

Cor Ch 3. Les fonctions réelles à une variable réelle. Math 1 (S T)

1. Quelques propriétés des fonctions

Définition 3.1.

Soient f et g deux fonctions. Soit $I \subset \mathbb{R}$.
 $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}, g: D_g \rightarrow \mathbb{R} \quad (D_f, D_g \subset \mathbb{R})$

On a :

a. Soit $I \subseteq D_f \cap D_g$ alors

1/ Addition:

$$\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{f+g} & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (f+g)(x) = f(x) + g(x) \end{array}$$

2/ Multiplication:

$$\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{f \cdot g} & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \end{array}$$

3/ Quotient:

lorsque g ne s'annule pas sur I , alors :

$$\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{f/g} & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (f/g)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \end{array}$$

b. Soit $I \subseteq D_f$ alors

Multiplication par un réel :

$$\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{\lambda f} & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (\lambda f)(x) = \lambda f(x) \end{array}$$

Définition 3.2. (Restriction)

Soit $I_0 \subset I \subseteq \mathbb{D}_f$. La restriction de f à I_0 est la fonction notée ~~$f|_{I_0}$~~ $f|_{I_0}$ définie sur I_0 par:

$$\forall x \in I_0, \quad f|_{I_0}(x) = f(x).$$

Définition 3.3.

Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. ($I \subset \mathbb{R}$)

On dit que f est :

1. Majorée sur I ssi $\exists M \in \mathbb{R} : f(x) \leq M, \forall x \in I$
2. Minorée $\equiv$ ssi $\exists m \in \mathbb{R} : m \leq f(x), \forall x \in I$
3. Bornée $\equiv$ ssi elle est à la fois majorée et minorée

$$\text{i.e. } \exists m, M \in \mathbb{R} : m \leq f(x) \leq M$$

Exemple.

$$1/ \quad f(x) = 2x + 1 \quad \text{sur} \quad I =]-\infty, 1]$$

$$x \leq 1 \rightarrow 2x \leq 2 \rightarrow 2x + 1 \leq 3, \quad \exists M = 3$$

Remarque: (Valeur absolue et fonction bornée)

La fonction f est bornée sur I ssi la fonction

$|f|: x \mapsto |f(x)|$ est majorée. i.e.

$$|f(x)| \leq M \quad \forall x \in I \quad (\text{tg } M > 0)$$

Définition 3.4.

Soient $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

On dit que :

1. f est constante sur D_f si : $\forall x_1, x_2 \in D_f, f(x_1) = f(x_2)$

2. f est croissante (resp. strictement) si : $\forall x_1, x_2 \in D_f$:
 $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
 (resp. $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$)

3. f est décroissante (resp. strictement) sur D_f si :

$$\forall x_1, x_2 \in D_f : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

$$(\text{resp. } x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2))$$

Remarque.

On dit que f est

Définition 3.5 :

Soit $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que :

1. f est paire si : $\forall x \in D_f : f(-x) = f(x)$

2. f est impaire si : $\forall x \in D_f : f(-x) = -f(x)$

3. f est périodique si : $\exists \alpha \in \mathbb{R}^*, f(x+\alpha) = f(x), \forall x \in D_f$

si α la plus petite valeur positive alors elle est appelée la période de f .

2. Limites d'une fonction

2.1 limite finie d'une fonction en un point

Définition 3.6.

Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. ($I \subseteq \mathbb{D}_f$) Soient x_0, l deux réels finis (c-à-d que x_0 et l sont différents de $\pm \infty$).

On dit que f admet une limite finie l en x_0 , on note :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$$

Exemple.

1. $f(x) = 2x + 5$, $I = \mathbb{D}_f = \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 7$$

Définition 3.7. (limite $\pm \infty$ en un point x_0)

Soient $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction, $x_0 \in \mathbb{R}$. On dit que f admet la limite $+\infty$ (resp. $-\infty$) en x_0 , on note

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \text{ (resp. } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty)$$

Remarque.

Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm \infty \Rightarrow$ l'équation $x = x_0$ est une asymptote verticale par rapport à l'axe des abscisses.

Exemple.

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$

Définition 3.8.

