

2. Les Applications

2.1. Difference entre fonctions et applications

Définition 2.3.1 (Fonction)

Soient E, F deux ensembles. On appelle fonction f de E dans F , toute relation définie de E vers F , qui associe chaque élément x (antécédent) $\in E$ un élément au plus y (image de x par f) $\in F$.

On note $y = f(x)$

E : ensemble de départ, F : ensemble d'arrivée

Notation 2.1.

On note les fonctions et les applications f de la façon suivante

$$f : E \longrightarrow F \quad (f \text{ va de } E \text{ dans } F)$$

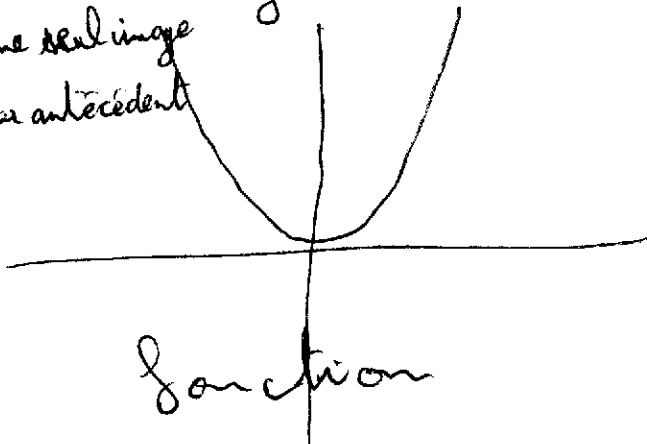
$$x \longmapsto f(x) \quad (x \text{ a pour image } f(x))$$

Définition 2.4. (Domaine de définition)

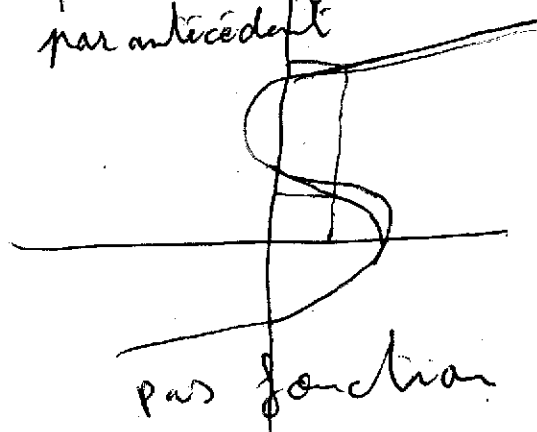
L'ensemble des éléments de E qui ont une image dans F par la fonction f est appelé domaine de définition de f .

noté D_f

une seule image
par antécédent



plusieurs images
par antécédent



Exemple 1

$$1) f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto f(x) = \frac{x+2}{x^2-1}$$

$$2) f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x,y) \longmapsto f(x,y) = \frac{xy}{x^2-y^2}$$

Définition 2.5. (Application)

Soient E, F deux ensembles.

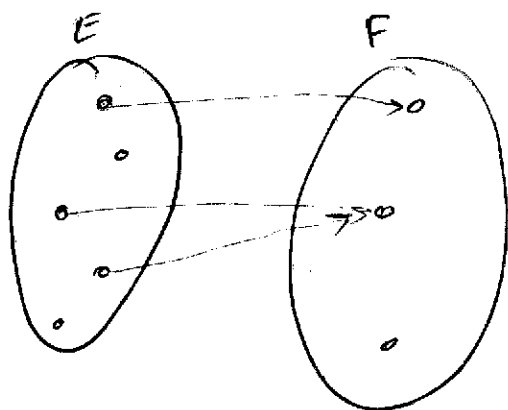
Une application f de E dans F est une fonction qui associe chaque élément $x \in E$ un seul élément $y \in F$

c.e. $E = D_f$

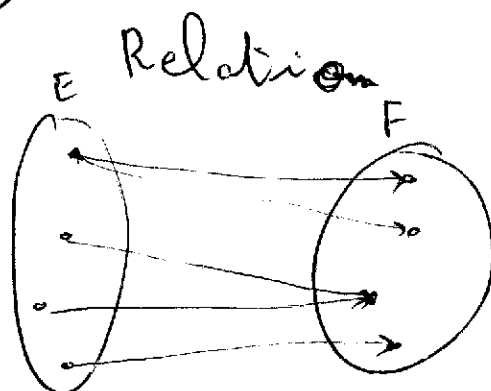
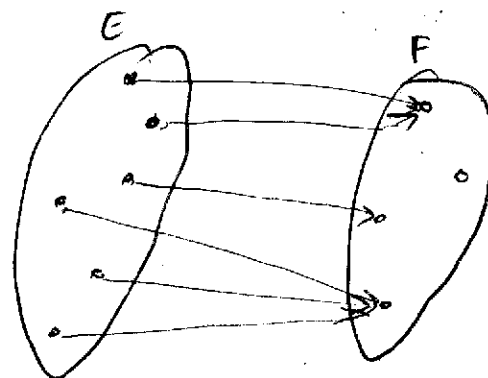
Exemple 1

