جامعـــــــــة عبد الحق بن حمودة جـيـجـــــــــــل
كلية العلوم الدقيقة والإعلام الآلي
قسم التعليم الأساسي للرياضيات و الإعلام الآلي مارس **2021**

امتحـــان مقياس "الجــــــبر 1"

التمــرين الأول: (5 نقاط)

أ- عين جدول الحقيقة للقضية $(P \wedge R) \Rightarrow Q$.

.

			(
1	1	1	?
1	1	0	?
1	0	1	?
1	0	0	?
0	1	1	?
0	1	0	?
0	0	1	?
0	0	0	?

ب- لتكن الدالة العبارية P_n معرفة بـ $\forall\, n \in \mathbb{N}$: أولي $n \Rightarrow \left[n = 2 \text{ أو } \left(\text{فردي} \quad n\right)\right]$

(1)- اكتب نفي القضية P_n

(2)-اكتب عكس نقيض القضية P_n

التمــرين الثاني: (5 نقاط)

ليكن القانون Δ معرف على $G = \left]-\infty, 1\right[$ بـ $a\Delta b = a + b - a.b$

1- برهن المتراجحة $\forall (a,b) \in G^2 \colon a\Delta b - 1 < 0$ و استنتج أن Δ قانون تركيب داخلي على G.

<u>توجيه</u> : يمكن كتابة $\boldsymbol{a\Delta b - 1}$ على شكل جداء

2- برهن أن (G, Δ) لها بنية الزمرة التبديلية

التمــرين الثالث: (5 نقاط)

لتكن $\mathcal{R}$ علاقة معرفة على $\mathbb{R}$ بــ : $\forall (\,x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x\mathcal{R}y \;\Leftrightarrow (\cos x)^2 + (\sin y)^2 = 1$

1- برهن أن $\mathcal{R}$ علاقة تكافؤ على $\mathbb{R}$.

2- عين صنف التكافؤ $\dot{0}$.

للتذكير: $\boldsymbol{\forall\, x \in \mathbb{R} \colon (\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1}$

التــمــرين الرابع : (5 نقاط)

ليكن $f \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ تطبيق معرف بـ $f(x) = x^2 - 1$

1- احسب الصورة المباشرة $f(\{-1,1\})$ و استنتج ان أن التطبيق f غير متباين.

2- احسب الصورة العكسية $f^{-1}(\{-2\})$ و استنتج ان أن التطبيق f غير غامر.

3- ليكن $g \colon [0, \infty[\longrightarrow [-1, \infty[$ تطبيق معرف بـ $g(x) = f(x)$

برهن أن التطبيق g متباين و غامر و استنتج أنه تقابلي. عين التطبيق العكسي g^{-1}

بالتوفيق

الحل النموذجي لامتحان الجبر 1 (مارس 2021)

التمــرين الأول :

P	Q	R	$P \wedge R$	$\overline{P \wedge R}$	$[(P \wedge R) \Rightarrow Q] \Leftrightarrow [(\overline{P \wedge R}) \vee Q]$
1	1	1	1	0	1
1	1	0	0	1	1
1	0	1	1	0	0
1	0	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1
0	1	0	0	1	1
0	0	1	0	1	1
0	0	0	0	1	1

2.00

(1)- كتابة نفي القضية P_n: بما أن $\overline{P \Rightarrow Q} \equiv \overline{\bar{P} \vee Q} \equiv P \wedge \bar{Q}$ ، $\overline{P \vee Q} = \bar{P} \wedge \bar{Q}$ و $\overline{\forall n: P_n} \equiv \exists n: \overline{P_n}$

$$\overline{\forall\, n \in \mathbb{N}: \text{أولي } n \Rightarrow \left[n = 2 \text{ أو } \left(\text{فردي} \quad n\right)\right]} \equiv \exists\, n \in \mathbb{N}: \left(\text{أولي } n\right) \wedge \overline{\left[n = 2 \text{ أو } \left(\text{فردي} \quad n\right)\right]}$$

$$\equiv \exists\, n \in \mathbb{N}: \left(\text{أولي } n\right) \wedge \left[\overline{n = 2} \ \wedge \ \overline{\left(\text{فردي} \quad n\right)}\right] \equiv \exists\, n \in \mathbb{N}: \left[\left(\text{أولي } n\right) \wedge (n \neq 2) \ \wedge \ \left(\text{زوجي} \quad n\right)\right]$$

اذن نفي القضية P_n هي القضية $\exists\, n \in \mathbb{N}: \left[\left(\text{أولي } n\right) \wedge (n \neq 2) \ \wedge \ \left(\text{زوجي} \quad n\right)\right]$ 2.00

