

Ch 01 : Méthodes du raisonnement mathématiques1. Notion de logique :1.1. Propositions et prédicats.Rappel :

Soit E un ensemble et soit a un élément de E .

On dit que a appartient à E et on note : $a \in E$.

Définition 1.1 : (Proposition - Assertion -)

Une proposition est un énoncé mathématique auquel on peut attribuer une valeur de vérité

Vrai (V ou 1) ou Faux (F ou 0)

P
1
0

mais jamais les deux à la fois.

On note une proposition par les lettres : $P, Q, R, \dots$

Exemple :

1. "Alger est la capitale de l'Algérie," est vrai (1).

2. "18 est un multiple de 3", est vrai (1).

3. "9 // // // 2", est faux (0).

Définition 1.2 (Prédicat)

Un prédicat est un énoncé mathématique contenant une variable au plus, tel que quand on remplace chacune des variables par un élément donné d'un ensemble,

on obtient une assertion.

$$(x \in E : P(x)) \text{ ou } (x \in E, y \in F : P(x, y))$$

Exemple :

1. $P_n = "n \in \mathbb{N} : n \text{ pair}"$

2. $P(x, y) = "x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} : x + y = 0"$

1.2 Les connecteurs logiques :

Définition 1.3 : (Négation d'une proposition P ou $\bar{P}$)

Soit P une proposition, la négation de P est la proposition notée $\bar{P}$, qui est

- faux lorsque P est vraie.
- Vrai $\quad \quad \quad = \quad = \quad$ fausse.

Exemple :

1. $P = "24 \text{ est un multiple de } 2"$ est une proposition vraie

$\bar{P} = "24 \text{ n'est pas un multiple de } 2" = = =$ fausse.

P	$\bar{P}$
1	0
0	1

Table de vérité pour $\bar{P}$

Définition 1.4: (Conjonction et = $\wedge$)

Soient P, Q deux propositions. La ~~dis~~ conjonction de P et Q est la proposition notée $P \wedge Q$ définie par sa table de vérité suivante :

P	Q	$P \wedge Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Exemple:

1. " $2 \geq 1$ et 6 est un multiple de 3 " (1)
2. " $2 \geq 3$ et Tigel est une ville de l'Algérie " (0)

Définition 1.5: (Disjonction ou = $\vee$)

Soient P, Q deux propositions. La disjonction de P et Q est la proposition notée $P \vee Q$ définie par la table de vérité suivante :

P	Q	$P \vee Q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Exemple :

1. " $2 \geq 1$ et 9 est un multiple de 2 " (1)
 $\underbrace{P} \quad \underbrace{Q}$

2. " $2 \geq 3$ et Tijel est la capitale de l'Algérie" (0)
 $\underbrace{P} \quad \underbrace{Q}$

Définition 1.6: (Implication $\Rightarrow$)

Soient P et Q deux propositions. L'implication de P et Q est la proposition notée $P \Rightarrow Q$ définie par la table de vérité suivante :

P	Q	$P \Rightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Remarque :

• $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$ se appelle l'implication réciproque de $P \Rightarrow Q$.

Définition 1.7: (Equivalence $\Leftrightarrow$)

Soient P, Q deux propositions. L'équivalence de P et Q est la proposition notée $P \Leftrightarrow Q$ définie par la table de vérité suivante :

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Définition 1.8. (Tautologie)

Une tautologie est une proposition qui est toujours vraie.

Exemple 1/

Tautologie

pas une Tautologie

P	$\bar{P}$	$P \vee \bar{P}$	$P \wedge \bar{P}$
1	0	1	0
0	1	1	0

1.3. Quantificateurs mathématiques

Définition 1.9. (Quantificateur $\forall$)

Le quantificateur "quel que soit" noté $\forall$ permet de définir la proposition quantifiée

$$\forall x \in E, P(x)$$

qui est vraie pour tous les éléments x appartenant à E , la proposition $P(x)$ est vraie.

Exemple :

1. $\forall n \in \mathbb{N} : 2n \text{ pair}$ Vraie

2. $\forall x \in [-3, 1], x^2 + 2x - 3 \leq 0$ est vraie.

Définition 1.10. ($\exists$)

Le quantificateur "il existe" noté $\exists$ permet de définir la proposition quantifiée

$$" \exists x \in E, P(x) "$$

qui est vraie si l'on peut trouver au moins un élément x appartenant à E , tel que la proposition $P(x)$ soit vraie.

N.B. S'il existe un et un seul élément, on peut écrire $\exists! x \in E, P(x)$

Nous dirons alors qu'il existe un unique élément x de E vérifiant $P(x)$.