Soient $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction, $x_0, l \in \mathbb{R}$ ($I \subseteq \mathbb{D}_f$).
On dit que f admet une limite à droite (resp. à gauche) en x_0 , on note

$$\lim_{x \searrow x_0} f(x) = l \quad (\text{resp. } \lim_{x \nearrow x_0} f(x) = l)$$

Proposition 3.1.

Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. La fonction f admet l pour limite en $\underline{x_0}$ ssi

$$\lim_{x \searrow x_0} f(x) = l \quad \text{et} \quad \lim_{x \nearrow x_0} f(x) = l$$

Exemple.

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 (x+1)^2}}{3(x+1)}, \quad x_0 = -1$$

Définition 3.9.

Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.
On dit que f admet une limite $\pm\infty$ à droite (resp. à gauche) en x_0 , on note

$$\lim_{x \searrow x_0} f(x) = +\infty \quad (\text{resp. } \lim_{x \nearrow x_0} f(x) = +\infty)$$

$$\lim_{x \searrow x_0} f(x) = -\infty \quad (\text{resp. } \lim_{x \nearrow x_0} f(x) = -\infty)$$

Définition 3.10.

Soient $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction, $l \in \mathbb{R}$.

On dit que f admet une limite $\underline{=}$ l en $+\infty$ (resp. en $-\infty$) et on note

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = l \quad (\text{resp. } \lim_{n \rightarrow -\infty} f(n) = l)$$

Remarque.

Si $\lim_{n \rightarrow \pm\infty} f(n) = l$ alors la droite d'équation $y = l$ est une asymptote horizontale par rapport à l'axe des abscisses.

Définition 3.11.

Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

$$\bullet \lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = +\infty \quad \bullet \lim_{n \rightarrow -\infty} f(n) = +\infty$$

$$\bullet \lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = -\infty \quad \bullet \lim_{n \rightarrow -\infty} f(n) = -\infty$$

Propriété 3.1.

Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. $x_0 \in \mathbb{R}$

Si f possède une limite $\underline{=}$ l en x_0 alors cette limite est unique
(finie ou infinie)

Cor.

Math 1

(ST)

Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$. Soient $x_0 \in \mathbb{R}$, $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow x_0} f(n) = l_1 \\ \lim_{n \rightarrow x_0} g(n) = l_2 \\ \forall n \in I : f(n) \leq g(n) \end{array} \right\} \Rightarrow l_1 \leq l_2$$

Propriété 3.3.

Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$.

Si ^{Majoration} $\forall n \in I : f(n) \leq g(n)$, $\lim_{n \rightarrow x_0} g(n) = -\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow x_0} f(n) = -\infty$

^{Minoration}

$\forall n \in I : f(n) \geq g(n)$, $\lim_{n \rightarrow x_0} g(n) = +\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow x_0} f(n) = +\infty$

Théorème 3.1. (Gendarmes)

Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions. Soient $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, $l \in \mathbb{R}$.

Si $\forall n \in I : h(n) \leq f(n) \leq g(n)$, $\lim_{n \rightarrow x_0} h(n) = \lim_{n \rightarrow x_0} g(n) = l \Rightarrow \lim_{n \rightarrow x_0} f(n) = l$