$$1) f(x) = x^2 + 2x - 3$$

$$2) f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2+1}$$



Application



Définition 2.6. (Image directe)

Considérons une application $f: E \rightarrow F$. Pour toute partie A de E , on appelle image directe de A par f l'ensemble $\{f(x) : x \in A\}$ noté $f(A)$ ou $f[A]$.

Rq si $A = E$: $f(E)$ est dite image de f et noté $\text{Im}f$ ($\text{Im}f = f(E)$)
Exemple:

1/ $A = \{-1, 1, 0, 2, 3\}$, $f(x) = x^2$

$$f(A) = \{1, 0, 4, 9\}$$

2/ $A = [1, 2]$

$$f([1, 2]) = [f(1), f(2)]$$

Définition 2.7: (Image réciproque)

Considérons une application $f: E \rightarrow F$. Pour toute partie B de F , on appelle image réciproque de B par f l'ensemble $\{x \in E: f(x) \in B\}$ noté $f^{-1}(B)$

Exemple:

$$1) f(x) = x^2, \quad B = \{1, 2\}$$

$$f^{-1}(B) = \{x / f(x) \in \{1, 2\}\}$$

$$f(x) = 1 \quad \vee \quad f(x) = 2$$

$$\downarrow$$

$$x = \pm 1$$

$$\rightarrow x = \pm \sqrt{2}$$

$$2) B = [1, 2]$$

$$1 \leq f(x) \leq 2 \quad \xRightarrow{?} \quad ? \leq x \leq ?$$

Proposition 2.1: (Propriétés des images directes et réciproques)

Soit $f: E \rightarrow F$ une application.

Soient $A \subset E$ et $B \subset F$.

Nous avons les propriétés suivantes:

$$\underline{1.} \quad A \subset f^{-1}(f(A))$$

2. $f(f^{-1}(B)) \subset B,$

3. Soient $A_1, A_2 \subset E, f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2),$

4. $\subset A_1, A_2 \subset E, f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2),$

5. $\subset B_1, B_2 \subset F, f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$

Définition 2.8. (Graphe d'une application)

Le graphe ou courbe représentative, noté $\mathcal{C}_f$ d'une application $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ est l'ensemble des points (x, y) du plan tels que x appartienne à D_f et $y = f(x)$ appartienne à F i.e.

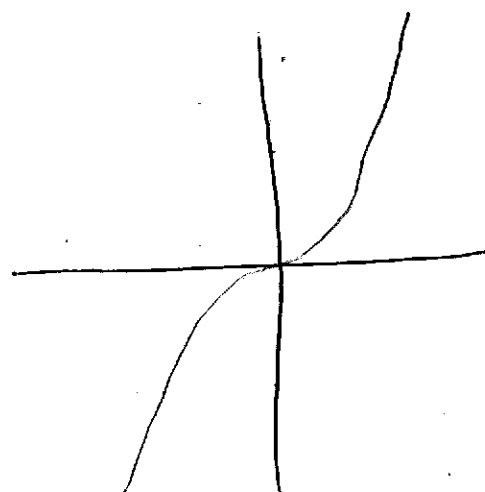
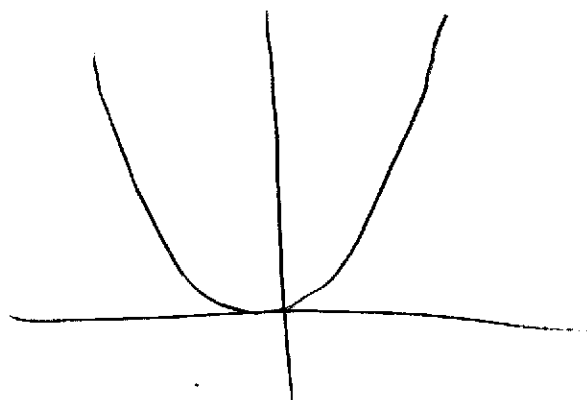
~~Le graphe de f est~~ $\mathcal{C}_f = \{(x, f(x)); x \in D_f\}$

Exemple.