Exemple:

1. La proposition quantifiée " $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 = 4$ " est vraie.

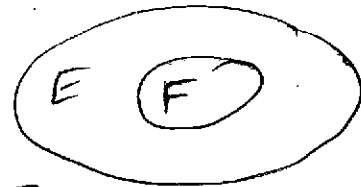
2. " $\exists! x \in \mathbb{R}_+^*, \ln(x) = 1$ " est vraie.

2. Opération sur les ensembles:

2.1. Inclusion de deux ensembles.

Soient E et F deux ensembles. On dit que F est inclus dans E (ou un sous-ensemble, une partie de E) si tout élément de F est un élément de E , on écrit $F \subset E$

$$a) F \subset E \Leftrightarrow (\forall x, x \in F \Rightarrow x \in E)$$



$$b) E = F \Leftrightarrow E \subset F \text{ et } F \subset E$$
$$(\forall x, x \in E \Leftrightarrow x \in F)$$

2.2. Différence de deux ensembles:

Soient E et F deux ensembles. La différence de deux ensembles est l'ensemble des éléments de E qui ne sont pas dans F , noté $E - F$, défini par:

$$E - F = \{ x \mid x \in E \text{ et } x \notin F \}$$

Exemples:

$$\bullet E = \{1, 2, -1, 0, 3\}, F = \{1, -1, 5, 7\}$$

$$\bullet E - F = \{2, 0, 3\}, F - E = \{5, 7\}$$

Si $F \subset E$, alors $E - F$ est appelée
"Complémentaire de F dans E ", noté $C_E F$ ou $\bar{F}$.

- L'ensemble vide est l'unique ensemble, noté $\emptyset$, défini par $E - E$.

Exemple:

$$\left(\begin{array}{l} E = \{0, 1, -1, 2, 3\} \\ F = \{0, 1\} \end{array} \right) \Rightarrow \bar{F} = \{-1, 2, 3\}$$

- Soit E un ensemble quelconque.

$$\emptyset = \{x \mid x \in E \text{ et } x \notin E\}$$

ou $\emptyset = \{ \}$

$$E = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ pair et } x \text{ impair}\} = \emptyset$$

2.3. L'ensemble des parties d'un ensemble :

Soit E un ensemble. L'ensemble des parties de E , noté $\mathcal{P}(E)$ est défini par

$$\mathcal{P}(E) = \{X \mid X \subset E\}$$

- Si $X \subset E \Leftrightarrow X \in \mathcal{P}(E)$.

(si E a n éléments fini $\Rightarrow \mathcal{P}(E)$ a 2^n éléments)

Exemple:

$$E = \{a, b, c\},$$

$$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, E\}$$

2.4 Réunion et intersection de deux ensembles.

Soit E, F deux ensembles. La réunion (resp. l'intersection) de E et F notée $E \cup F$ (resp. $E \cap F$) est l'ensemble défini par:

$$E \cup F = \{x \mid x \in E \text{ ou } x \in F\}$$

$$\text{(resp. } E \cap F = \{x \mid x \in E \text{ et } x \in F\})$$

• Si $E \cap F = \emptyset$ on dit que les ensembles E et F sont disjoints.

Exemple:

$$E = \{1, 2, 3\}, \quad F = \{5, 6, 7\}$$

$$E \cup F = \{1, 2, 3, 5, 6, 7\}$$

$$E \cap F = \{\} = \emptyset$$

2.5. Produit cartésien de deux ensembles.

Soient E, F deux ensembles.

a) Couples.

Soient $x \in E, y \in F$, (x, y) est appelé couple qui satisfait :

$$\forall x' \in E, y' \in F, (x, y) = (x', y') \Leftrightarrow x = x' \text{ et } y = y'$$

b) Produit cartésien.

Le produit cartésien de E et F noté $E \times F$ est défini par :

$$E \times F = \{ (x, y) / x \in E, y \in F \}$$

Remarque.

• Ne pas confondre le couple (x, y) avec la paire $\{x, y\}$

• Si $E = F$: $E \times E$ est noté E^2

• $(x, y) \neq (y, x)$ et $(x, y) \neq \{x, y\}$

Exemple.

$$E = \{a, b, c\}, F = \{1, 2\}$$

$$E \times F = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$$

• N.B

$$E \times F \neq F \times E$$

3. Méthodes du raisonnement

3.1. direct

On veut montrer que la proposition " $P \Rightarrow Q$ " est vraie. On suppose que P est vraie et on montre qu'alors Q est vraie. C'est la méthode à laquelle vous êtes le plus habitué.