(2)-كتابة عكس نقيض القضية P_n. لدينا عكس نقيض القضية $P \Rightarrow Q$ هو $\bar{Q} \Rightarrow \bar{P}$

$$\forall\, n \in \mathbb{N}: \left\{\left[\overline{\left[n = 2 \text{ أو } \left(\text{فردي} \quad n\right)\right]} \Rightarrow \overline{\text{أولي } n}\right] \equiv \left[\left[\overline{n = 2} \ \wedge \ \overline{\left(\text{فردي} \quad n\right)}\right] \Rightarrow \left(\text{زوجي} \quad n\right)\right]\right\}$$

اذن عكس النقيض هو $\forall\, n \in \mathbb{N}: (n \neq 2) \ \wedge \ \left(\text{زوجي} \quad n\right) \Rightarrow \left(\text{غير اولي} \quad n\right)$ 1.00

التمــرين الثاني:

ليكن القانون Δ معرف على $G =]-\infty, 1[$ بـ $a\Delta b = a + b - a.b$

1- لدينا $\forall (a, b) \in G^2\ a\Delta b - 1 = a + b - a.b - 1 = (a - 1)(1 - b)$

$(a, b) \in G^2 \Rightarrow (a - 1) < 0 \ \wedge (1 - b) > 0 \Rightarrow a\Delta b - 1 < 0$.

$(a, b) \in G^2 \Rightarrow a\Delta b - 1 < 0 \Rightarrow a\Delta b < 1 \Leftrightarrow a\Delta b \in G$. 1.00

2- تكون (G, Δ) زمرة تبديلية اذا كان Δ قانون تركيب داخلي،تجميعي،تبديلي يقبل عنصر حيادي و لكل عنصر نظير في G

يكون Δ قانون تركيب داخلي $\Leftrightarrow [\forall (a, b) \in G^2 : a\Delta b \in G]$ و هو محقق من السؤال الاول. 0.25

يكون Δ تبديلي اذا كان $\forall (a, b) \in G^2 : a\Delta b = b\Delta a$

0.50 $a\Delta b = a + b - a.b = b + a - ba = b\Delta a$.

يكون Δ تجميعي اذاكان $\forall (a, b, c) \in G^3 : (a\Delta b)\Delta c = a\Delta (b\Delta c)$

$(a\Delta b)\Delta c = (a\Delta b) + c - (a\Delta b)c = a + b - ab + c - ac - bc + abc \quad (1)$.

$a\Delta (b\Delta c) = a + (b\Delta c) + -a(b\Delta c) = a + b + c - bc - ab - ac + abc \quad (2)$.

بالمقارنة نجد Δ تجميعي 0.75

. Δ يقبل عنصر حيادي $\Leftrightarrow [\exists e \in G, \forall a \in G: a\Delta e = e\Delta a = a]$ بما أن Δ تبديلي نكتفي بحل معادلة واحدة

$a\Delta e = a \Leftrightarrow a + e - ae = a \Leftrightarrow e(1 - a) = 0\ et\ a \neq 1 \Rightarrow e = 0$. 1.00

لكل عنصر نظير $\Leftrightarrow [\forall a \in G, \exists a' \in G: a\Delta a' = a'\Delta a = 0]$ يكون Δ تبديلي نكتفي بحل معادلة واحدة

$a\Delta a' = 0 \Leftrightarrow a + a' - aa' = 0 \Leftrightarrow a'(1 - a) = -a$ و $a \neq 1 \Rightarrow a' = -\frac{a}{1-a}$.

$a' - 1 = -\frac{a}{1-a} - 1 = \frac{-1}{1-a} < 0 \Rightarrow a' \in G$ و منه (G, Δ) زمرة تبديلية 1.50

التمــرين الثالث:

لتكن $\mathcal{R}$ علاقة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2: x\mathcal{R}y \Leftrightarrow (\cos x)^2+(\sin y)^2=1$

إثبات أن $\mathcal{R}$ علاقة تكافؤ: ($\mathcal{R}$علاقة تكافؤ) $\Leftrightarrow$ ($\mathcal{R}$ انعكاسية , تناظرية, متعدية) 0.50

- ($\mathcal{R}$ انعكاسية) $\Leftrightarrow$ $(\forall \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}: \boldsymbol{x\mathcal{R}x})$
-

لدينا $\forall \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}: (\cos x)^2+(\sin x)^2=1$ ومنه $\boldsymbol{x\mathcal{R}x}$ ، اذن $\mathcal{R}$ انعكاسية. 0.50

- ($\mathcal{R}$ تناظرية) $\Leftrightarrow$ $(\forall(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in\mathbb{R}^2: \boldsymbol{x\mathcal{R}y}\Rightarrow \boldsymbol{y\mathcal{R}x})$