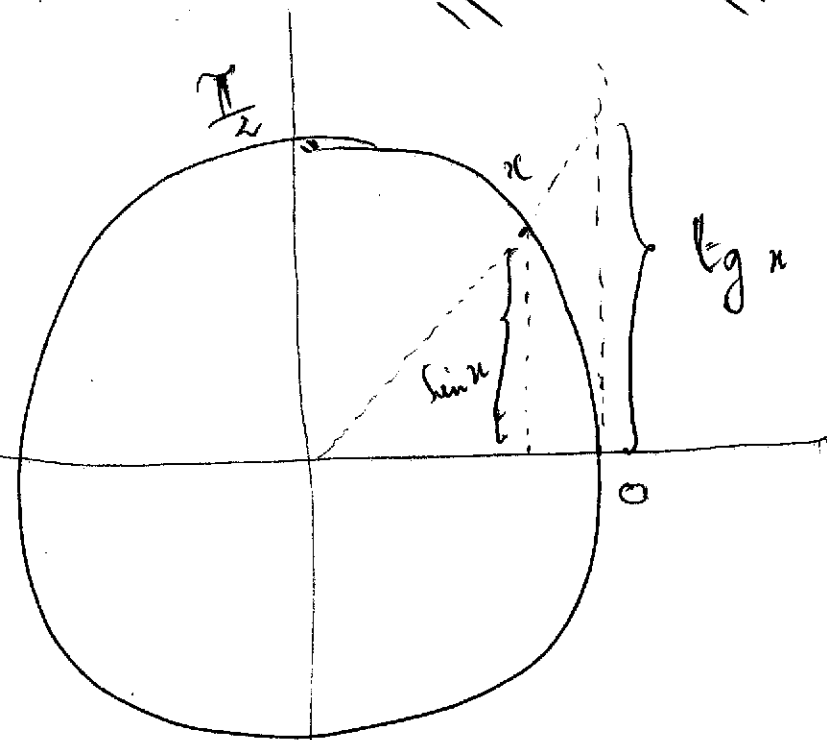
Exemple

Calculer $\lim_{n \rightarrow 0} \frac{\sin n}{n}$

Réponse.

Pour $n \in]0, \frac{\pi}{2}[$ on a

$$0 < \sin n \leq n \leq \operatorname{tg} n$$



alors

$$0 < \frac{\sin n}{n} \leq 1 \leq \frac{\operatorname{tg} n}{n}$$

$$0 < 1 - \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n} \frac{\sin n}{\cos n} - \frac{\sin n}{n}$$

$$0 < 1 - \frac{\sin n}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \left(\frac{1}{\cos n} - 1 \right) \leq \left(\frac{1}{\cos n} - 1 \right)$$

et comme $\lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{\cos n} - 1 = 0$

alors $\lim_{n \rightarrow 0} 1 - \frac{\sin n}{n} = 0$ ce qui

implique $\lim_{n \rightarrow 0} \frac{\sin n}{n} = 1$

Cor

Math 1

(57)

$\sin x < 0$

On met $x = -y$ ou $y > 0$

On a $\sin x = \sin(-y) = -\sin y$

alors $\frac{\sin(-y)}{(-y)} = \frac{\sin x}{x} = \frac{-\sin y}{y} = \frac{\sin y}{y}$

cela nous conduit à l'état précédent par suite

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

2.2. Opérations sur les limites

Soient $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions, $I \subseteq \mathbb{R}$

$l_1, l_2 \in \mathbb{R}; x_0 \in \bar{\mathbb{R}}([- \infty, + \infty])$. Alors

Propriété 3.4.

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	l_1	l_1	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	l_2	∞	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x))$	$l_1 + l_2$	∞	$+\infty$	$-\infty$	Forme indéterminée (F.I.)

(8)

Propriété 3.5:

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	l_1	l_1	∞	0	0
$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	l_2	∞	∞	0	∞
$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x)$	$l_1 \cdot l_2$	∞	∞	0	F.I.

Propriété 3.6:

$g(x) \neq 0$ sur I

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	l_1	l_1	$l_1 \neq 0$	∞	∞	0
$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	$l_2 \neq 0$	∞	0	0	∞	0
$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{l_1}{l_2}$	0	∞	∞	F.I.	F.I.

Remarque :

$+\infty - \infty$	$0 \cdot \infty$	$\frac{\infty}{\infty}$	$\frac{0}{0}$	$(1)^\infty$	$(0^+)^0$	$(+\infty)^0$
--------------------	------------------	-------------------------	---------------	--------------	-----------	---------------

Méthodes de Calcul

M.1. Factoriser le terme de plus haut degré.
pour des F.I. de type $+\infty - \infty$ ou $\frac{\infty}{\infty}$ (polynôme)

- Mettre le terme de plus haut degré en facteur
- Dans le cas d'une fraction, simplifier au maximum

M.2. Multiplier et Diviser par le conjugué
pour une forme de type $\sqrt{\dots} - \sqrt{\dots}$

Exemple:

1. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 - 2n + 1)$

R.1.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 - 2n + 1) = +\infty - \infty \quad (\text{F.I.})$$

alors

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 - 2n + 1) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \left(1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty \end{aligned}$$

2. Calculer $\lim_{n \rightarrow 0} n \left(1 - \frac{1}{n}\right)$

R.2.

$$\lim_{n \rightarrow 0} n \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 0 \cdot \infty \quad (\text{F.I.})$$

$$\lim_{n \rightarrow 0} n \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow 0} (n - 1) = -1$$

3. Calculer $\lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{n^2 + 1}{n + 2}$

R.3.