Exemple:

Montrer que si n est impair alors n^2 est impair

Démonstration:

Comme n est impair donc il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k + 1$. Alors $n^2 = (2k + 1)^2$

$$= 4k^2 + 4k + 1 = 2l + 1$$

avec $l = 2k^2 + 2k \in \mathbb{N}$. Et donc n^2 est impair

Conclusion: nous avons montré que si n est impair alors n^2 est impair.

3.2. contraposition:

Le raisonnement par contraposition est basé sur l'équivalence suivante:

La proposition " $P \Rightarrow Q$ " est équivalente à " $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$ "

N.B.

d'implication $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$ est appelée la contraposée de $P \Rightarrow Q$, et elles sont équivalentes.

$$(\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}) \Leftrightarrow (P \Rightarrow Q)$$

Donc si l'on souhaite montrer la proposition " $P \Rightarrow Q$ " on montre en fait que si $\overline{Q}$ est vraie alors $\overline{P}$ est vraie.

Exemple:

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si $\underline{n^2}$ est pair alors $\underline{n}$ est pair.

Démonstration:

Pour montrer que si $\underline{n^2}$ est pair alors $\underline{n}$ est pair

On utilise le raisonnement par contraposée
c'est-à-dire $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$ ou

si n est impair (n'est pas pair) alors n^2 est impair (n'est pas pair)

Math 1 (ST)

Pour la suite de la démonstration (voir l'exemple précédent raisonn. direct)

3.3

absurde.

Le raisonnement par l'absurde, pour montrer " $P \Rightarrow Q$ " repose sur le principe suivant : on suppose à la fois que P est vraie et que Q est fausse et on cherche une contradiction. Ainsi si P est vraie alors Q doit être vraie et donc " $P \Rightarrow Q$ " est vraie.

Exemple :

Soient $a, b \geq 0$. Montrer que si $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}$
alors $a = b$

Démonstration :

Nous raisonnons par l'absurde, en supposant que $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}$ et $a \neq b$.

Comme $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}$ alors $a(1+a) = b(1+b)$

donc $a^2 + a = b^2 + b$

d'où $a^2 - b^2 = b - a$. Cela conduit à
 $(a-b)(a+b) = b-a = -(a-b)$

Comme $a \neq b$ alors $a-b \neq 0$ et donc
 en divisant par $a-b$ on obtient $a+b = -1$.
 La somme de deux nombres positifs a et b
 ne peut être négative. Nous obtenons
 une contradiction.

Conclusion: si $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}$ alors
 $a = b$

3.4

Contre exemple:

Pour montrer que la proposition
 $\forall x \in E, P(x)$ est fausse, il suffit
 de montrer: $\exists x \in E, P(x)$ fausse

Exemple:

Montrer que la proposition suivante est
 fausse "Tout entier positif est somme de
 trois carrés"

(les carrés sont les $0^2, 1^2, 2^2, 3^2, \dots$ par exemple
 $6 = 2^2 + 1^2 + 1^2$.)

Démonstration:

Un contre exemple est 7.
les carrés inférieurs à 7 soit 0, 1, 4 mais
avec trois de ces nombres on ne peut faire 7.

3.5:

Récurrence.

Soit $P(n)$ une propriété dépendant
d'un entier $n \in \mathbb{N}$, pour montrer que:
 $\forall n \in \mathbb{N}; P(n)$

1/ on montre $P(0)$ est vraie

2/ $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Exemple:

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n > n$.

Démonstration:

Pour $n \geq 0$, notons $P(n)$
la proposition suivante:

$$2^n > n$$

Nous allons démontrer par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 0$.

Initialisation: Pour $n = 0$ nous avons $2^0 = 1 > 0$. Donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité: Faisons $n \geq 0$. Supposons que $P(n)$ soit vraie. Nous allons montrer que $P(n+1)$ est vraie.

$$\begin{aligned} 2^{n+1} &= 2^n \cdot 2 \\ &= 2^n + 2^n > n + 2^n \quad (\text{car par } P(n) \text{ nous avons } 2^n > n.) \\ &> n+1 \quad \text{car } 2^n > 1 \end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion:

Par le principe de récurrence $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 0$, c'est-à-dire

$$2^n > n \text{ pour tout } n \geq 0.$$

4. Quelques propriétés sur les ensembles

Soient A, B et C des ensembles quelconques.

On a ~~alors~~ :

- $A \cup B = B \cup A$ et $A \cap B = B \cap A$.
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$ et $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ et $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Proposition 1.1 (Complémentaire)

Soit E un ensemble. Soient A et B des parties de E . On a alors :

$$1) \quad \overline{\overline{A}} = A$$

$$2) \quad A \subset B \Leftrightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$$

$$3) \quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

$$4) \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