Voici dans les figures suivantes, le graphe de deux fonctions usuelles

1. $f_1: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
 $x \longmapsto x^2$

2. $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
 $x \longmapsto x^3$



2.2. Injectivité, surjectivité, bijectivité:

Soit $f: E \rightarrow F$ est une application

Definition 2.9. (App. injective)

On dit que f est injective ssi tout élément y de F admet au plus un antécédent x dans E . i.e.

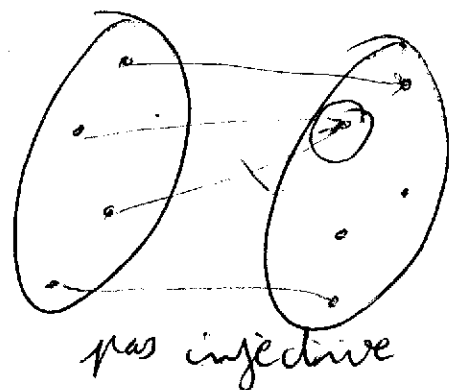
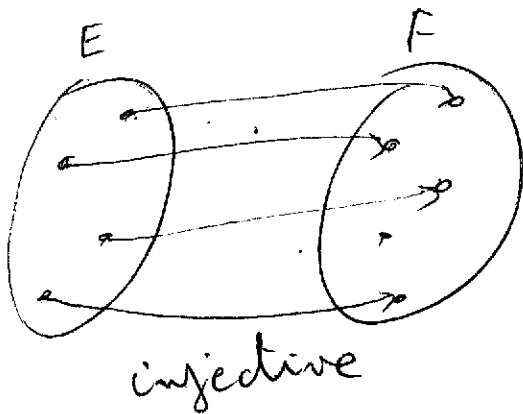
$$\forall x_1, x_2 \in E : \text{si } f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

Nous pouvons également la définir par sa contraposée: qui est $\forall x_1, x_2 \in E : \text{si } x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

Exemple 1

1) $f(x) = 2x - 1$

2) $f(x) = x^2$ (n'est pas injective)

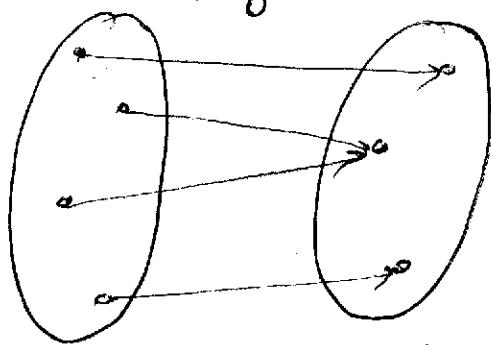


Definition 2.10. (App. surjective)

On dit que f est surjective ssi tout élément y de F admet au moins un antécédent x dans E . i.e.

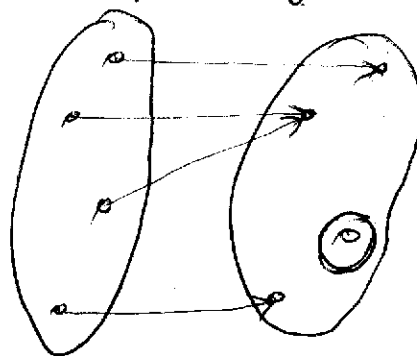
$$\forall y \in F : \exists x \in E, y = f(x)$$

surjective



(S T)

pas surjective



Exemple:

1) $f(x) = 2x - 1,$

$\forall y \in \mathbb{R} : \exists x \in \mathbb{R} : y = f(x) ?$

$y = 2x - 1 \Leftrightarrow x = \frac{y+1}{2} \in \mathbb{R}$

alors f est surjective

2) $f(x) = x^2$

$y = -1 \quad x^2 = -1$ (impossible)

Remarque:

f surjective ssi $\text{Im } f = F$

Définition 2.11. (App. bijective)

On dit que f est bijective si elle est à la fois injective et surjective. C'est-à-dire.