لدينا $\boldsymbol{x\mathcal{R}y}\Rightarrow(\cos)^2+(\sin y)^2=1\Rightarrow \overbrace{\mathbf{1}-(\sin x)^2}^{(\cos x)^2}+\overbrace{1-(\cos y)^2}^{(\sin y)^2}=1\Rightarrow(\cos y)^2+(\sin x)^2=1$

اذن $\boldsymbol{y\mathcal{R}x}$ و منه $\mathcal{R}$ علاقة تناظرية. 1.25

- ($\mathcal{R}$ متعدية) $\Leftrightarrow$ $(\forall(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\in\mathbb{R}^3: \boldsymbol{x\mathcal{R}y}\wedge\boldsymbol{y\mathcal{R}z}\Rightarrow\boldsymbol{x\mathcal{R}z})$

لدينا: $\left.\begin{array}{l}\boldsymbol{x\mathcal{R}y}\Leftrightarrow(\cos)^2+(\sin y)^2=1\\ \boldsymbol{y\mathcal{R}z}\Leftrightarrow(\cos y)^2+(\sin z)^2=1\end{array}\right\}\overset{\text{الجمع}}{\Rightarrow}(\cos x)^2+1+(\sin z)^2=2\Rightarrow(\cos x)^2+(\sin z)^2=1\Rightarrow\boldsymbol{x\mathcal{R}z}$

و منه $\mathcal{R}$ علاقة متعدية فهي علاقة تكافؤ. 1.25

2- تعين صنف التكافؤ

$\dot{0}=\{x\in\mathbb{R}: \boldsymbol{x\mathcal{R}0}\}=\{x\in\mathbb{R}:(\cos x)^2+0=\dot{1}\}=\{x\in\mathbb{R}:\cos x=\pm1\}=\{x=k\pi,k\in\mathbb{Z}\}$ 1.5

التــمــرين الرابع :

ليكن $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ تطبيق معرف بـ $f(x)=x^2-1$

1- حساب الصورة المباشرة $f(\{-1,1\})=\{f(-1),f(1)\}=\{0\}$ اذن التطبيق f غير متباين لأن $f(-1)=f(1)$ 1.00

2- حساب الصورة العكسية $f^{-1}(\{-2\})=\{x\in\mathbb{R}:f(x)=-2\}=\{x\in\mathbb{R}:x^2=-1\}=\emptyset$ و نستنتج ان التطبيق f غير غامر لأن المعادلة $f(x)=-2$ ليست لها حلول 1.00

أ) - (g متباين) $\Leftrightarrow$ $(\forall(,\boldsymbol{y})\in[\mathbf{0},\infty[^{\mathbf{2}}: \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})\Rightarrow\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y})$

لدينا: $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})\Rightarrow x^2-1=y^2-1\Rightarrow x^2=y^2\Rightarrow\boldsymbol{x}=\pm\boldsymbol{y}$ لكن $\boldsymbol{x}\geq\mathbf{0}$ و $\boldsymbol{y}\geq\mathbf{0}\Rightarrow\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$

ومنه $\boldsymbol{g}$ متباين. 1.00

ب) ($\boldsymbol{g}$ غامر) $\Leftrightarrow$ $(\forall\boldsymbol{y}\in[-\mathbf{1},\infty[,\exists\boldsymbol{x}\in[\mathbf{0},\infty[:\boldsymbol{y}=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}))$

لدينا : $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\Rightarrow:\boldsymbol{y}=x^2-1\Leftrightarrow x^2=\boldsymbol{y}+\mathbf{1}\geq\mathbf{0}$ و $\boldsymbol{x}\geq\mathbf{0}\Rightarrow\boldsymbol{x}=\sqrt{\mathbf{y}+\mathbf{1}}\in[\mathbf{0},\infty[$

ومنه $\boldsymbol{g}$ غامر. 1.00

<u>إثبات أن $\boldsymbol{g}$ تقابلي</u>: ($\boldsymbol{g}$ تقابلي) $\Leftrightarrow$ ($\boldsymbol{g}$ غامر و متباين) و هو محقق.

تعيين التطبيق العكسي $\boldsymbol{g}^{-\mathbf{1}}$

مما سبق نجد أن $\boldsymbol{g}^{-\mathbf{1}}:[-\mathbf{1},\infty[\longrightarrow[\mathbf{0},\infty[$. بحيث $\boldsymbol{y}\longmapsto\boldsymbol{x}=\boldsymbol{g}^{-\mathbf{1}}(\boldsymbol{y})=\sqrt{\boldsymbol{y}+\mathbf{1}}$ 1.00