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{n^2 + 1}{n + 2} = \frac{+\infty}{-\infty} \quad \text{F.I.}$$

alors

$$\frac{n^2 + 1}{n + 2} = \frac{n^2 \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)}{n \left(1 + \frac{2}{n}\right)}$$

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{n^2 \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)}{n \left(1 + \frac{2}{n}\right)} = \lim_{n \rightarrow -\infty} n = -\infty$$

4. Calculer $\lim_{n \rightarrow 2} \frac{n^2 - 4}{n - 2}$

R.4.

$\lim_{n \rightarrow 2} \frac{n^2 - 4}{n - 2} = \frac{0}{0}$ F.I.

$\lim_{n \rightarrow 2} \frac{n^2 - 4}{n - 2} = \lim_{n \rightarrow 2} \frac{(n-2)(n+2)}{(n-2)} = 4$

5. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n^2 + 2} - \sqrt{n^2 - 1}$

R.5.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n^2 + 2} - \sqrt{n^2 - 1}) = +\infty - \infty$ F.I.

alors

$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n^2 + 2} - \sqrt{n^2 - 1}) \cdot \frac{\sqrt{n^2 + 2} + \sqrt{n^2 - 1}}{\sqrt{n^2 + 2} + \sqrt{n^2 - 1}}$
 $= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + 2 - n^2 + 1}{\sqrt{n^2 + 2} + \sqrt{n^2 - 1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{\sqrt{n^2 + 2} + \sqrt{n^2 - 1}}$
 $= 0$

Définition 3.12.

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. Soient $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, $g: J \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $f(I) \subset J$.

Si $\lim_{n \rightarrow a} f(n) = b$ et $\lim_{n \rightarrow b} g(n) = c$

Alors $\lim_{n \rightarrow a} (g \circ f)(n) = c$

Cor

Math 1

(ST)

Exemple,

Calculer $\lim_{n \rightarrow 0} \frac{\sin 3n}{2n}$

Réponse

On pose $f(n) = 3n$ et $g(n) = \frac{3}{2} \frac{\sin n}{n}$
alors

$$\lim_{n \rightarrow 0} f(n) = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow 0} g(n) = ?$$

d'après un exemple précédent, $\lim_{n \rightarrow 0} \frac{\sin n}{n} = 1$

ce qui entraîne bien

$$\lim_{n \rightarrow 0} \frac{3}{2} \frac{\sin n}{n} = \frac{3}{2}$$

et donc

$$\lim_{n \rightarrow 0} (g \circ f)(n) = \frac{3}{2}$$

3. Continuité

Définition 3.13 :

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Soit $x_0 \in I$

On dit que f est continue en x_0 et on note

$$\lim_{n \rightarrow x_0} f(n) = f(x_0)$$

Définition 3.14,

1. f est dite continue à droite de $\underline{x_0}$ et on note

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

2. f est dite continue à gauche de $\underline{x_0}$ et on note

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

Remarque,

La fonction f est continue en $x_0 \iff$
 f est continue à droite et à gauche en x_0

Exemple,

Étudier la continuité des fonctions suivantes:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x > 1 \\ 2 & x = 1 \\ x + 2 & x < 1 \end{cases}$$

Réponse,

$$\text{On a } f(1) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + 1) = 2 = f(1);$$

f est continue à droite de 1.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x + 2) = 3 \neq f(1); f \text{ n'est pas continue à gauche de } 1.$$

et donc f n'est pas continue en $\underline{x_0 = 1}$

Définition 3.15.

Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que la fonction f est continue sur I ssi elle est continue en chaque point de I . i.e.

$$\forall x_0 \in I, \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Exemple.

$$f(x) = 2x^2 + 3x + 1$$

f est continue sur $\mathbb{R}$.

Propriété 3.1.

1. Soient $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions.

~~alors~~ Supposons que f et g sont continues en x_0 ($x_0 \in I$). On dit alors que les fonctions suivantes:

$(f+g)$, $(f \times g)$, (λf) , (f/g) ($g \neq 0$), $|f|$, $1/g$ ($g \neq 0$) sont continues en x_0 .

