,67 + 89,925 \\ 942,54 + 550,62 + 721,08 \\ 395,37 + 189,21 \quad 1622,77 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1138,395 \\ 2214,21 \\ 2207,35 \end{pmatrix}$$

وهي قيم الإنتاج الجديد اللازم لتلبية التغير الطلب النهائي.

التمرين 02: مثال (قطاعين) ← اقتصاد مغلق.

1°) تكملة الجدول:

القطاع	1	2	EI	الطلب النهائي EF	اجمالي الانتاج
1	240 x_{11}	750 x_{12}	990	210	1200
2	720 x_{21}	450 x_{22}	1170	330	1500
المدخلات الوسيطة CI	960	1200	2160		
المدخلات الاولية VA	240	300			
اجمالي الانتاج	1200	1500			

بنفس طريقة التمرين الاول لنتم ملئ الجدول:

$$X_1 = EI + EF$$

$$X_1 = EI_1 + EF_1 \Rightarrow EF_1 = X_1 - EI_1 = 1200 - 990 = \boxed{210}$$

$$X_2 = EI_2 + EF_2 \Rightarrow EF_2 = X_2 - EI_2 = 1500 - 1170 = \boxed{330}$$

* بينما لحساب VA نقوم بطرح $\sum CI$ من اجمالي الانتاج.

$$VA_1 = X_1 - CI_1 = 1200 - 960 = \boxed{240}$$

$$VA_2 = X_2 - CI_2 = 1500 - 1200 = \boxed{300}$$

ع/ كيف يكون الإنتاج عندما يتغير الطلب النهائي على النحو الآتي:

y_1 ← ترتفع إلى 320 ⇐ y_1'

y_2 ← تنخفض إلى 299

إذا نفس الشيء علماً أن حل المعادلة

$$X_1 = (I-A)^{-1} \cdot Y_i$$

Y_i معلوم و $(I-A)^{-1}$ مجهول.

أولاً: حساب $(I-A)$

$$(I-A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

حساب A مصفوفة المعاملات الفنية:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} = \frac{X_{11}}{X_1} & a_{12} = \frac{X_{12}}{X_2} \\ a_{21} = \frac{X_{21}}{X_1} & a_{22} = \frac{X_{22}}{X_2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{240}{1200} & \frac{750}{1500} \\ \frac{720}{1200} & \frac{450}{1500} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,5 \\ 0,6 & 0,3 \end{bmatrix}$$

0,2 يعني أنه لإنتاج وحدة واحدة من إنتاج القطاع (2) نستخدم 0,2 وحدة من إنتاج (1) كاستهلاك وسيط

وحدة واحدة من (2) تحتاج إلى 20% من (1) + 60% من القطاع (2) والباقي مدخلات أولية VA

هذه المصفوفة تحقق شروط نموذج ليونتيف: - مجموع أعمدتها < 1

← عناصرها غير سالبة

$$(I-A)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0,2 & 0,5\\ 0,6 & 0,3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0,8 & -0,5\\ -0,6 & 0,7\end{bmatrix}$$

حساب $(I-A)^{-1}$: بالنسبة للمصفوفة 2x2 فإننا نستخدم القانون الآتي:

$$B=\begin{bmatrix}\alpha & \gamma\\ \beta & \Delta\end{bmatrix}$$

$$B^{-1}=\frac{1}{\det B}\begin{bmatrix}\Delta & -\gamma\\ -\beta & \alpha\end{bmatrix}$$

$$(I-A)^{-1}=\frac{1}{\det(I-A)}\cdot\begin{bmatrix}0,7 & +0,5\\ +0,6 & 0,8\end{bmatrix}$$

$$\det(I-A)=(0,8\times 0,7)-(-0,6)\times(-0,5)$$
$$=\boxed{0,261}$$

$$(I-A)^{-1}=\frac{1}{0,261}\cdot\begin{bmatrix}0,7 & +0,5\\ 0,6 & 0,8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{0,7}{0,2619} & \frac{0,5}{0,261}\\ \frac{0,6}{0,261} & \frac{0,8}{0,261}\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}2,681 & 1,9157\\ 2,2988 & 3,0651\end{bmatrix}$$

$$X_i = (I-A)^{-1} \cdot y_i$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 2{,}6819 & 1{,}9157 \\ 2{,}2988 & 3{,}0651 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 320 \\ 299 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2{,}6819 \cdot 320 + 1{,}9157 \cdot 299 \\ 2{,}2988 \cdot 320 + 3{,}0651 \cdot 299 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 858{,}208 + 572{,}794 \\ 735{,}616 + 916{,}464 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1431 \\ 1652 \end{pmatrix}$$

