TD N° 3

Exo 1 :

1) $8\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) + 1 = (2n+1)^2$

2) $(a \leq b) \Rightarrow \begin{cases} 2a < a+b \\ a+b < 2b \end{cases}$ — 1

D'autre part,

$(a \leq b) \Rightarrow \begin{cases} a^2 \leq ab \\ ab \leq b^2 \end{cases}$.

Exo 2 :

1) si n est pair donc $n(n+1)$ est divisible par 2.

si n est impair alors $(n+1)$ est pair et $n(n+1)$ est divisible par 2.

2) Si $n > 0$, les fcts f_n se comportent de la même manières, elles ocillent entre $-\infty$ et $+\infty$

si $n < 0$, elles tendent vers 0 car

$$-x^n < x^n \sin x < x^n$$

si $n = 0$, $f_0(x) = \sin x$ ocille entre -1 et 1.

Exo 3

1)

Contre exemple :

Rectangle 1

Lg : 4 , LR = 0,5

Rectangle 2

Lg : 2 , LR = 1

2) On prend $x = -4$.

Exo 4 :

1) On suppose que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$

$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ t.q. $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$

et p, q premier entre eux.

On a :

$$\sqrt{2}\, q = p$$

$$2q^2 = p^2$$

$\Rightarrow p^2$ est pair $\Rightarrow p$ est pair

$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} ;\ p = 2k$

$p^2 = 4k^2$.

et donc

$2q^2 = 4k^2 \Rightarrow q^2 = 2k^2$

$\Rightarrow q^2$ pair $\Rightarrow q$ est pair

Contradiction.

Exo 6 Raisonnement par récurrence

1) On montre par récurrence que $\forall n \geq 1, \quad 2^n > n$. — $P(n)$

pour $n = 1$: $2 > 1$ donc $P(1)$ est vraie.

On suppose que $P(n)$ est vraie et on montre que $P(n+1)$ est vrai.

i.e. $2^{n+1} > n+1$?

$$2^{n+1} = 2 \times 2^n > 2n = n+n > n+1$$

donc $P(n+1)$ est vraie.

D'où $P(n)$ vraie $\forall n \geq 1$.

2) Montrons que $\forall n \geq 1, \quad (1+x)^n \geq 1+nx$.

Pour $n = 1$: $(1+x)^1 \geq 1+x$ donc $P(1)$ vrai.

Supposons $P(n)$ vrai et montrons $P(n+2)$.

$P(n+1)$: $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$?

$$(1+x)^{n+2} = (1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x)$$

$$= 1+(n+1)x + nx^2$$

$$\geq 1+(n+1)x.$$

$\Rightarrow$ $P(n+1)$ vrai

D'où $\forall n \geq 1, \quad (1+x)^n \geq 1+nx$.

Inég. de Cauchy-Schwarz.

si $\sum_{i=1}^{n} b_i^2 = 0$ l'inég est évidente

car : $(\sum a_i^2)(\sum b_i^2) = 0$

et $\sum b_i^2 = 0 \Leftrightarrow 0^2 + 0^2 + \cdots = 0$

$\Rightarrow b_i = 0 \quad \forall i$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = 0.$

Si $\sum_{i=1}^{n} b_i^2 \neq 0$. On a :

$$\underbrace{\sum_{j=1}^{n} \left(\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) a_j - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right) b_j \right)^2}_{I} \geq 0.$$

$$I = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^2 a_j^2 - 2\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)\left(\sum a_i b_i\right) a_j b_j + \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 b_j^2$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^2 \left(\sum_{j=1}^{n} a_j^2\right) + \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \left(\sum_{j=1}^{n} b_j^2\right) - 2\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} a_j b_j\right)$$

On remplace j par i.

$$I = \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^2 \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) + \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) - 2\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^2 \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \geq 0$$

Puisque $\sum_{i=1}^{n} b_i^2 \neq 0$, on divise par $\sum_{i=1}^{n} b_i^2$

$$\Rightarrow \left(\sum b_i^2\right)\left(\sum a_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \geq 0$$

On soustrait $(\sum a_i b_i)^2$ des deux côté on obtient l'inég de Cauchy-Schwarz.

2ème méthode : $\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2}_{A} \leq \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)}_{B}$

Pour $n = 2$:

$B = a_1^2 b_1^2 + a_2^2 b_2^2 + a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2.$

$A = a_1^2 b_1^2 + a_2^2 b_2^2 + 2 a_1 b_1 a_2 b_2.$

$B - A = (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 \geq 0. \Rightarrow B \geq A$

Pour $n = 3$:

$$B = a_1^2 b_1^2 + a_2^2 b_2^2 + a_3^2 b_3^2 + a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2 + a_2^2 b_3^2 + a_3^2 b_2^2 + a_1^2 b_3^2 + a_3^2 b_1^2$$

$$A = a_1^2 b_1^2 + a_2^2 b_2^2 + a_3^2 b_3^2 + 2 a_1 b_1 a_2 b_2 + 2 a_1 b_1 a_3 b_3 + 2 a_2 b_2 a_3 b_3.$$

$$B - A = (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 + (a_1 b_3 - a_3 b_1)^2 + (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 \geq 0 \Rightarrow B \geq A$$

On remarque que

$$A = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 b_i^2 - 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i b_i a_j b_j.$$

$$B = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 b_i^2 + \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} a_i^2 b_j^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i^2 b_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i^2 b_j^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_j^2 b_i^2.$$

$$B - A = \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i^2 b_j^2 + a_j^2 b_i^2 - 2 a_i b_j a_j b_i$$

$$= \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_i b_j - a_j b_i)^2 \geq 0$$

D'où l'inég désirée.