2. Soient $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, $g: f(I) \rightarrow \mathbb{R}$ telle que la fonction f est continue en x_0 ($x_0 \in I$) et g est continue en $f(x_0)$ ($f(x_0) \in f(I)$) alors la fonction

$g \circ f: I \rightarrow \mathbb{R}$ est continue en x_0 .

Théorème 3.21 (Fonction réciproque)

Soit $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Si f est injective (strictement monotone) et continue sur D_f , et si on pose $J = f(I)$ (l'image de I par f), et si l'on considère la fonction g :

$$g: I \longrightarrow J$$
$$x \longmapsto g(x) := f(x)$$

alors la fonction g est bijective et sa fonction réciproque g^{-1} est continue.

Remarque.

Si f est continue et strictement croissante (resp. décroissante) alors $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$ (resp. $f[a, b] = [f(b), f(a)]$)

Exemple.

Soit $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{x+1}{x+2}$

1. Calculer $f([0, 1])$

2. Démontrer que f bijective de I dans $f(I)$ et déterminer sa réciproque.

Réponse.

1. f est continue sur $[0, 1]$?

On a $(x+1)$ est continue sur $\mathbb{R}$, alors elle est continue sur $[0, 1]$ ($[0, 1] \subset \mathbb{R}$)

$(x+2)$ est continue sur $\mathbb{R} - \{-2\}$, alors elle est continue sur $[0, 1]$ ($[0, 1] \subset \mathbb{R} - \{-2\}$)

Cor

Math 1

(ST)

et donc f est continue sur $[0, 1]$

2. f est strictement croissante sur $[0, 1]$?

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 + 1 < x_2 + 1 \dots (1)$$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 + 2 < x_2 + 2 \dots (2)$$

$$f(x_2) - f(x_1) ?$$

$$\frac{x_2 + 1}{x_2 + 2} - \frac{x_1 + 1}{x_1 + 2} = \frac{\cancel{x_1}x_2 + 2x_2 + x_1 - \cancel{x_1}x_1 - 2x_1 - x_1}{(x_2 + 2)(x_1 + 2)}$$

$$= \frac{2(x_2 - x_1) - (x_2 - x_1)}{(x_2 + 2)(x_1 + 2)} = \frac{(x_2 - x_1)}{(x_2 + 2)(x_1 + 2)} > 0$$

alors f est strictement croissante (car $x_2 - x_1 > 0$)

Comme $f = \dots =$ et continue
alors elle est bijective et donc elle admet une fonction
réciproque f^{-1}

$$f([0, 1]) = [f(0), f(1)] = \left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right]$$

$$\text{Déterminer } f^{-1}, \quad y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

$$y = f(x) = \frac{x+1}{x+2} \Rightarrow xy + 2y = x+1$$

$$\Rightarrow xy - x = 1 - 2y \Rightarrow x(y-1) = 1-2y$$

$$\Rightarrow x = \frac{1-2y}{y-1}$$

$$f^{-1} : \left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3} \right] \longrightarrow [0, 1] \quad \text{et donc} \quad f^{-1} : \left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3} \right] \longrightarrow [0, 1]$$

$$y \mapsto \frac{1-2y}{y-1} \quad x \mapsto f^{-1}(x) = \frac{1-2x}{x-1}$$

par suite f^{-1} est continue et strictement croissante.

Théorème 3.3.

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue
si $f(a) \cdot f(b) < 0$ alors $\exists c \in]a, b[: f(c) = 0$

Exemple.

L'équation $2x^3 - 5x + 2 = 0$ accepte-t-elle des solutions sur le domaine $[0, 1]$.

Réponse.

On a f est continue sur $[0, 1]$ ($[0, 1] \subset \mathbb{R}$)

$$f(0) = 2, \quad f(1) = -1 \Rightarrow f(0) \cdot f(1) < 0$$

Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires

$$\exists c \in]0, 1[: f(c) = 0$$

Proposition 3.2.

Soit $f : I - \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $I - \{x_0\}$. On dit qu'on peut prolonger par continuité la fonction f si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$.

On pose alors $\tilde{f}$ la fonction définie sur I par :

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq x_0 \\ l & \text{si } x = x_0 \end{cases}$$

Cor

Math 1

(ST)

La fonction $\tilde{f}$ est continue en x_0 et s'appelle le prolongement par continuité de f en x_0 .