$\forall y \in F, \exists! x \in E : f(x) = y$

Il est alors possible de passer de y à x parce qu'on appelle l'application réciproque, que l'on note f^{-1} . Et donc si f est bijective on a :

$f : E \rightarrow F$
 $x \mapsto y = f(x)$

$f^{-1} : F \rightarrow E$
 $y \mapsto x = f^{-1}(y)$

Exemple:

• $f(n) = 2n + 1$

f est injective et surjective et $x = \frac{y+1}{2}$

alors elle est bijective

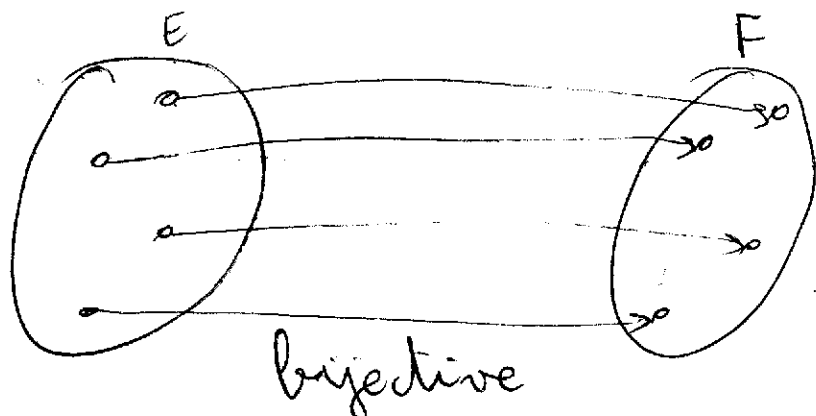
$$f^{-1}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$y \longmapsto x = f^{-1}(y) = \frac{y+1}{2}$$

ou $f^{-1}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
 $x \longmapsto f^{-1}(x) = \frac{x+1}{2}$

Remarque: Dans ce cas

$$f: D_f \longrightarrow f(D_f)$$



Question: ($E = \mathbb{R}$, et $F = \mathbb{R}$)

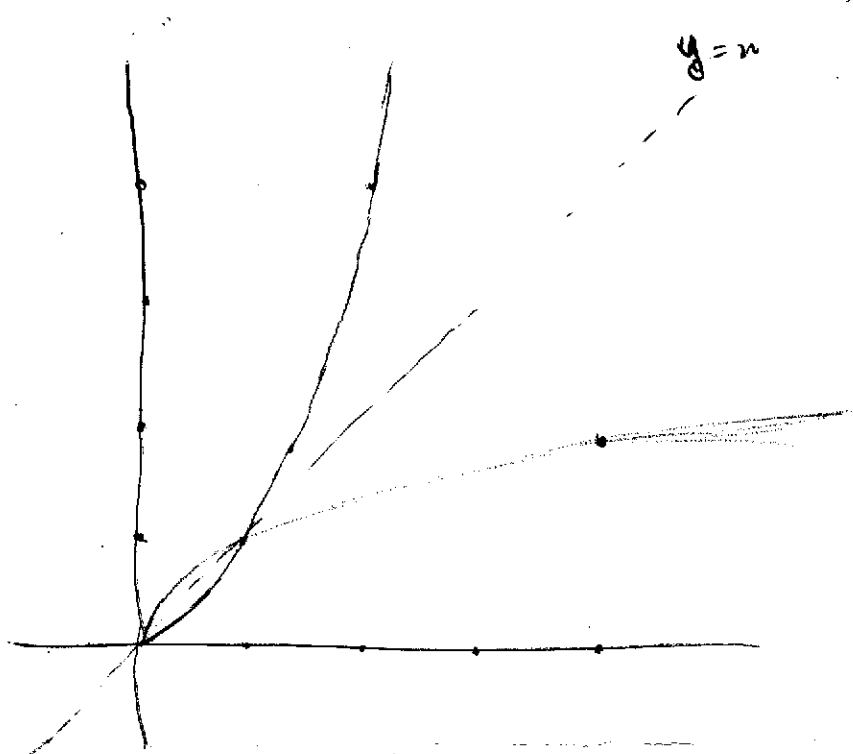
Comment construire le graphe d'une application f^{-1} réciproque d'une application f ?

$$f: D_f \longrightarrow f(D_f)$$

Réponse:

On voit par construction de l'application réciproque que si l'on suppose x un point de l'intervalle I et y un point de l'intervalle $J = f(I)$, l'image de I par f tel que $y = f(x)$, alors (x, y) appartient au graphe $\mathcal{C}_f$ si et seulement si (x, y)