ملاحظة: نلاحظ أن كلا القطاعين عرفا إرتفاع في الإنتاج (تغيرات إنتاجهما) رغم أن القطاع (2) لم يشهد ارتفاعا في الطلب النهائي بل انخفاضا وهذا بسبب وجود علاقات تشابكية بين القطاعين

$X_1 \uparrow 1431$ و $X_2 \uparrow$ إلى 1652

فالقطاع X_1 يستخدم منتوجات X_2 كطلب وسيط للإنتاج

إذ يمثل 60% من الاستهلاكات الوسيطية للقطاع 01)

التمرين الثالث: الرابع في السلسلة (2)

يختلف هذا التمرين عن التمارين السابقة لأنه يدرج الواردات أي يحلل اقتصاد مفتوح عن العالم الخارجي وهذا ما يجعل الحسابات تتغير:

⇐ عند حساب المعاملات الفنية نستخدم معه إجمالي الإنتاج صافي من الواردات وليس اجمالي الإنتاج أي X_1 و X_2 و X_3 لا يتضمن الواردات M_1 ، M_2 ، M_3.

⇐ عند حساب آثار الطلب النهائي نستخدم أيضا صافي انتاج الفروع لأننا بصدد دراسة تحليل التغير في الطلب النهائي على الإنتاج المحلي وليس على الإنتاج ~~...~~ الأجنبي.

* أولا: تحديد مصفوفة المعاملات الفنية:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} = \frac{X_{11}}{X_1} & a_{12} = \frac{X_{12}}{X_2} & a_{13} = \frac{X_{13}}{X_3} \\ a_{21} = \frac{X_{21}}{X_1} & a_{22} = \frac{X_{22}}{X_2} & a_{23} = \frac{X_{23}}{X_3} \\ a_{31} = \frac{X_{31}}{X_1} & a_{32} = \frac{X_{32}}{X_2} & a_{33} = \frac{X_{33}}{X_3} \end{bmatrix}$$

إذا: حسب الملاحظة السابقة فإن

$X_i = X_i -$ الواردات (Z_i)

⇐ بالنسبة للقطاع (1) $X_1 = X_1 - Z_1 = 250 - 50 = \boxed{200}$

⇐ القطاع (2) $X_2 = X_2 - Z_2 = 750 - 150 = \boxed{600}$

$X_3 = X_3 - Z_3 = 330 - 30 = \boxed{300}$

إذا المصفوفة A تساوي :

$$A = \begin{bmatrix} \frac{88}{200} & \frac{6}{600} & \frac{15}{300} \\ \frac{22}{200} & \frac{258}{600} & \frac{39}{300} \\ \frac{8}{200} & \frac{60}{600} & \frac{48}{300} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}44 & 0{,}01 & 0{,}05 \\ 0{,}11 & 0{,}43 & 0{,}13 \\ 0{,}04 & 0{,}10 & 0{,}16 \end{bmatrix}$$

ثانيا : استنتاج مصفوفة ليونتيف :

$$I - A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0{,}44 & 0{,}01 & 0{,}05 \\ 0{,}11 & 0{,}43 & 0{,}13 \\ 0{,}04 & 0{,}10 & 0{,}16 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0{,}66 & -0{,}01 & -0{,}05 \\ -0{,}11 & 0{,}57 & -0{,}13 \\ -0{,}04 & -0{,}10 & 0{,}84 \end{bmatrix}$$

ثالثا : حساب $(I-A)^{-1}$

لدينا القانون [illegible] $(I-A)^{-1} = \frac{1}{\det(I-A)}$

1) حساب $\det(I-A)$

$$\det(I-A) = 0{,}66 \begin{vmatrix} 0{,}57 & -0{,}13 \\ -0{,}10 & 0{,}84 \end{vmatrix} - (-0{,}01) \begin{vmatrix} -0{,}11 & -0{,}13 \\ -0{,}04 & 0{,}84 \end{vmatrix} + (-0{,}15) \begin{vmatrix} -0{,}11 & 0{,}57 \\ -0{,}04 & -0{,}10 \end{vmatrix}$$

$$= 0{,}66 \cdot \left[(0{,}57 \cdot 0{,}84) - ((-0{,}1)\cdot(-0{,}13))\right] - (-0{,}01)\left[((-0{,}11)\cdot 0{,}84) - ((-0{,}13)(\text{[illegible]}\right.$$

$$+ (-0{,}15) \cdot \left[((-0{,}11)\cdot(-0{,}10)) - ((0{,}57)\cdot(-0{,}04))\right]$$

$$\det(I-A) = 0{,}3074 - 0{,}000976 - 0{,}00169 =$$

$$= \underline{\underline{0{,}3047}}$$

ثم حساب المصفوفة transcomatrice

لحسابها يجب اتباع الخطوات التالية :