Exemple:

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

Réponse:

$$D_f = \mathbb{R} - \{2\}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)} = 4$$

Alors f est prolongeable par continuité en $x_0 = 2$ telle que

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} & x \neq 2 \\ 4 & x = 2 \end{cases}$$

4. Dérivabilité

Définition 3.15 (en un point)

Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Soient $x_0, x_0 + h \in I$ ($h \neq 0$). On dit que f est dérivable en $\underline{x_0}$ si

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell / \ell < +\infty \text{ (finie)}, \text{ l'est dit}$$

le nombre dérivé de f en $\underline{x_0}$, et on le note $f'(x_0)$

ainsi autre écriture (avec $h = x - x_0$)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

Remarque :

• On dit que f est dérivable en x_0 si elle est dérivable à droite ($\lim_{n \searrow x_0} = l_1$) et à gauche ($\lim_{n \nearrow x_0} = l_2$) et $l_1 = l_2$

• Si $\lim_{n \rightarrow x_0} \frac{f(n) - f(x_0)}{n - x_0} = \infty \Rightarrow f$ n'est pas dérivable

Exemple :

Etudier la dérivabilité en $x_0 = 1$ de $f(x) = 2x/x-1$

Réponse :

$$f(1) = 0$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x(x-1) & \text{si } x > 1 \\ -2x(x-1) & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$$

• à droite de $x_0 = 1$

$$\lim_{n \searrow 1} \frac{f(n) - f(1)}{n - 1} = \lim_{n \searrow 1} \frac{2n(n-1)}{(n-1)} = 2$$

alors f est dérivable à droite de $x_0 = 1$

• à gauche de $x_0 = 1$

$$\lim_{n \nearrow 1} \frac{f(n) - f(1)}{n - 1} = \lim_{n \nearrow 1} \frac{-2n(n-1)}{(n-1)} = -2$$

alors f est dérivable à gauche de $x_0 = 1$

et comme $\lim_{x \searrow 1} \neq \lim_{x \nearrow 1}$ et donc f n'est pas dérivable en $x_0 = 1$

Théorème 3.4.

Si f est dérivable en un point x_0 alors elle est continue en ce point x_0

Définition 3.16

On dit que f est dérivable sur I si pour tout $x \in I$, f est dérivable en x . Et on note

$f' : x \mapsto f'(x)$ la fonction dérivée

Exemple.

$f(x) = x^2$, $I = \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} (x + x_0) = 2x_0 = f'(x_0)$$

Exemple.

La fonction $f(x) = |x|$ est continue en $x_0 = 0$ mais elle n'est pas dérivable en $x_0 = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0 = f(0)$$

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

et donc f n'est pas dérivable en $x_0 = 0$ (21)

• Interprétation graphique de la dérivée :

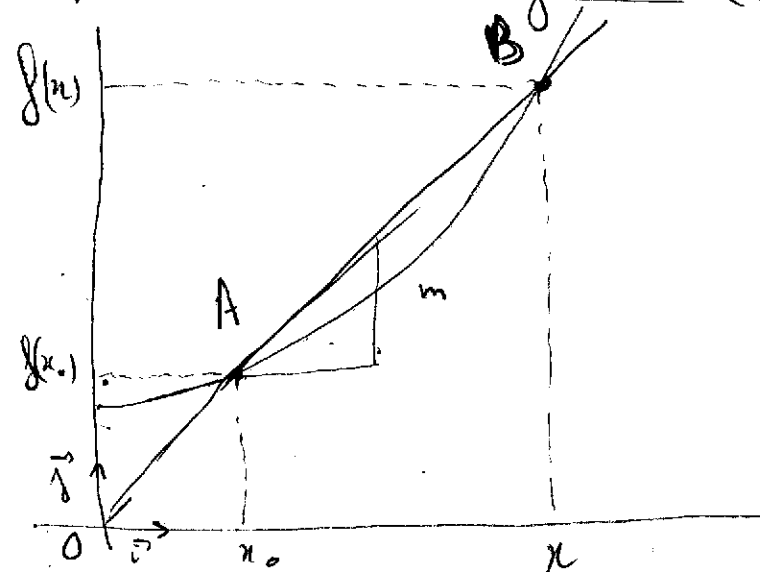
Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction tq f est dérivable sur I .
 $x_0 \in I$, $(\mathcal{C}_f)$ le graphe de f dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soient $A(x_0, f(x_0))$ et $B(x, f(x))$ deux points de $(\mathcal{C}_f)$.