(y, n) appartient au graphe $\mathcal{C}_{f^{-1}}$. Autrement dit tout point du graphe $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ est le symétrique du graphe $\mathcal{C}_f$ par rapport à la première bissectrice (c'est-à-dire la droite d'équation $y = x$)



ici l'application $x \mapsto x^2$ dont la réciproque $\forall x \geq 0$ est $x \mapsto \sqrt{x}$. La droite pointillée est la première bissectrice (droite d'équation $y = x$)

Construction de l'application réciproque

2.3. Composition d'applications:

Définition 2.14. (App. Composées)

Soient E, F et G trois ensembles, $f: E \rightarrow F$ et $g: F \rightarrow G$ deux applications. Nous appelons application composée de g et de f , l'application

$g \circ f: E \rightarrow G$ définie par

$$g \circ f(x) = g(f(x))$$

et que l'on peut écrire de la façon suivante:

$$\begin{array}{ccccc} g \circ f: E & \xrightarrow{f} & F & \xrightarrow{g} & G \\ x & \mapsto & f(x) & \mapsto & g(f(x)) \\ & \searrow & \xrightarrow{g \circ f} & & \\ & & g \circ f(x) & & \end{array}$$

Exemple 1

1/ Soit $f:]2, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} - \{5\}$
 ~~$g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$~~ $n \longmapsto f(n) = n^2 + 1$

$$g: \mathbb{R} - \{5\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$n \longmapsto g(n) = \frac{1}{n-5}$$

alors

$$g \circ f(n) = g(f(n)) = g(n^2 + 1) = \frac{1}{n^2 + 1 - 5} = \frac{1}{n^2 - 4}$$

2/ Soit $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$
 $(x, y) \longmapsto f(x, y) = x + y$

$$g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$n \longmapsto g(n) = (n+1, -n-2)$$

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} & \xrightarrow{g} & \mathbb{R}^2 \\ \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{g \circ f} & & & \mathbb{R}^2 \end{array}$$

$$(x, y) \longmapsto (g \circ f)(x, y) = ?$$

$$g \circ f(x, y) = g(f(x, y)) = g(x+y) = (x+y-1, -x-y-2)$$

Remarque

1. $f \circ g(n) = f(g(n))$ et $g \circ f(n) = g(f(n))$ sont différentes

2. $f(E) \subset F$, $g(F) \subset G$
 $\Downarrow$ $\Downarrow$
 D_f D_g

Exemple:

$$\bullet f(x, y) = x + y, \quad g(x) = (x + 1, -x - 2)$$

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{g} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ \mathbb{R} & \xrightarrow{f \circ g} & & & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f \circ g(x) = ? & & \end{array}$$

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x + 1, -x - 2) = x + 1 - x - 2 = -1$$

$$f \circ g \neq g \circ f$$

Définition 2.13. (App. identité)

Soit E un ensemble, on appelle identité de E l'application $\text{Id}_E : E \rightarrow E$ définie par : $\forall x \in E : \text{Id}_E(x) = x$

Exemple:

$$\begin{array}{ccc} \text{Id}_{\mathbb{R}^3} : \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & \text{Id}_{\mathbb{R}^3}(x, y, z) = (x, y, z) \end{array}$$

proposition 2.2:

Soient $f : E \rightarrow F$ une application bijective et $f^{-1} : F \rightarrow E$ sa réciproque alors :

$$1/ \quad f \circ f^{-1} = \text{Id}_F \text{ et } f^{-1} \circ f = \text{Id}_E$$

2/ f^{-1} est bijective et sa réciproque est f :

$$(f^{-1})^{-1} = f$$

$$3/ \quad \forall x \in E; \quad \forall y \in F : y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

Exemple:

$$1/ \quad f: \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \quad g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$$

$$x \longmapsto f(x) = \ln x \quad x \longmapsto g(x) = e^x$$

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = \ln(e^x) = x = \text{Id}_{\mathbb{R}}(x)$$

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = e^{\ln x} = x = \text{Id}_{\mathbb{R}_+^*}(x)$$

$$2/ \quad \text{L'exemple précédent} \quad f(x) = 2x - 1$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x+1}{2}$$

$$f^{-1}(f^{-1}(x)) = f(x)$$

3/

$$y = \ln x \iff x = e^y$$

Proposition 2.3. (Image directe et injectivité)

Soit $f: E \longrightarrow F$ une application. Soient A_1 et $A_2 \subset E$. Si f est injective, nous avons l'égalité suivante :

$$f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$$

On a en général : $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$

il suffit de montrer l'inverse.