أ) حساب مصفوفة المحيد (المصفوفة المصغرة)

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}57 & -0{,}13 \\ -0{,}1 & 0{,}84 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -0{,}11 & -0{,}13 \\ -0{,}04 & 0{,}84 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -0{,}11 & 0{,}57 \\ -0{,}04 & -0{,}1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -0{,}01 & -0{,}05 \\ -0{,}1 & 0{,}84 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0{,}66 & -0{,}05 \\ -0{,}04 & 0{,}84 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0{,}66 & -0{,}01 \\ -0{,}04 & -0{,}1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -0{,}01 & -0{,}05 \\ 0{,}57 & -0{,}13 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0{,}66 & -0{,}05 \\ -0{,}11 & -0{,}13 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0{,}66 & -0{,}01 \\ -0{,}11 & 0{,}57 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0{,}4658 & -0{,}0976 & 0{,}0338 \\ -0{,}0134 & 0{,}5524 & -0{,}0656 \\ 0{,}0298 & -0{,}0943 & 0{,}374 \end{bmatrix}$$

لدينا :

$$X_i = AX_i + y_i$$

$$\Rightarrow X_i - AX_i = y_i$$

$$\Rightarrow X_i (I-A) = y_i$$

$$\Rightarrow X_i = (I-A)^{-1} \cdot y_i$$

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}1247 & 0{,}0439 & 0{,}0978 \\ 0{,}3203 & 1{,}8129 & 0{,}2996 \\ 0{,}1109 & 0{,}2152 & 1{,}227 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

هنا أيضا الطلب النهائي عبارة عن ~~...~~ نكون صافيا أي نحسب ذلك الذي يُلبيه الانتاج للحاجات، أي يجب أن نطرح منه الواردات كالتالي:

$$y'_1 = y_1 - Z_1 = 148 - 50 = 91$$

$$y'_2 = y_2 - Z_2 = 431 - 150 = 281$$

$$y'_3 = y_2 - Z_3 = 214 - 30 = 184$$

وبالتالي الزيادة ستحسب على هذه القيم الجديدة كالتالي:

$\bar{y}_1 = \bar{y}_1 + \cancel{20}10\%\, \bar{y}_1 = 91 + 91 \times 10\% = \underline{100}$

$\bar{y}_2 = \bar{y}_2 + 5\%\, y_2 = 281 + 5\% \cdot 281 = \underline{295}$

$\bar{y}_3 = \boxed{184}$

نعوض اذا :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1,5287 & 0,0439 & 0,0978 \\ 0,3203 & 1,8129 & 0,2996 \\ 0,1109 & 0,2152 & 1,227 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 \\ 295 \\ 184 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1,5287 \cdot 100 + 0,0439 \cdot 295 + 0,0978 \cdot 184 \\ 0,3203 \cdot 100 + 1,8129 \cdot 295 + 0,2996 \cdot 184 \\ 0,1109 \cdot 100 + 0,2152 \cdot 295 + 1,227 \cdot 184 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 152,87 + 12,95 + 17,99 \\ 32,03 + 534,80 + 55,12 \\ 11,09 + 63,484 + 225,768 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 184 \\ 624 \\ 300 \end{pmatrix}$$

٤) نضرب المصفوفة المحدد أو المصفوفة في مصفوفة الإشارة $\begin{bmatrix} + & - & + \\ + & \pm & + \end{bmatrix}$ فنحصل على مصفوفة كل عناصرها موجبة .

$$\begin{bmatrix} 0,4658 & 0,0976 & 0,0338 \\ 0,0134 & 0,5524 & 0,0656 \\ 0,0298 & 0,0913 & 0,374 \end{bmatrix}$$

٥) حساب المصفوفة المقلوبة (مقلوب المصفوفة)
أي صفوفها تصبح أعمدة

$$\text{tranCompose} \begin{bmatrix} 0,4658 & 0,0134 & 0,0298 \\ 0,0976 & 0,5524 & 0,0913 \\ 0,0338 & 0,0656 & 0,374 \end{bmatrix}$$

$$(I-A)^{-1} = \frac{1}{\det(I-A)} \cdot \begin{bmatrix} 0,4658 & 0,0134 & 0,0298 \\ 0,0976 & 0,5524 & 0,0913 \\ 0,0338 & 0,0656 & 0,374 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1,5287 & 0,0439 & 0,0978 \\ 0,3203 & 1,8129 & 0,2996 \\ 0,1109 & 0,2152 & 1,227 \end{bmatrix}$$

Shot on realme 10
2024 05 04 22:20