La droite (AB) a pour coefficient directeur $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

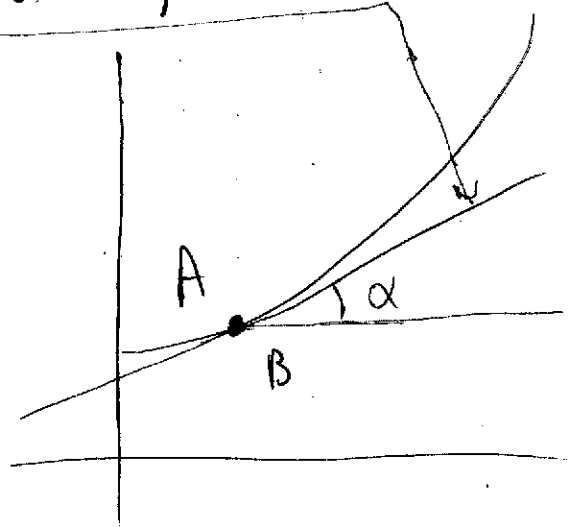
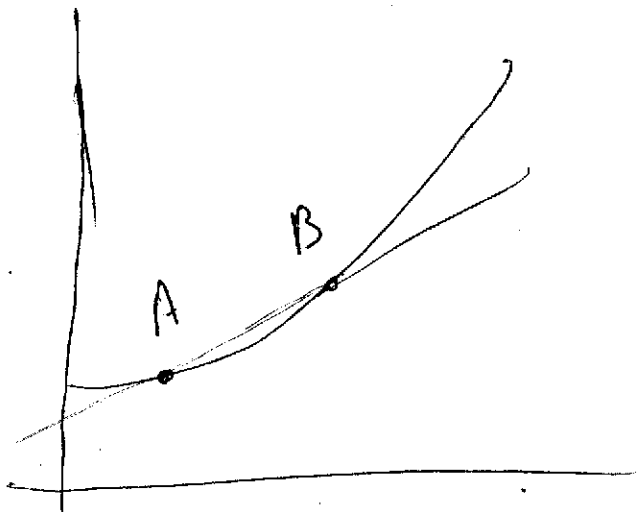
(ou $\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ avec $h \neq 0$). la pente de la droite

• On déplace le point B sur la courbe $(\mathcal{C}_f)$ en le rapprochant de A (on dit que l'on fait tendre B vers A)
 et la dérivée $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ représente la
pente de la tangente (T) en A.



$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{f(x_B) - f(x_A)}{x_B - x_A}$$

quand $h \rightarrow 0$ cette droite est
 devenu la tangente de la courbe
 $(\mathcal{C}_f)$ au point A



et son équation réduite est :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Proposition 3.31

Soient les deux fonctions $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ soit dérivables sur I et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors on a

1. $(f+g)' = f' + g'$

2. $(\lambda f)' = \lambda f'$

3. $(f \cdot g)' = f'g + g'f$

4. $\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$ (avec $f \neq 0$)

5. $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$ (avec $g \neq 0$)

• Dérivées des fonctions usuelles

fonction		Dérivée	D _f
$(a \in \mathbb{R})$	a	0	$\mathbb{R}$
$(a \in \mathbb{R}^n)$	$a \cdot n$	a	$\mathbb{R}$
$(n \in \mathbb{N}^*)$	x^n	$n \cdot x^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$n \in \mathbb{N}^*$	$1/x^n$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$
	$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{x \sqrt[n]{n}}$	$[\infty, +\infty[$
	$\cos n$	$-\sin n$	$\mathbb{R}$
	$\sin n$	$\cos n$	$\mathbb{R}$
	$\operatorname{tg} n$	$\frac{1}{\cos^2 n}$	$\mathbb{R} - \left\{k + \frac{1}{2}\pi\right\}$
	$\ln x $	$1/x$	$\mathbb{R}^*$
	e^n	e^n	$\mathbb{R}$

Proposition 3.4. (composée)

Soient $I, J \subseteq \mathbb{R}$. Soient $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, $g: J \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $f(I) \subseteq J$. On suppose que f est dérivable en $x_0 \in I$, et g est dérivable en $f(x_0) \in J$, alors $g \circ f$ est dérivable en x_0 : $g \circ f: I \rightarrow \mathbb{R}$ et l'on a $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \times f'(x_0)$

Exemple.

$$1. \cos(ax+b) = g(f(x)) \quad \begin{cases} f(x) = ax+b \\ g(x) = \cos x \end{cases}$$

$$[\cos(ax+b)]' = -a \sin(ax+b)$$

$$2. [\sin(ax+b)]' = a \cos(ax+b)$$

$$3. (e^f)' = f' \cdot e^f$$

$$4. \ln|f| = \frac{f'}{f}$$

$$5. (f^n)' = n f' f^{n-1}$$

$$6. \left(\frac{1}{f^n}\right)' = -\frac{n f'}{f^{n+1}}$$

$$7. (\sqrt{f})' = \frac{f'}{2\sqrt{f}}$$

Proposition 3.5.

Soit $f: I \rightarrow J$ une fonction bijective et dérivable en x_0 (avec $f'(x_0) \neq 0$) alors sa fonction réciproque f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ et

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

Corr

Math 1

(S T)

Théorème 3.6, Rolle)

Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, ($a < b$). f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors si $f(a) = f(b)$, $\exists c \in]a, b[: f'(c) = 0$

Remarques:

Les conditions du théorème de Rolle sont suffisantes et non nécessaires

Exemple:

$$f(x) = x^3 \text{ sur } [-1, 1]$$

On a $f(-1) = f(1)$ alors qu'il existe

$$c = 0 \in]-1, 1[: f'(c) = 0$$

Théorème 3.7, (des accroissements finis)

Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ($a < b$) une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors

$$\exists c \in]a, b[\quad \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Exemple:

Montrer que : $\forall x > 0; \quad \frac{x}{x+1} < \ln(x+1) < x$

Réponse

On met $f(t) = \ln(t+1)$

On applique le théorème des accroissements finis sur $[0, n]$ avec la fonction f :

1. est continue sur $[0, n]$

2. est dérivable sur $]0, n[$. tq: $f'(t) = \frac{1}{t+1}$

3. $f(0) = 0$, $f(n) = \frac{1}{n+1}$, $f(0) \neq f(x)$

$$\exists c \in]0, n[: \frac{f(n) - f(0)}{n - 0} = f'(c)$$

$$\exists c \in]0, n[: \frac{\ln(n+1)}{n} = \frac{1}{c+1} \dots (*)$$

On a $0 < c < n$

$$1 < c+1 < n+1 \Rightarrow \frac{1}{n+1} < \frac{1}{c+1} < 1$$

de (*) on obtient

$$\frac{1}{n+1} < \frac{\ln(n+1)}{n} < 1$$

$$\Rightarrow \frac{n}{n+1} < \ln(n+1) < n$$

Proposition 3.6. (l'Hôpital)

Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur I et dérivables sur $I - \{x_0\}$, telles que g et g' ne s'annulent pas sur $I - \{x_0\}$, alors:

1. Si $f(x_0) = g(x_0) = 0$, on a:

$$\text{si } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l, (l \in \mathbb{R})$$

2. Si $\lim_{n \rightarrow x_0} f(n) = \lim_{n \rightarrow x_0} g(n) = \infty$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow x_0} \frac{f'(n)}{g'(n)} = l \implies \lim_{n \rightarrow x_0} \frac{f(n)}{g(n)} = l, (l \in \mathbb{R})$$

Exemple:

$$\lim_{n \rightarrow 0} \frac{\ln(n+1)}{n}$$

On pose : $f(n) = \ln(n+1)$, $g(n) = n$

1. $\lim_{n \rightarrow 0} f(n) = 0$, $\lim_{n \rightarrow 0} g(n) = 0$

2. $f, g \in C^1(\mathbb{R}_+^*)$

$$f'(n) = \frac{1}{n+1}, \quad g'(n) = 1$$

3. $g'(n) \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{R}_+^*$

4. $\lim_{n \rightarrow 0} \frac{f'(n)}{g'(n)} = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{n+1} = 1$

alors $\lim_{n \rightarrow 0} \frac{\ln(n+1)}{n} = 1$